த.பா.நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—459

எண்சார் கணிதவியல்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்

ஆர். இராமகிருஷ்ணன், எம்.ஏ., எம்.எஸ்ஸி.,
துணைப் பேராசிரியர்,
கணிதத் துறை,
வி. இ. நா. செந்திக்குமார நாடார் கல்லூரி,
விருதுநகர்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—June, 1973

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 459

NUMERICAL MATHEMATICS

R. RAMAKRISHNAN

Price Rs. 10.75

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by
Tax and Company Law Press,
Madras-600032.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்

(தமிழகக் கல்வி – உள்ளாட்சித்துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்விமொழியாக ஆக்கிப் பன்னிரண்டாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ் வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் பலர், அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **'எண்சார் கணிதவியல்'** என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **459** ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **494** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக் கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப் படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

முன்னுரை

கணிதம் பெரிதும் பயன்படுத்தப்படும் எல்லாத் துறைகளிலும், குறிப்பாக, வானியல், இயற்பியல், பொறியியல், புள்ளியியல் முதலான துறைகளிலும் பல திறப்பட்ட கணித முறைகளையும், கணித வாய்பாடுகளையும் பயன்படுத்தி இறுதியில் எண்ணுலாகிய தீர்வுகள் பெறப்படுகின்றன. மேற்கூறப்பட்ட எல்லாத் துறைகளிலும் எண்சார் தீர்வுகளின் மதிப்புகளைத் துல்லியமாகக் காணவேண்டியது மிகவும் இன்றியமையாததாகும். இத்தகைய பிரயோகக் கணிதங்களில் எண்சார் தீர்வுகளைத் துல்லியமாகக் கணக்கிடப் பயன்படும் முறைகளைப் பற்றியதுதான் 'எண்சார் கணிதவியல்' என்ற இந்த நூலாகும். மிகவும் அண்மைக் காலத்தில்தான் எண்சார் கணிதத்தின் முக்கியத்துவமும் பயனும் பலராலும் உணரப்பட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களில் பட்டப்படிப்புக்குரிய பாடமாக எண்சார் கணிதம் நிர்ணயிக்கப்பட்டுள்ளது.

எண்சார் தீர்வுகளுக்குப் பயன்படுத்தப்படும் முக்கியமான முறைகள், வாய்பாடுகள் யாவும் இந் நூலில் மிகவும் தெளிவாக விளக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு வாய்பாட்டைத் தொடர்ந்தும் அவ் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தும் முறை பல மாதிரிக் கணக்குகளால் விளக்கப்பட்டுள்ளது. வாசகர்களின் பயிற்சிக்காகப் பல கணக்குகளைக் கொண்ட பயிற்சிகள் வாய்பாட்டிற்கான மாதிரி கணக்குகளைத் தொடர்ந்து அல்லது அத்தியாயத்தின் இறுதியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பல்வேறு பல்கலைக் கழகத் தேர்வுகளில் இடம்பெற்ற கணக்குகள் மாதிரிக் கணக்குகளாகவும் பயிற்சிக் கணக்குகளாகவும் சேர்க்கப்பட்டுள்ளனவாகையால், மாணவர்கள் பல்கலைக் கழகத் தேர்வுக்குத் தங்களைத் தயார் செய்துகொள்ளப் பெரிதும் உதவியாயிருக்கும். பொறியியல், புள்ளியியல் துறைகளைச் சார்ந்த மாணவர்களுக்கும் பயன்படுமாறு 'நழுவுச் சட்டம்', 'நேமவரையம்' என்ற இரண்டு அத்தியாயங்களும் நூலின் இறுதியில் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன. கணிதச் செயல்களுக்கும் பயன்படுமாறு நூலின் இறுதியில் மடக்கைப் பட்டியலும் எதிர் மடக்கைப் பட்டியலும் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன. என்றாலும், ஏழு இடமடக்கைப் பட்டியல், வர்க்க, வர்க்கமூலப் பட்டியல்கள், முப்படி, முப்படி மூலப் பட்டியல்கள் ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் தீர்வுகளின் மதிப்புகளை எளிதாகவும், விரைவாகவும், துல்லியமாகவும் பெற முடியும். கணக்கிடும் கருவிகளிருந்தால் அவற்றைப் பயன்படுத்தி மிகவும் சுலபமாக விடைகளைப் பெறலாம்.

ஆர். இராமகிருஷ்ணன்

பொருளடக்கம்

1. சமன்பாடுகளின் உருவ மாற்றம்
(Transformation of Equations)

1·1 பல்லுறுப்புச் சமன்பாடு (Polynomial Equation)

$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ $(P_n \neq 0)$ஐ மாறிலிகளாகவும், x-ஐ மாறியாகவும் கொண்ட $P_0x^n + P_1x^{n-1} + P_2x^{n-2} + \ldots + P_n$ என்ற கோவையானது x-இல் n படி பெற்ற ஒரு பல்லுறுப்புச் சார்பு (Polynomial function of degree n) எனப்படும். இந்தக் கோவையில் x-இன் படிகள் முழு எண்களாகயிருப்பின் இது ஒரு விகிதமுறு முழுச் சார்பு (Rational integral function) என்று சொல்லப்படும். ஒரு கோவையைப் பூச்சியத்திற்கு அல்லது மற்றொரு கோவைக்குச் சமன் படுத்தினால் கிடைப்பது ஒரு பல்லுறுப்புச் சமன்பாடாகும். ஆகவே,

$$P_0x^n + P_1x^{n-1} + P_2x^{n-2} + \ldots\ldots + P_n = 0$$

என்பது ஒரு பல்லுறுப்புச் சமன்பாடாகும். இச் சமன்பாட்டில் $P_0 \neq 0$. ஆகவே, சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களையும் P_0-ஆல் வகுத்து x^n-இன் குணகம் (coefficient) 1-ஆகயிருக்குமாறு மாற்றி எழுதலாம். ஆகவே, எந்த ஒரு பல்லுறுப்புச் சமன்பாட்டையும் கீழ்க்கண்ட அமைப்பில் எழுதலாம்.

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n = 0$$

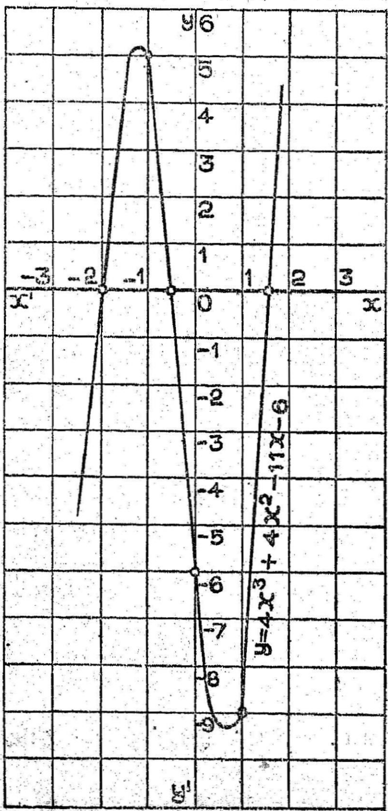
பொதுவாக, x-இல் ஒரு பல்லுறுப்புச் சார்பை f(x) என்றும், பல்லுறுப்புச் சமன்பாட்டை f(x) = 0 என்றும் எழுதலாம். x-இன் எந்த மதிப்பு f(x) = 0 என்ற சமன்பாட்டைத் திருப்திப்படுத்துகிறதோ அந்த மதிப்பு அச்சமன்பாட்டின் மூலம் (root) ஆகும். ஒரு சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களையும் மதிப்பிடுகின்ற முறைக்குச் சமன்பாட்டை தீர்த்தல் என்று பெயர்.

1·2 பல்லுறுப்புச் சார்பின் வரைபட வகைக் குறிப்பு (Graphical representation of a polynomial)

y = f(x) என்ற சார்பினைக் கருதுக. இதில் x-க்கு $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ என்ற தெரிந்த மதிப்புக்களை அளித்து அதற்குரிய y-இன்

மதிப்புக்களாகிய $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$, ... ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக. Ox, Oy என்ற இரு செங்குத்து நேர் கோடுகளை அச்சுகளாகக் (axes) கொண்ட ஒரு வரைப்படத்தில் (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். இப்புள்ளிகளை ஒரு (மெல்லிய) வளைவுக்கோட்டால் இணைத்தால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு f (x)-இன் வரைப்படம் கிடைக்கும்.

இப்பொழுது, x-இன் எந்த மதிப்பு f (x)-ஐப் பூச்சியத்துக்குச் சமன்படுத்துகிறதோ அந்த மதிப்பு $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் என்று பார்த்தோம். ஆனால், $f(x) = 0$ ஆயின் $y = 0$ ஆகும். ஆகவே, f (x)-இன் வளைவு x-அச்சை எந்தப் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறதோ அந்தப் புள்ளிகளின் x-அச்சுத் தூரங்கள் (abscissae) $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மெய்மூலங்கள் (real roots) ஆகும்.



படம் 1

மாதிரி 1

$4x^3 + 4x^2 - 11x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களை வரைப்பட முறையில் காண்க.

$y \equiv f(x) \equiv 4x^3 + 4x^2 - 11x - 6$ எனக் கொள்க. x-க்கு −2, −1, 0, 1, 2, என்ற மதிப்புக்களை யளித்து அம்மதிப்புக்களுக்குரிய y-இன் மதிப்புக்களைக் கணக்கிட்டுக் கீழ்க் கண்டவாறு பட்டியல் அமைக்கவும்.

x :	−2	−1	0	1	2
y :	0	5	−6	−9	20

Ox, Oy செங்குத்து நேர்க் கோடுகளை அச்சுக்களாகக் கொண்ட ஒரு வரைப்படத்தில் (−2, 0), (−1, 5), (0, −6), (1, −9), (2, 20) ஆகிய புள்ளிகளைக் குறித்து, அப்புள்ளிகளை ஒரு மெல்லிய (வழவழப்பான) வளைவினால் (smooth curve) இணைக்கவும். இவ்வாறு கிடைக்

கப் பெற்ற அந்த வளைவு x-அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளின் x-அச்சுத் தூரங்களைக் கணக்கிடுக. அவைதாம் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன் பாட்டின் மெய்மூலங்களாகும். (படம் 1-ஐப் பார்க்கவும்).

ஆகவே $4x^3 + 4x^2 - 11x - 6 = 0$ இன் மூலங்கள் : -2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$.

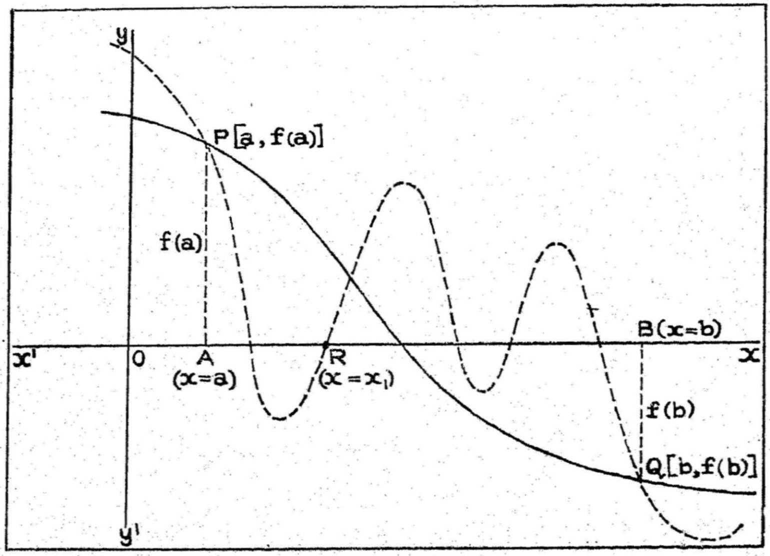
தேற்றம் 1. f (x) என்ற தொடர்புடைச் சார்பில் (continuous function) a, b என்ற மெய் மதிப்புக்களை x கொள்ளும்போது, f (a), f (b) என்பன எதிரான அடையாளங்களைக் கொண்டிருந்தால், a-க்கும் b-க்குமிடையே குறைந்தது ஒரு மூலமாவது இருக்க வேண்டும்.

நிருபணம். $y = f(x)$ எனக் கொள்க.

$x = a$ ஆனால், $y = f(a)$

$x = b$ ஆனால், $y = f(b)$

இப்பொழுது, f(a), f(b) இரண்டும் எதிரான அடையாளங்களுட னிருப்பதால் [a, f(a)], [b, f(b)] என்ற புள்ளிகள் x-அச்சின் இரண்டு பக்கங்களிலுமாக அமைந்திருக்கும். f(x) என்பது தொடர்புடைச் சார்பாகையால் f(x)-இன் வளைவு P[a, f(a)] என்ற புள்ளியிலிருந்து

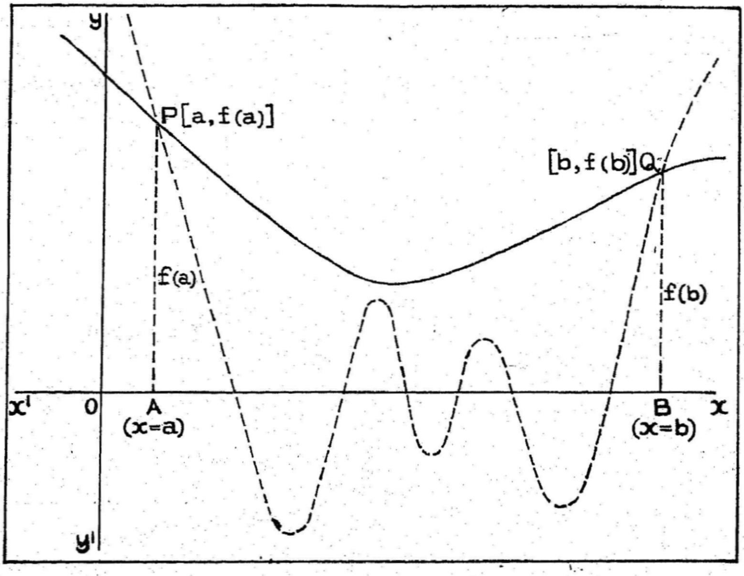


படம் 2

Q [b, f(b)] என்ற புள்ளிக்குச் செல்லும்போது குறைந்தது ஒரு தடவையாவது x-அச்சைக் கடந்து செல்ல வேண்டும். அவ்வாறு கடந்து செல்லும் புள்ளி (R)யில் f(x)-இன் மதிப்புப் பூச்சியமாவதால்

அப்புள்ளியின் x-அச்சுத்தூரம் (OR) f(x) = 0 இன் ஒரு மூல மாகும். ஆகவே, f(x) = 0 இன் மூலங்களில் குறைந்தது ஒரு மூலமாவது a-க்கும் b-க்குமிடையே யிருக்கவேண்டும்.

குறிப்பு : f(x)-இன் வளைவு Pயிலிருந்து Qக்குச் செல்லும்போது x-அச்சை ஒரு தடவைக்கு மேலும் கடந்து செல்லலாம். (புள்ளி வளைவைப் பார்க்க) அவ்வாறு கடந்து செல்லும்போது, P, Q ஆகியவை x-அச்சின் இருபுறங்களிலும் இருப்பதால் f(x)-இன் வளைவு x-அச்சை ஒற்றை யெண்ணிக்கைப் புள்ளிகளில்தான் கடந்து செல்ல முடியும். (படத்தில் 5 புள்ளிகள்) ஆகவே, f(x) = 0-இன் மூலங்களில் a, b ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள மூலங்களின் எண் ணிக்கை ஒற்றையெண் (odd number)ணுக யிருக்கும். அதாவது, f(x) = 0-இன் மூலங்களில் a, bக்கு இடையேயுள்ள. மூலங்களின் எண்ணிக்கை ஒன்று அல்லது ஒற்றையெண்ணுக யிருக்கும்.



படம் 3

தேற்றம் 2. f(x) என்ற தொடர்புடைச் சார்பில் a, b என்ற மெய்மதிப்புக்களை x அடையும்போது f(a), f(b) என்பன ஒரே அடையாளமுள்ளவையாகயிருப்பின், a, bக்கு இடையில் அமைந் துள்ள f(x) = 0 இன் மூலங்களின் எண்ணிக்கை இரட்டை யெண்ணுக (even number) யிருக்கும்; அல்லது a, bக்கு இடையே ஒரு மூலமும் இருக்காது.

நிரூபணம் :

$f(a)$, $f(b)$ இரண்டும் நேர் அடையாளம் (positive sign) உள்ள தாகக் கொள்க. ஆகவே, $P[a, f(a)]$, $Q[b, f(b)]$ என்ற புள்ளி களிரண்டும் x-அச்சின் ஒரே பக்கத்தில் (படம் 3) அமைந்திருக்கும். எனவே, $y=f(x)$ என்ற தொடர்புடைச் சார்பின் வளைவு Pயிலிருந்து Qக்குச் செல்லும்போது x-அச்சை வெட்டாமலே செல்ல முடியும்; அல்லது x-அச்சை இரட்டையெண்ணிக்கைப் புள்ளிகளில் வெட்டிய பின்னரே Q-ஐச் சேர முடியும். ஆகையால் a, bக்கிடையே $f(x) = 0$-இன் ஒரு மூலமும் இருக்க முடியாது; அல்லது a, bக்கிடையே யுள்ள மூலங்களின் எண்ணிக்கை இரட்டையாகயிருக்கும்.

தேற்றம் 3. x-இல் n படி பெற்ற ஒரு சமன்பாட்டிற்கு n மூல கங்கள் (மெய் அல்லது கற்பனை) உண்டு; ஆனால் n-க்கு அதிகமான மூலகங்கள் கிடையா.

நிரூபணம் :

ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புச் சமன்பாடு $f(x) = 0$க்கும் குறைந்தது ஒரு மூலம் (மெய் அல்லது கற்பனை) உண்டு என்ற இயற் கணிதத் தேற்றத்தைக் கருத்திற் கொள்க.

கொடுக்கப்பட்ட n படி பெற்ற சமன்பாட்டை $f_n(x) = 0$ எனக் கொள்வோம். $x=x_1$ என்பது இதன் ஒரு மூலம் எனக் கொள்க. ஆகவே, $f_n(x)$ ஆனது $(x-x_1)$ ஆல் மீதியில்லாமல் வகுபடும். ஈவு $(n-1)$ படி பெற்ற $f_{n-1}(x)$ என்ற சார்பாகயிருக்கும். அதாவது,

$$f_n(x) = (x-x_1)\, f_{n-1}(x) \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (1)$$

இதுபோல், $f_{n-1}(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குக் குறைந்தது ஒரு மூலமாவது இருக்கவேண்டும். அந்த மூலத்தை x_2 எனக் கொள்க. ஆகவே, $f_{n-1}(x)$ ஆனது $(x-x_2)$ ஆல் மீதியில்லாமல் வகுபடுவ தோடு, கிடைக்கும் ஈவு $(n-2)$ படி பெற்ற $f_{n-2}(x)$ என்ற சார்பாக யிருக்கும். ஆகையால்,

$$f_{n-1}(x) = (x-x_2)\, f_{n-2}(x) \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$f_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\, f_{n-2}(x)$$

என்று கிடைக்கிறது. இவ்வாறு, x_3 என்பது $f_{n-2}(x)$ இன் ஒரு மூலமானால்,

$$f_{n-2}(x) = (x-x_3)\, f_{n-3}(x)$$

$$\therefore f_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, f_{n-3}(x)$$

இம்முறையைத் தொடர்ந்து செயல்படுத்த, இறுதியில்

$$f_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \ldots\ldots\ldots (x-x_n)\, Q \quad \ldots \quad (3)$$

என்ற அமைப்புள்ள ஒரு தொடர்பு கிடைக்கும். ஆனால், $f_n(x)$-ம், $(x-x_1)$ $(x-x_2)$ ...... $(x-x_n)$-ம் n படி பெற்றச் சார்புகளாக யிருப்பதால் Q ஒரு மாறிலியாகத் தானிருக்க முடியும். இப்போது, சமன்பாடு (3)-இன் வலப்பக்கமுள்ள கோவை $x = x_1, x_2, x_3, \ldots,$ x_n ஆகிய மதிப்புக்களுக்குப் பூச்சியமாவதால் $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ x_n என்பன $f_n(x) = 0$ இன் மூலங்களாகும். இவைகளைத் தவிர x-இன் வேறு எந்த மதிப்புக்கும் (3)-இன் வலப்பக்கம் பூச்சிய மாகாது. அதாவது, $f_n(x)$ ஆனது x-இன் வேறு எந்த மதிப்புக்கும் பூச்சியமாகாது. ஆகவே, இந்த n மூலங்களைத் தவிர வேறு மூலம் $f_n(x) = 0$க்குக் கிடையாது. அதாவது, $f_n(x) = 0$க்கு மொத்தம் n மூலங்கள் தாம் உண்டு.

மாதிரி 2

$x^3+6x^2+x-10 = 0$ இன் ஒரு மூலம் 1க்கும் 2க்குமிடையே யுள்ளது என்று காட்டுக.

இங்கு, $f(x) = x^3+6x^2+x-10$

$$f(1) = 1+6+1-10 = -2 = -$$

$$f(2) = 8+24+2-10 = 24 = +$$

f(1), f(2) ஆகியவற்றின் அடையாளங்கள் எதிராகயிருப்பதால் குறைந்தது ஒரு மூலம் 1க்கும் 2க்குமிடையே யிருக்க வேண்டும்.

மாதிரி 3

$x^3-6x-13 = 0$ இன் நேர்மெய் மூலத்தை இரண்டு தசம இடங்களுக்குக் கணக்கிடுக.

இங்கு, $f(x) = x^3-6x-13$

$$f(3) = 27-18-13 = -4 = -$$

$$f(4) = 64-24-13 = 27 = +$$

ஆகவே, ஒரு மூலம் 3க்கும் 4க்குமிடையே யுள்ளது.

மேலும், $f(3{\cdot}1) = 29{\cdot}791-18{\cdot}6-13 = -1{\cdot}809 = -$

$$f(3{\cdot}2) = 41{\cdot}768-19{\cdot}2-13 = 9{\cdot}568 = +$$

ஆகவே, அந்த மூலம் 3·1க்கும் 3·2க்குமிடையே யுள்ளது.

மேலும், $f(3{\cdot}17) = 31{\cdot}885013-19{\cdot}02-13 = -0{\cdot}134987 = -$

$$f(3{\cdot}18) = 32{\cdot}157432-19{\cdot}08-13 = 0{\cdot}077432 = +$$

ஆகவே, அந்த மூலம் 3·17க்கும் 3·18க்குமிடையே யுள்ளது.

மேலும், $f(3{\cdot}176) = 32{\cdot}03024-19{\cdot}056-13 = -0{\cdot}02576 = -$

$$f(3{\cdot}177) = 32{\cdot}06651-19{\cdot}062-13 = 0{\cdot}00451 = +$$

ஆகவே, அந்த மூலம் 3·176க்கும் 3·177க்குமிடையே யுள்ளது. ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் நேர்மெய் மூலம் 3·18 (இரண்டு தசம இடங்களுக்கு) ஆகும்.

1·3 சமன்பாடுகளின் உருவ மாற்றம் (Transformation of Equations)

(i) $f(x)=0$ இன் மூலங்களின் எதிரெண்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை அமைத்தல்:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots, \alpha_n$ என்பன $f(x) \equiv x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$இன் மூலங்கள் எனக் கொள்க. ஆகவே, $-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, \ldots, -\alpha_n$ஐ மூலங்களாகவுடைய சமன்பாட்டை நாம் அமைக்க வேண்டும்.

$f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டில் $y=-x$, அதாவது $x=-y$, என்று பிரதியிட நாம் பெறுவது :

$$(-y)^n + a_1(-y)^{n-1} + a_2(-y)^{n-2} + \ldots + a_n=0$$

அதாவது, $F(y) \equiv y^n-a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} - \ldots = 0$

$f(x)=0$ இன் ஒவ்வொரு மூலத்திற்கும் உரிய மூலம் ஒன்று $F(y)=0$க்கு உண்டு. ஆகவே $x=\alpha_1$ என்பது $f(x)=0$ இன் ஒரு மூலமானால் $y=-x=-\alpha_1$ என்பது $F(y)=0$ இன் ஒரு மூலமாகும். இவ்வாறு $-\alpha_2, -\alpha_3, \ldots, -\alpha_n$ என்பன $F(y)=0$ இன் மூலங்களாகும். ஆகவே, $F(y)=0$ என்பது தான் வேண்டிய சமன்பாடாகும்.

மாதிரி 3

$x^4-4x^3+3x^2-1=0$ இன் மூலங்களின் எதிரெண்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

இங்கு, $f(x) \equiv x^4-4x^3+3x^2-1=0$

$x=-y$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore f(-y) \equiv (-y)^4-4(-y)^3+3(-y)^2-1=0$$

அதாவது $F(y) \equiv y^4+4y^3+3y^2-1=0$

இதுதான் வேண்டிய சமன்பாடு.

(ii) k என்பது ஒரு மாறிலியானால், $f(x)=0$ இன் மூலங்களின் k மடங்குகளை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை அமைத்தல் :

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ என்பன $f(x) \equiv x^n+a_1 x^{n-1}+a_2 x^{n-2}+\ldots+a_n=0$ இன் மூலங்கள் எனக் கொள்க. இப்பொழுது, $k\alpha_1$,

$k\alpha_2, \ldots, k\alpha_n$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை அமைக்க வேண்டும்.

$y=kx$ அதாவது, $x=y/k$ என்று $f(x)=0$ இல் பிரதியிடவும்.

$$\therefore\ f(y/k) \equiv \left(\frac{y}{k}\right)^n + a_1\left(\frac{y}{k}\right)^{n-1} + a^2\left(\frac{y}{k}\right)^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

அதாவது, $F(y) \equiv y^n + a_1 ky^{n-1} + a_2 k^2 y^{n-2} + \ldots + a_n k^n = 0$ $f(x)=0$ இன் ஒவ்வொரு மூலத்திற்கும் ஒத்த மூலம் ஒன்று $F(y) = 0$க்கு உண்டு. $x=\alpha_1$ க்குரிய $F(y)=0$ இன் மூலம் $y = kx = k\alpha_1$ ஆகும். இதுபோல், $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ க்குரிய $F(y) = 0$ இன் மூலங்கள் $k\alpha_2, k\alpha_3, \ldots, k\alpha_n$ ஆகும். ஆகவே, $F(y) = 0$ என்பது தான் வேண்டிய சமன்பாடாகும்.

மாதிரி 4

$x^5-4x^4+3x^2-4x+6 = 0$ இன் மூலங்களின் மூன்று மடங்குகளை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை அமைக்கவும்.

இங்கு, $f(x) \equiv x^5-4x^4+3x^2-4x+6 = 0$

$y=3x$ அல்லது, $x=y/3$ என்று பிரதியிட,

$$f(y/3) \equiv \left(\frac{y}{3}\right)^5 - 4\left(\frac{y}{3}\right)^4 + 3\left(\frac{y}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{y}{3}\right) + 6 = 0$$

அதாவது, $F(y) \equiv y^5-12y^4+81y^2-324y+1458 = 0$

இதுதான் வேண்டிய சமன்பாடு.

மாதிரி 5

$2x^3-5x^2+4x-1 = 0$ இன் மூலங்களை நான்கால் பெருக்குக.

இங்கு, $f(x) \equiv 2x^3-5x^2+4x-1 = 0$

$y = 4x$ அல்லது $x = y/4$ என்று பிரதியிட,

$$f(y/4) \equiv 2(y/4)^3-5(y/4)^2+4(y/4)-1 = 0$$

அதாவது, $F(y) \equiv 2y^3-20y^2+64y-64 = 0.$

அதாவது, $y^3-10y^2+32y-32 = 0$ என்பது தான் வேண்டிய சமன்பாடு.

(iii) $f(x) = 0$ இன் மூலங்களின் தலைகீழ் மதிப்புக்களை (reciprocals) மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை அமைத்தல்:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ என்பன $f(x) \equiv x^n+a_1 x^{n-1}+a_2 x^{n-2}+ \ldots + a_n = 0$ இன் மூலங்களெனக் கொள்க. இப்பொழுது,

$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}, \ldots\ldots, \frac{1}{\alpha_n}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை அமைக்க வேண்டும்.

$y = \frac{1}{x}$ அதாவது, $x = \frac{1}{y}$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore \quad f\left(\frac{1}{y}\right) \equiv \left(\frac{1}{y}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{1}{y}\right)^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

அதாவது, $F(y) \equiv a_n y^n + a_{n-1}\, y^{n-1} + \ldots + a_1 y + 1 = 0$

$f(x) = 0$ இன் ஒவ்வொரு மூலத்திற்கும் உரிய மூலம் ஒன்று $F(y) = 0$க்கு உண்டு. $x = \alpha_1$ க்குரிய $F(y) = 0$ இன் மூலம் $y = \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha_1}$ ஆகும். இதுபோல், $\frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}$ ஆகியவை $F(y) = 0$ இன் மூலங்களாகும். ஆகவே, $F(y) = 0$ தான் வேண்டிய சமன்பாடாகும்.

மாதிரி 6

$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 = 0$ இன் மூலங்களின் தலைகீழ் மதிப்புக்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை அமைக்கவும்.

இங்கு $f(x) \equiv x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 = 0$

$x = \frac{1}{y}$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore \; f\left(\frac{1}{y}\right) \equiv \left(\frac{1}{y}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{y}\right)^3 - 11\left(\frac{1}{y}\right)^2 + 12\left(\frac{1}{y}\right) + 36 = 0$$

அதாவது, $F(y) \equiv 36y^4 + 12y^3 - 11y^2 - 2y + 1 = 0$ என்பதுதான் வேண்டிய சமன்பாடு.

(iv) $f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் ஒவ்வொன்றையும் விட h கூடுதலான (அல்லது குறைவான) மதிப்புக்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை அமைத்தல்: அதாவது, $f(x) = 0$ இன் மூலங்களுடன் h-ஐக் கூட்டுதல் (அல்லது குறைத்தல்):

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ என்பன $f(x) \equiv x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ இன் மூலங்களெனக் கொள்க. நாம் அமைக்க வேண்டிய சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

$\alpha_1 + h, \alpha_2 + h, \alpha_3 + h, \ldots, \alpha_n + h$ ஆகும். இப்பொழுது, $y = x + h$, அதாவது $x = y - h$ என்று பிரதியிடவும்.

$\therefore f(y-h) \equiv (y-h)^n + a_1 (y-h)^{n-1} + a_2 (y-h)^{n-2} + \ldots + a_n = 0$
இச் சமன்பாட்டைச் சுருக்கி

$f(y-h) \equiv y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \ldots + A_n = 0$ என்று எழுதலாம்.

$x = \alpha_1$ என்பது $f(x) = 0$ இன் ஒரு மூலமானுல், $y = x+h = \alpha_1+h$ என்பது $f(y-h) = 0$ இன் ஒரு மூலமாகும். ஆகவே, $\alpha_2 + h, \alpha_3 + h, \ldots, \alpha_n + h$ என்பன $f(y-h) = 0$ இன் மூலங்களாகும். இப்பொழுது $f(y-h) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் $y = x+h$ என்று பிரதியிட

$f(x) \equiv (x+h)^n + A_1 (x+h)^{n-1} + A_2 (x+h)^{n-2} + \ldots + A_n = 0$ என்று கிடைக்கிறது. ஆனுல் இச் சமன்பாடும், கொடுக்கப் பட்டுள்ள $f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_r = 0$ என்ற சமன் பாடும் சர்வ சமமாகும். இப்பொழுது,

$f(x) \equiv (x+h)^n + A_1 (x+h)^{n-1} + \ldots + A_{n-1} (x+h) + A_n$-ஐ $(x+h)$ ஆல் வகுத்தால் ஈவு $(x+h)^{n-1} + A_1 (x+h)^{n-2} + \ldots + A_{n-1}$; மீதி A_n. இந்த ஈவை மீண்டும் $(x+h)$ ஆல் வகுக்க, ஈவு $(x+h)^{n-2} + A_1 (x+h)^{n-3} + \ldots + A_{n-2}$, மீதி A_{n-1} ஆகும். அதாவது, கொடுக்கப் பட்டுள்ள $f(x)$ஐ $(x+h)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதிதான் A_n ஆகும். கிடைக்கும் ஈவை மீண்டும் $(x+h)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதிதான் A_{n-1} ஆகும். இவ்வாறு மீண்டும் மீண்டும் $(x+h)$ ஆல் வகுத்தால், நமக்கு வேண்டிய சமன்பாடாகிய $f(y-h) \equiv y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \ldots + A_{n-1} y + A_n = 0$ இன் குணகங்கள் $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_2, A_1$ ஆகியவை கிடைக்கின்றன.

$f(x) = 0$ இன் மூலங்களை விட h குறைவான மதிப்புக்களை மூலங்களைக் கொண்ட சமன்பாட்டின் குணகங்களைப் பெற $f(x)$ ஐ $(x-h)$ ஆல் அடுத்தடுத்து வகுக்க வேண்டும். கீழ்க்கண்ட மாதிரிக் கணக்குகளில் மேற்கண்ட முறைகள் நன்கு விளக்கப்பட்டுள்ளன.

மாதிரி 7

$x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களுடன் 2 கூட்டவும்.

$y = x+2$ அல்லது, $x = y-2$ என்று பிரதியிடவும் ஆகவே, வேண்டிய சமன்பாடு :

$f(y) \equiv (y-2)^3 - 4(y-2)^2 + 3(y-2) - 1 = 0$
அதாவது, $y^3 - 10y^2 + 31y - 23 = 0$.

மாதிரி 8

$x^3-4x^2+3x-5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களிலிருந்து 2 குறைக்கவும்.

இங்கு $y = x-2$ அல்லது, $x = y+2$ என்று பிரதியிட வேண்டும். ஆகவே,

$f(y) \equiv (y-2)^3-4(y+2)^2+3(y+2)-5 = 0$ அதாவது, $y^3+2y^2-y-7 = 0$ என்பதுதான் வேண்டிய சமன்பாடாகும்.

இச் சமன்பாட்டின் குணகங்கள் முறையே 1, 2, − 1, − 7 ஆகும். இக் குணகங்களைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடாகிய $x^3-4x^2+3x-5 = 0$ இன் இடப்பக்கக் கோவையை $(x-2)$ ஆல் தொகுதி முறையில் வகுத்துக் (Synthetic division) கிடைக்கும் மீதிகளிலிருந்தும் பெறலாம். $x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ ஐ $(x-2)$ ஆல் மீண்டும் மீண்டும் தொகுதி முறையில் மீதிகளைக் கண்டுபிடிக்கும் முறை கீழே செய்து காட்டப்பட்டுள்ளது.

2	1	−4	3	−5
		2	−4	−2
	1	−2	−1	−7
		2	0	
	1	0	−1	
		2		
	1	2		
	1			

நமக்கு வேண்டிய சமன்பாட்டின் குணகங்கள் 1, 2, −1, −7 ஆகும். ஆகவே, $y^3+2y^2-y-7 = 0$ என்பதுதான் வேண்டிய சமன்பாடாகும்.

குறிப்பு : இவ்வாறு மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டில் yக்குப் பதிலாக xஐ எழுதுவதால் எவ்விதக் குழப்பமும் ஏற்படாதாகையால் மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டை $x^3+2x^2-x-7 = 0$ என்றே எழுதலாம்.

மாதிரி 9

$x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 11 = 0$ இன் மூலங்களிலிருந்து 4ஐக் குறைக்கவும்.

வேண்டிய சமன்பாட்டைப் பெற $y = x-4$ அல்லது, $x = y+4$ என்று பிரதியிடவேண்டும்.

அல்லது, வேண்டிய சமன்பாட்டின் குணகங்களைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் சார்பாகிய $x^4-5x^3+7x^2+11$ஐ $(x-4)$ ஆல் தொகு முறையில் வகுத்துப் பெறலாம்.

4	1	−5	7	0	11
		4	−4	12	48
	1	−1	3	12	59
		4	12	60	
	1	3	15	72	
		4	28		
	1	7	43		
		4			
	1	11			
	1				

ஆகவே, வேண்டிய சமன்பாடு : $y^4+11y^3+43y^2+72y+59 = 0$

மாதிரி 10

$x^4-x^3-10x^2+4x+24 = 0$ இன் மூலங்களுடன் 2ஐக் கூட்டிக் கிடைக்கும் சமன்பாட்டின் உதவியால் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் சமன் பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டில் $y=x+2$ அல்லது, $x=y-2$ என்று பிரதியிடவேண்டும். அதாவது, கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் சமன்பாட்டை $x+2$ ஆல் மீண்டும் மீண்டும் வகுத்துக் கிடைக்கும் மீதிகளிலிருந்து வேண்டிய சமன்பாட்டைப் பெறவேண்டும்.

−2	1	−1	−10	4	24
		−2	6	8	−24
	1	−3	−4	12	0
		−2	10	−12	
	1	−5	6	0	
		−2	14		
	1	−7	20		
		−2			
	1	−9			
	1				

ஆகவே, மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு : $y^4-9y^3+20y^2 = 0$

அதாவது, $y^2(y^2-9y+20) = 0$

அதாவது, $y^2(y-4)(y-5) = 0$

ஆகவே, மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் : 0, 0, 4, 5.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்களாவன :

$$x = y-2 = 0-2,\ 0-2,\ 4-2,\ 5-2$$

$$= -2,\ -2,\ 2,\ 3.$$

1.4 சமன்பாட்டிலிருந்து ஒரு உறுப்பை நீக்குதல்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை

$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ எனக் கொள்க. இச் சமன்பாட்டின் மூலங்களிலிருந்து h குறைக்க $y = x-h$ அல்லது $x = y+h$ என்று பிரதியிடவேண்டும். அவ்வாறு மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு வருமாறு :

$$f(y+h) \equiv a_0(y+h)^n + a_1(y+h)^{n-1} + a_2(y+h)^{n-2} + \ldots\ldots + a_n = 0$$

அதாவது, $a_0\left[y^n + ny^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}y^{n-2}h^2 + \ldots + h^n\right]$

$$+ a_1\left[y^{n-1} + (n-1)y^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right]$$

$$+ a_2\left[y^{n-2} + (n-2)y^{n-3}h + \ldots + h^{n-2}\right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n = 0$$

அதாவது, $a_0y^n + (na_0h + a_1)y^{n-1} +$

$$\left[\frac{n(n-1)}{2!}a_0h^2 + (n-1)a_1h + a_2\right]y^{n-2}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

இச்சமன்பாட்டில் இரண்டாவது உறுப்பு நீக்க வேண்டுமாயின், $na_0h + a_1$ என்பது பூச்சியமாக வேண்டும்.

$$\therefore na_0h = -a_1$$

$$\text{அல்லது} \quad h = -\frac{a_1}{na_0}$$

ஆகவே, ஒரு சமன்பாட்டை இரண்டாவது உறுப்பு இல்லாத சமன்பாடாக மாற்ற அதன் மூலங்களிலிருந்து $-\frac{a_1}{na_0}$ ஐக் குறைக்க வேண்டும்.

இதுபோல், $\frac{n(n-1)}{2!}a_0h^2 + (n-1)a_1h + a_2 = 0$-இலிருந்து கிடைக்கும் h-இன் மதிப்பைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின்

மூலங்களிலிருந்து குறைத்தால், மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டில் மூன்றுவது உறுப்பு இருக்காது. ஆகவே, இதே முறையைப் பின்பற்றி மாற்றப்படும் சமன்பாட்டில் எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பும் இல்லாமல் செய்யலாம்.

மாதிரி 11

$x^4+8x^3+x-5=0$ என்ற சமன்பாட்டை இரண்டாவது உறுப்பு இல்லாத சமன்பாடாக மாற்றுக.

இங்கு $a_0=1,\ a_1=8,\ n=4.$

$$\text{ஆகவே, } h=-\frac{a_1}{na_0}=-\frac{8}{4\times 1}=-2.$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களிலிருந்து -2ஐக் குறைக்கவும்.

−2	1	8	0	1	−5
		−2	−12	24	−50
		6	−12	25	−55
		−2	−8	40	
		4	−20	65	
		−2	−4		
		2	−24		
		−2			
		0			
	1				

ஆகவே, மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு : $y^4-24y^2+65y-55=0$

மாதிரி 12

$x^4+16x^3+83x^2+152x+84=0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து இரண்டாவது உறுப்பை நீக்கித் தீர்க்கவும்.

$$\text{இங்கு, } h=-\frac{16}{4\times 1}=-4.$$

ஆகவே, சமன்பாட்டின் மூலங்களிலிருந்து -4ஐக் குறைக்கவும்.

-4	1	16	83	152	84
		-4	-48	-140	-48
		12	35	12	36
		-4	-32	-12	
		8	3	0	
		-4	-16		
		4	-13		
		-4			
		0			
	1				

மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு: $y^4-13y^2+36=0$

அதாவது, $(y^2-4)(y^2-9)=0$

ஆகவே, மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள்: $\pm 2, \pm 3$.

∴ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் வருமாறு:

$$x=y+h=y-4=(-2-4), (2-4), (-3-4), (3-4).$$

அதாவது, $x=-6, -2, -7, -1$.

மாதிரி 13

$x^4-4x^3-18x^2-3x+2=0$ என்ற சமன்பாட்டை மூன்ருவது உறுப்பில்லாத சமன்பாடாக மாற்றுக.

இங்கு, $a_0=1$, $a_1=-4$, $a_2=-18$, $n=4$. மூன்ருவது உறுப்பு நீக்கப்பட வேண்டுமாயின்

$$\frac{n(n-1)}{2!}a_0h^2+(n-1)a_1h+a_2=0$$

என்ற நிபந்தனை பூர்த்தியாக வேண்டும்.

ஆகவே, $\frac{4(3)}{2}h^2+(3)(-4)h-18=0$

அதாவது, $6h^2-12h-18=0$

அதாவது, $h^2-2h-3=0$

அல்லது, $(h-3)(h+1)=0$

ஆகவே, $h=3, -1$.

(i) சமன்பாட்டின் மூலங்களிலிருந்து 3ஐக் குறைக்கவும்.

3	1	−4	−18	−3	2
		3	−3	−63	−198
		−1	−21	−66	−196
		3	6	−45	
		2	−15	−111	
		3	−15		
		5	0		
		3			
		8			
	1				

ஆகவே, மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு: $y^4+8y^3-111y-196=0$

(ii) சமன்பாட்டின் மூலங்களிலிருந்து −1ஐக் குறைக்கவும்.

−1	1	−4	−18	−3	2
		−1	5	13	−10
		−5	−13	10	−8
		−1	6	7	
		−6	−7	17	
		−1	7		
		−7	0		
		−1			
		−8			
	1				

மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு: $y^4-8y^3+17y-8=0$ மேலே காணப்பட்ட இரண்டும் வேண்டிய சமன்பாடுகளாகும்.

பயிற்சி 1

1. $2x^4-5x^3-3x^2+7x-10=0$ என்ற சமன்பாட்டை, அதன் மூலங்களின் எதிரெண்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடாக மாற்றுக.

2. $x^5-6x^4+x^3+2x^2-x-8=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் இரு மடங்குகளை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டினை அமைக்கவும்.

3. $2x^4-5x^3+3x^2-2x+1=0$-இன் மூலங்களின் 10 மடங்குகளை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

4. $5x^5-6x^4+3x^3-8x^2+11x-10=0$ இன் மூலங்களின் தலைகீழ் மதிப்புக்களை மூலங்களாகவுடைய சமன்பாட்டைக் காண்க.

5. $3x^3-2x^2+x-9=0$ இன் மூலங்களிலிருந்து 5 குறைந்த மதிப்புக்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

6. $x^5-3x^4-2x^3+15x^2+20x-15=0$ இன் மூலங்களைவிட 2 குறைந்த மதிப்புக்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை அமைக்கவும்.

7. $x^4-x^3-10x^2+4x+24=0$ என்ற சமன்பாட்டை, அதன் மூலங்களைவிட 2 கூடுதலான மதிப்புக்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடாக மாற்றி அதன் மூலம் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காண்க.

8. $x^4-8x^3+x^2-x+3=0$ என்ற சமன்பாட்டை இரண்டாவது உறுப்பு இல்லாத சமன்பாடாக மாற்றவும்.

9. $x^4-12x^3+48x^2-72x+35=0$ என்ற சமன்பாட்டை இரண்டாவது உறுப்பு இல்லாத சமன்பாடாக மாற்றித் தீர்க்கவும்.

2. சமன்பாடுகளின் எண்சார் தீர்வுகள்
(Numerical Solutions of Equations)

இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறையை நாம் நன்கு அறிவோம். $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற பொது இருபடிச் சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களையும்

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

என்ற சூத்திரங்களினால் மிகச் சரியாகக் கணக்கிடலாம். ஆனால் மூன்றும் படிச் சமன்பாடுகளையும், மூன்றுக்கு மேற்பட்ட படிகளைப் பெற்ற சமன்பாடுகளையும் அவ்வளவு எளிதாகத் தீர்க்க முடியாது. இத்தகைய சமன்பாடுகளின் எண்ணியல் தீர்வுகளைக் காணப் பல முறைகள் உள்ளன. அவற்றுள் சிறந்ததும், எளிதானதும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டிற்குப் பொருத்தமானதுமான முறையைத் தேர்ந்தெடுத்து சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காணவேண்டும்.

2.1 ஹார்னரின் முறை (Horner's Method)

இம்முறையில், முதலில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மெய் மூலம் (real root) எந்த எண்களுக்கிடையேயுள்ளது என்பதைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். உதாரணமாக, சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் 3-க்கும் 4-க்குமிடையே யிருப்பதாகக் கொள்வோம். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்களிலிருந்து 3-ஐக் குறைக்க, மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலம் தசம பின்னமாகயிருக்கும். இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களை 10-ஆல் பெருக்க, அம்மூலத்தின் முதல் தசம இடம் முழு எண்ணாக மாறிவிடும். இவ்வாறு மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலம் எந்த எண்களுக் கிடையேயுள்ளது என்பதைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். 1-க்கும் 2-க்கும் இடையே யிருப்பதாகக்

கொள்வோம். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மெய் மூலம் 3·1-க்கும் 3·2-க்குமிடையே யுள்ளது.

இப்பொழுது மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்களிலிருந்து 1-ஐக் குறைத்து, கிடைக்கும் சமன்பாட்டின் மூலங்களை 10-ஆல் பெருக்கிக் கிடைக்கும் சமன்பாட்டின் மூலம் எந்த எண்களுக் கிடையேயுள்ளது என்பதைக் காணவேண்டும். 7-க்கும் 8-க்கு மிடையே யிருப்பதாகக் கொள்வோம். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலம் 3·17-க்கும் 3·18-க்குமிடையே யுள்ளது. இம் முறையைப் பின்பற்றி மேலும் மேலும் தொடர்ந்து செய்தால் நமக்கு வேண்டிய தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாக மூலத்தைக் கணக் கிடலாம். கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாதிரிக் கணக்குகளில் இம் முறை நன்கு விளக்கப்பட்டுள்ளது.

மாதிரி 14.

ஓணரின் முறையைக் கொண்டு $x^3-6x-13=0$-இன் நேர் மெய் மூலத்தை (positive real root) இரண்டு தசம இடங்களுக்குத் திருத்த மாகக் கணக்கிடுக.

$$f(x) \equiv x^3 - 6x - 13 = 0 \text{ எனக் கொள்க.}$$

$$f(3) = 27-18-13=-4=-$$

$$f(4) = 64-24-13= 27=+$$

ஆகவே $f(x) = 0$-இன் நேர் மெய் மூலம் ஒன்று 3-க்கும் 4-க்கும் இடையேயுள்ளது. ஆகவே, அதன் மூலங்களிலிருந்து 3-ஐக் குறைக்கவும்.

3	1	0	−6	−13
		3	9	9
		3	3	−4
		3	18	
		6	21	
		3		
		9		
	1			

மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு : $x^3+9x^2+21x-4=0$ இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களை 10-ஆல் பெருக்கக் கிடைப்பது :

$$f_1(x) \equiv x^3 + 90x^2 + 2100x - 4000 = 0$$

$$f_1(1) = 1 + 90 + 2100 - 4000 = -1809 = -$$

$$f_1(2) = 8 + 360 + 4200 - 4000 = 568 = +$$

ஆகவே, $f_1(x)=0$-இன் மூலம் 1-க்கும் 2-க்குமிடையே யுள்ளது. அதாவது, $f(x)=0$-இன் மூலம் 3·1-க்கும் 3·2-க்குமிடையே யுள்ளது. இப்பொழுது, $f_1(x)=0$-இன் மூலங்களிலிருந்து 1-ஐக் குறைக்கவும்.

1	1	90	2100	−4000
		1	91	2191
		91	2191	−1809
		1	92	
		92	2283	
		1		
		93		
	1			

மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு: $x^3+93x^2+2283x-1809=0$. இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களை 10-ஆல் பெருக்கக் கிடைப்பது:

$$f_2(x)\equiv x^3+930x^2+228{,}300x-1{,}809{,}000=0$$

$$f_2(7)=343+4{,}557+1{,}598{,}100-1{,}809{,}000=-164987=-$$

$$f_2(8)=512+59{,}620+1{,}826{,}400-180{,}9000=77{,}532=+$$

ஆகவே, $f_2(x)=0$-இன் மூலம் 7-க்கும் 8-க்குமிடையே யுள்ளது. அதாவது, $f(x)=0$-இன் மூலம் 3·17-க்கும் 3·18-க்குமிடையே யுள்ளது. இப்பொழுது $f_2(x)=0$-இன் மூலங்களிலிருந்து 7-ஐக் குறைக்கவும்.

7	1	930	228,300	−1,809,000
		7	6,559	1,644,013
		937	234,859	− 164,987
		7	6,608	
		944	241,467	
		7		
		951		
	1			

மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு: $x^3+951x^2+241467x-164987=0$ இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களை 10-ஆல் பெருக்கக் கிடைப்பது:

$$f_3(x)\equiv x^3+9510x^2+24146700x-164987000=0$$

$$f_3(6)=216+342360+14480200-164987000=-19764224=-$$

$$f_3(7)=343+465990+169026900-164987000=4506233=+$$

ஆகவே, $f_3(x)=0$-இன் மூலம் 6-க்கும் 7-க்குமிடையே யுள்ளது. அதாவது, $f(x)=0$-இன் மூலம் 3·176-க்கும் 3·177-க்குமிடையே

யுள்ளது. ஆகவே, இரண்டு தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாக $f(x)=0$-இன் நேர் மெய் மூலம் 3·18 ஆகும்.

மேலே விளக்கப்பட்டுள்ள கணக்கீடுகளை யெல்லாம் ஒரே பட்டியலிலேயே சேர்த்துச் சுருக்கமாகக் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடலாம்.

1	0	−6	−13	(3·176
	3	9	9	
	3	3	−4000	
	3	18	2191	
	6	2100	−1809000	
	3	91	1644013	
	90	2191	−164987000	
	1	92	145222776	
	91	228300	19764224	
	1	6559		
	92	234859		
	1	6608		
	930	24146700		
	7	57096		
	937	24203796		
	7	57132		
	944	24260928		
	7			
	9510			
	6			
	9516			
	6			
	9522			
	6			
	9528			

$f(x) \equiv x^3-6x-13=0$-இன் மூலம் $=3·18$ (இரு தசம இடங்கள்)

மாதிரி 15.

ஹோணரின் முறையைப் பயன்படுத்தி $x^3+x^2+x-100=0$-இன் நேர் மூலத்தை நான்கு தசம இடங்களுக்குக் கணக்கிடுக.

(சென்னை ’68 செப்.)

$f(x) \equiv x^3+x^2+x-100=0$ எனக்கொள்க.

$f(4) = 64+16+4-100=-16<0$

$f(5) = 125+25+5-100=55>0$

ஆகவே, $f(x)=0$-இன் நேர் மூலம் ஒன்று 4-க்கும் 5-க்குமிடையே யுள்ளது. மேலே கணக்கிடப்பட்ட முறையில் ஒரே பட்டியலில்

மூலத்தை நான்கு தசம இடங்களுக்குக் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடலாம்.

1	1	1	−100	(4·26443
		20	84	
	5	21	− 16000	
	4	36	11928	
	9	5700	− 4072000	
	4	264	3788376	
	130	5964	− 283624000	
	2	268	256071744	
	132	623200	− 27552256000	
	2	8196	25631441984	
	134	631396	− 1920714016000	
	2	8232		
	1360	63962800		
	6	55136		
	1366	64017936		
	6	55152		
	1372	6407308800		
	6	551696		
	13780	6407860496		
	4	551712		
	13784	640841220800		
	4			
	13788			
	4			
	137920			
	4			
	137924			
	4			
	137928			
	4			
	1379320			

ஆகவே, $f(x) \equiv x^3+x^2+x-100 = 0$ இன் நேர் மூலம் $= 4.26443$
$= 4.2644$ (நான்கு தசம இடங்களுக்கு)

மாதிரி 16

$x^3-2x+5 = 0$ இன் எதிர் மூலத்தை 3 தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

$f(x) = 0$ இன் எதிர் மூலங்கள் $f(-x) = 0$ இன் நேர் மூலங்களுக்குப் பெறுமானத்தைப் (Numerical value) பொறுத்த வரை

சமமாகும். ஆகவே, f (−x) இன் நேர் மூலத்தைக் கணக்கிட்டு, அம் மூலத்தின் எதிர் மதிப்பை f (x) = 0 இன் எதிர் மூலமாகக் கொள்ளவேண்டும்.

$$f(x) \equiv x^3 - 2x + 5 = 0$$

$$\therefore \quad f(-x) \equiv -x^3 + 2x + 5 = 0$$

அதாவது, $f(-x) \equiv x^3 - 2x - 5 = 0 \equiv F(x)$ எனக் கொள்க.

இப்பொழுது F (x) = 0 இன் நேர் மூலத்தை மூன்று தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் கணக்கிடவேண்டும்.

$$F(x) \equiv x^3 - 2x - 5 = 0$$

$$F(2) = 8 - 4 - 5 = -1 < 0$$

$$F(3) = 27 - 6 - 5 = 16 > 0$$

∴ F (x) = 0 இன் ஒரு நேர் மூலம் 2க்கும் 3க்குமிடையே யுள்ளது.

1	0	−2	−5	(2.09455
	2	4	4	
	2	2	−1000000	
	4	8	949329	
	2	100000	−50671000	
	600	5481	44517584	
	9	105481	−6153416000	
	609	5562	5578824625	
	9	11104300	−574591375000	
	618	25096		
	9	11129396		
	6270	25112		
	4	1115450800		
	6274	314125		
	4	1115764925		
	6278	314150		
	4	111607907500		
	62820			
	5			
	62825			
	5			
	62830			
	5			
	628350			

ஆகவே F(x) = 0 இன் நேர் மூலம் = 2.09455

$\therefore f(x) = 0$ இன் எதிர்மூலம் $= -2.09455$

$= -2.095$ (மூன்று தசம இடங்களுக்கு)

பயிற்சி 2

1. ஓணரின் முறைப்படி $x^3-x-9=0$ இன் மெய் மூலத்தை மூன்று தசம இடங்களுக்குப் பெறுக. (சென்னை '67 ஏப்.)

2. $x^3+6x=2$ இன் மெய்மூலத்தை மூன்று தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

3. $x^3+3x-1=0$க்கு ஒரே ஒரு மெய்மூலம்தான் உண்டு என்று காட்டுக. அம்மூலத்தை இரண்டு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

4. $x^3-3x+1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் 1க்கும் 2க்கு மிடையேயுள்ள மூலத்தை ஏழு தசம இடங்களுக்குக் காண்க. (சென்னை '62 செப்.)

5. $x^3-x-3=0$ இன் மெய் மூலத்தை 7 தசம இடங்களுக்குப் பெற ஓணரின் முறையைப் பயன்படுத்துக. (சென்னை '65 செப்.)

6. $x^3-2x-5=0$ இன் ஒரு மூலம் 2க்கும் 3க்குமிடையேயுள்ளது. ஓணரின் முறைப்படி அம் மூலத்தை ஏழு தசம இடங்களுக்குக் காண்க. (சென்னை '63 ஏப்.)

7. $x^3+3x^2+2x-5=0$ இன் நேர் மெய் மூலத்தை இரண்டு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

8. $x^3+3x^2+3x-1=0$ இன் மெய் மூலத்தை 3 தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

9. $4x^3+6x^2+x-3=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு மெய்மூலம்தான் உண்டு எனக் காட்டுக. அதன் மதிப்பை மூன்று தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

10. $x^3+3x^2-12x-11=0$ இன் நேர் மெய்மூலத்தை நான்கு தசம இடங்களுக்குக் காண்க. (சென்னை '65 ஏப்.)

11. $x^4-2x^3+x^2-3=0$ இன் மெய்மூலத்தை நான்கு தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகப் பெறுக.

12. ஓணரின் முறையைப் பயன்படுத்தி 20க்கும் 30க்கும் இடையேயுள்ள $x^3-4x^2+6x-20000=0$ இன் மூலத்தை ஆறு தசம இடங்களுக்குப் பெறுக. (சென்னை '62 ஏப்.)

13. $x^4-7x^2+18x-8=0$ இன் ஒரு மூலம் 0க்கும் 1க்குமிடையேயுள்ளது. ஓணரின் முறைப்படி அம்மூலத்தை 4 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் கணக்கிடுக.

14. 1க்கும் 2க்குமிடையேயுள்ள $x^4+4x^3-4x^2-11x+4=0$ இன் மூலத்தின் மதிப்பை நான்கு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

15. $x^3-7x+7=0$ இன் ஒரு மூலம் $\frac{3}{2}$க்கும் 2க்குமிடையேயுள்ளது. ஓணரின் முறைப்படி அதன் மதிப்பை நான்கு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

16. ஓணரின் முறையைப் பயன்படுத்தி $4x^3-13x^2-31x-275=0$ இன் 6க்கும் 7க்கு மிடையேயுள்ள மூலத்தை ஏழு தசம இடங்களுக்குப் பெறுக. (சென்னை '63 செப்.)

17. $x^4+12x+7=0$ இன் மூலம் -1க்கும் 0க்குமிடையேயுள்ளது. ஓணரின் முறைப்படி அதன் மதிப்பை 7 தசம இடங்களுக்குப் பெறுக.

18. $x^3-10=0$ இன் மெய்மூலத்தை 5 தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

19. ஓணரின் முறையைப் பயன்படுத்தி 30–இன் கனமூலத்தை (Cube root) ஏழு தசம இடங்களுக்குப் பெறுக.

20. 7.976 இன் கனமூலத்தை 9 தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

2.2 தொடர் கணிப்பு முறை (Method of Iteration)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள $f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டை முதலில் $x=\phi(x)$ என்ற அமைப்பில் மாற்றிக் கொள்ள வேண்டும். $f(x)=0$ இன் மூலம் a, b-க்கிடையே யிருப்பதாகக் கொள்வோம். a-க்கும் b-க்குமிடையே a_1 என்ற மூலத்தின் தோராய மதிப்பைப் பட்டறி முறையில் (method of trial and error) காணவேண்டும். பின்னர் $x=\phi(x)$ என்ற சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்தில் $x=a_1$ என்று பிரதியிட $x=\phi(a_1)$ என்ற மதிப்புக் கிடைக்கும். இது நாம் பெற வேண்டிய மூலத்தின் ஒரு தோராய மதிப்பாகும். இம் மதிப்பை a_2 என்று குறிப்பிடுவோம். இப்பொழுது $x=a_2$ என்று $\phi(x)$ இல் பிரதியிட $x=\phi(x)$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து $x=\phi(a_2)$ என்று கிடைக்கும். இது நாம் பெறவேண்டிய மூலத்தின் அடுத்த தோராய மதிப்பாகும். இம் மதிப்பை a_3 என்று குறிப்பிடுவோம். இம் முறையைத் தொடர்ந்து செய்துவந்தால், a-க்கும் b-க்குமிடையே a_1, a_2, a_3,......... என்ற அம் மூலத்தின் தோராய மதிப்புக்களின் தொடர் கிடைக்கும். இத் தொடரின் எல்லை α என்ருல் அது நாம் பெற வேண்டிய மூலத்தின் சிறந்த தோராய மதிப்பாகும்.

குறிப்பு 1.

$x=\phi(x)$ என்ற சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்தில் $x=a_1$ என்று பிரதியிடும்போது, $\phi(a_1)$ என்பது b-யைவிட அதிகமாயிருப்பின் அல்லது a-யைவிடக் குறைவாக யிருப்பின் இம் முறையைத் தொடர்ந்து செய்ய முடியாது. ஆகவே, $f(x)=0$ என்ற கொடுக்கப் பட்ட சமன்பாட்டை $x=\phi(x)$ என்ற அமைப்பில் நாம் மாற்றி யிருப்பது பொருந்தவில்லை என்று அறிந்து $f(x)=0$ஐ வேறு விதமாக $x=\phi_1(x)$ என்ற பொருத்தமான அமைப்பில் மாற்றிப் பின்னர் இம் முறையைச் செயல்படுத்த வேண்டும்.

குறிப்பு 2.

சில கணக்குகளில் a_1, a_2, a_3,......... என்பன நேர், எதிர் அடையாளங்களுடன் மாறி மாறி வரலாம். இத்தகைய சூழ்நிலை

களில் x-இன் அடுத்தடுத்த இரண்டு தோராய மதிப்புக்களின் கூட்டுச் சராசரியை (arithmetic mean) x-இன் மதிப்பாகக் கொண்டு மூலத்தின் தோராய மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டும்.

மாதிரி 17

$x^3-2x+0{\cdot}5=0$-இன் மிகச் சிறிய மூலத்தை ஐந்து தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க. (சென்னை '64 செப்.)

$$f(x)\equiv x^3-2x+0{\cdot}5=0 \text{ எனக் கொள்க.}$$

$$f(0)=0{\cdot}5>0$$

$$f(1)=-0{\cdot}5<0$$

ஆகவே, 0-க்கும் 1-க்குமிடையே ஒரு மூலம் உள்ளது.

மேலும் $f(0{\cdot}2)=0{\cdot}008-0{\cdot}4+0{\cdot}5=0{\cdot}108>0$

$f(0{\cdot}3)=0{\cdot}027-0{\cdot}6+0{\cdot}5=-0{\cdot}073<0$

ஆகவே, அந்த மூலம் 0·2க்கும் 0·3க்குமிடையே யுள்ளது.

இப்பொழுது, $x^3-2x+0{\cdot}5=0$

$$\therefore \quad 2x=x^3+0{\cdot}5$$

$$x=\tfrac{1}{2}(x^3+0{\cdot}5)\equiv\phi(x)$$

$\phi(x)$ இல் $x=0{\cdot}2$ என்று பிரதியிட,

$$x=\tfrac{1}{2}(0{\cdot}008+0{\cdot}5)=0{\cdot}254$$

$\therefore a_1=0{\cdot}25$ எனக் கொள்க.

மீண்டும் $\phi(x)$-இல் $x=0{\cdot}25$ எனப் பிரதியிட,

$$x=\tfrac{1}{2}(0{\cdot}015625+0{\cdot}5)=0{\cdot}2578$$

$\therefore a_2=0{\cdot}258$ எனக் கொள்க

மீண்டும் $\phi(x)$-இல் $x=0{\cdot}258$ என்று பிரதியிட,

$$x=\tfrac{1}{2}(0{\cdot}01704+0{\cdot}5)=0{\cdot}25852$$

$\therefore a_3=0{\cdot}2585$ எனக் கொள்க.

மீண்டும் $\phi(x)$-இல் $x=0{\cdot}2585$ என்று பிரதியிட,

$$x=\tfrac{1}{2}(0{\cdot}0172735+0{\cdot}5)=0{\cdot}25863$$

$\therefore a_4=0{\cdot}25863$ எனக் கொள்க.

மீண்டும் $\phi(x)$-இல் $x=0{\cdot}25863$ என்று பிரதியிட,

$$x=\tfrac{1}{2}(0{\cdot}0172996+0{\cdot}5)=0{\cdot}2586498$$

$\because a_5=0{\cdot}2586498$ எனக் கொள்க.

ஆகவே, $a_5=0{\cdot}2586498$ என்பது a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 என்ற தொடரின் எல்லையாகயிருப்பதால் $f(x)=0$-இன் மூலம் 0·2586498 என்று கொள்ளலாம். அதாவது, 0·25865 என்பது $f(x)=0$-இன் ஐந்து தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமான மூலமாகும்.

மாதிரி 18

$x^x=100$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலத்தை நான்கு தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகப் பெறுக.

$$f(x)\equiv x^x-100=0 \text{ எனக் கொள்க},$$
$$f(3)=27-100=-73<0$$
$$f(4)=256-100=156>0$$

ஆகவே, $f(x)=0$-இன் மூலம் 3-க்கும் 4-க்குமிடையேயுள்ளது. இப்பொழுது $x^x=100$

$$\therefore\ x=100^{1/x}\equiv\phi(x)$$

$x=3$ என்று பிரதியிட, $x=100^{1/3}=4{\cdot}641$. இது 4-ஐவிட அதிகமாயிருப்பதால் 3, 4 ஆகியவற்றின் கூட்டுச் சராசரியாகிய $\frac{3+4}{2}=3{\cdot}5$ ஐ a_1 ஆகக் கொண்டு $\phi(x)$-இல் பிரதியிடவும்.

$$\therefore\ x=100^{1/3\cdot5}$$
$$\therefore\ \log x=\frac{1}{3{\cdot}5}\cdot\log 100=\frac{2{\cdot}00}{3{\cdot}5}=0{\cdot}5714$$
$$\therefore\quad x=3{\cdot}727$$

ஆகவே $a_2=3{\cdot}72$ எனக் கொண்டு $a_3=\frac{a_1+a_2}{2}$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\ a_3=\frac{3{\cdot}5+3{\cdot}72}{2}=3{\cdot}61$$

இப்பொழுது $\phi(x)$-இல் $x=3{\cdot}61$ என்று பிரதியிட,

$$x=100^{1/3\cdot61}$$
$$\therefore\ \log x=\frac{1}{3{\cdot}61}\cdot\log 100=\frac{2{\cdot}00}{3{\cdot}61}=0{\cdot}5540$$
$$\therefore\quad x=3{\cdot}581=a_4 \text{ எனக் கொள்க.}$$

இப்பொழுது $a_5=\frac{a_3+a_4}{2}=\frac{3{\cdot}61+3{\cdot}581}{2}=3{\cdot}595$ எனக்கொண்டு $\phi(x)$ இல் $x=3{\cdot}595$ என்று பிரதியிட,

$$x=100^{1/3\cdot595}$$
$$\therefore\ \log x=\frac{1}{3{\cdot}595}\cdot\log 100=\frac{2{\cdot}000}{3{\cdot}595}=0{\cdot}5563$$
$$\therefore\quad x=3{\cdot}600=a_6 \text{ எனக் கொள்க.}$$

இப்பொழுது $a_7=\frac{a_5+a_6}{2}=\frac{3{\cdot}595+3{\cdot}600}{2}=3{\cdot}598$ எனக் கொண்டு $\phi(x)$-இல் $x=3{\cdot}598$ என்று பிரதியிட,

$$x=100^{1\ 3\cdot598}$$

$$\therefore \log x = \frac{1}{3\cdot598} \cdot \log 100 = \frac{2\cdot000}{3\cdot598} = 0\cdot5558$$

$\therefore \quad x = 3\cdot5958 = a_8$ எனக் கொள்க.

இப்பொழுது $a_9 = \frac{a_7 + a_8}{2} = \frac{3\cdot598 + 3\cdot5958}{2} = 3\cdot5969$ எனக் கொண்டு ϕ (x)-இல் $x = 3\cdot5969$ என்று பிரதியிட,

$$x = 100^{1/3.5969}$$

$$\therefore \log x = \frac{1}{3\cdot5969} \cdot \log 100 = \frac{2\cdot0000}{3\cdot5969} = 0\cdot5560$$

$\therefore \quad x = 3\cdot5975 = a_{10}$ எனக் கொள்க.

ஆகவே, $x = 3\cdot5975$ ஐ $f(x) = 0$ இன் மூலத்தின் தோராய மதிப்பாகக் கொள்ளலாம்.

மாதிரி 19

$y_{n+1} = 0\cdot5 - \log_{10} y_n$ என்ற சூத்திரத்தைத் தொடர் கணிப்பு முறையில் பயன்படுத்தி $y + \log_{10} y = 0\cdot5$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலத்தை நான்கு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

$f(y) \equiv y + \log_{10} y - 0\cdot5 = 0$ எனக் கொள்க

$$f(0\cdot5) = 0\cdot5 + \log_{10} 0\cdot5 - 0\cdot5 < 0$$

$$f(1) = 1 + \log_{10} 1 - 0\cdot5 < 0$$

ஆகவே, $f(y) = 0$ இன் ஒரு மூலம் $0\cdot5$ க்கும் 1 க்குமிடையேயுள்ளது.

$y_1 = 0\cdot5$ எனக் கொள்க.

இப்பொழுது $y_{n+1} = 0\cdot5 - \log_{10} y_n$ என்ற சூத்திரத்திலிருந்து

$$\begin{aligned} \therefore \quad y_2 &= 0\cdot5 - \log_{10} y_1 \\ &= 0\cdot5 - \log_{10} 0\cdot5 \\ &= 0\cdot5 - \bar{1}\cdot68897 \\ &= 0\cdot81103 \end{aligned}$$

$= 0\cdot81$ எனக் கொள்க.

ஆகவே $y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{0\cdot5 + 0\cdot81}{2} = 0\cdot655$ எனக் கொள்க.

மீண்டும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$\begin{aligned} y_4 &= 0\cdot5 - \log_{10} y_3 \\ &= 0\cdot5 - \log_{10} 0\cdot655 \\ &= 0\cdot5 - \bar{1}\cdot8162 \\ &= 0\cdot6838 \end{aligned}$$

ஆகவே, $y_5 = \frac{y_3 + y_4}{2} = \frac{0\cdot655 + 0\cdot6838}{2} = 0\cdot6694$ எனக் கொள்க.

மீண்டும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$y_6 = 0{\cdot}5 - \log_{10} y_5$$
$$= 0{\cdot}5 - \log_{10} 0{\cdot}6694$$
$$= 0{\cdot}5 - \bar{1}{\cdot}8257$$
$$= 0{\cdot}6743$$

ஆகவே, $y_7 = \frac{y_5 + y_6}{2} = \frac{0{\cdot}6694 + 0{\cdot}6743}{2} = 0{\cdot}6718$ எனக் கொள்க.

மீண்டும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$y_8 = 0{\cdot}5 - \log_{10} y_7$$
$$= 0{\cdot}5 - \log_{10} 0{\cdot}6718$$
$$= 0{\cdot}5 - \bar{1}{\cdot}8272$$
$$= 0{\cdot}6728$$

ஆகவே, $y_9 = \frac{y_7 + y_8}{2} = \frac{0{\cdot}6718 + 0{\cdot}6728}{2} = 0{\cdot}6723.$

இவ்வாறு மேலும் மேலும் தொடர்ந்து செய்ய 0·6723 என்பது $f(y) = 0$ இன் நான்கு தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமான மூலம் என்பதை அறியலாம்.

மாதிரி 20

$$P - \frac{P^3}{3} + \frac{P^5}{10} - \frac{P^7}{42} + \frac{P^9}{216} - \frac{P^{11}}{1320} + \ldots\ldots\ldots = 0{\cdot}4431135$$

என்ற சமன்பாட்டின் மெய் மூலத்தின் தோராய மதிப்பு 0·44 என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இரு தொடர் கணிப்பின் மூலம் தோராய மதிப்பைத் துல்லியப்படுத்துக. (சென்னை '69 செப்.)

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் சமன்பாட்டை,

$$P = 0{\cdot}4431135 + \frac{P^3}{3} - \frac{P^5}{10} + \frac{P^7}{42} - \frac{P^9}{216} + \frac{P^{11}}{1320} - \ldots\ldots\ldots (1)$$

என்று மாற்றி எழுதிக்கொள்க. இதன் வலப்பக்கம் $P = 0{\cdot}44$ என்று பிரதியிட,

$$P = 0{\cdot}4431135 + \frac{(0{\cdot}44)^3}{3} - \frac{(\cdot44)^5}{10} + \frac{(\cdot44)^7}{42} - \frac{(\cdot44)^9}{216} + \frac{(\cdot44)^{11}}{1320} - \ldots$$
$$= 0{\cdot}4431135 + 0{\cdot}028392 - 0{\cdot}0016490 + 0{\cdot}000076017$$
$$- 0{\cdot}0000028615 + 0{\cdot}00000009$$
$$= 0{\cdot}4699297$$

$\therefore P_1 = 0{\cdot}4699$ எனக் கொள்க.

இப்பொழுது, $P = 0{\cdot}4699$ என்று (1) இன் வலப்பக்கம் பிரதியிடவும்.

$$\text{ஆகவே, } P=0{\cdot}4431135+\frac{(\cdot4699)^3}{3}-\frac{(\cdot4699)^5}{10}+\frac{(\cdot4699)^7}{42}-\frac{(\cdot4699)^9}{216}+\frac{(\cdot4699)^{11}}{1320}-\ldots\ldots$$

$$=0{\cdot}4431135+0{\cdot}034585-0{\cdot}0022909+0{\cdot}00012045-0{\cdot}0000051714+0{\cdot}000000186$$

$$=0{\cdot}4755230$$

ஆகவே, இரண்டு தொடர்கணிப்பின் மூலம் சமன்பாட்டின் மூலத்தின் தோராய மதிப்பை நான்கு தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாக 0·4755 எனக் கொள்ளலாம்.

பயிற்சி 3

1. $x^5-x-0{\cdot}2=0$இன் மெய் மூலத்தைத் தொடர் கணிப்பு முறையில் நான்கு தசம இடங்களுக்குக் காண்க. (சென்னை '64 ஏப்.)

2. $x^3+x^2-100=0$இன் மெய் மூலத்தைத் தொடர் கணிப்பு முறையில் நான்கு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

3. $x^4-2x-11{\cdot}9=0$இன் ஒரு மூலத்தின் தோராய மதிப்பு 2 என்றால் தொடர் கணிப்பு முறையை மும்முறைச் செய்து அம்மூலத்தின் சரியான மதிப்பைக் காண்க.

4. $x^x+2x=6$ என்ற சமன்பாட்டின் மெய் மூலத்தை மூன்று தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

5. $x^x+5x=1000$இன் நேர் மெய் மூலத்தை நான்கு தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகத் தொடர் கணிப்பு முறையில் காண்க. (சென்னை '61 ஏப்.)

6. $1-x+\frac{x^2}{(2!)^2}-\frac{x^3}{(3!)^2}+\frac{x^4}{(4!)^2}-\ldots\ldots\ldots\ldots=0$ என்ற முடிவிலாத் தொடர் சமன்பாட்டின் மிகச் சிறிய மூலத்தைத் தொடர் கணிப்பு முறையில் காண்க. (சென்னை '69 செப்.)

7. $1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2.4^2}-\frac{x^6}{2^2.4^2.6^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots=0$ என்ற முடிவிலாத் தொடர் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலத்தின் தோராய மதிப்பு 2·4 என்றால் அம்மூலத்தின் சரியான மதிப்பை 3 தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகத் தொடர் கணிப்பு முறையில் காண்க. (சென்னை '68 செப்.)

2.3 நியூட்டன்-ராப்சன் முறை (Newton-Raphson Method)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை $f(x)=0$ எனக் கொள்க. இதன் ஒரு மூலம் a க்கும் b க்குமிடையே யிருப்பதாகக் கொள்வோம். ஆகவே, h என்பது ஒரு மிகச் சிறிய எண்ணுனால், $f(x)=0$ இன் அந்த மூலம் $a+h$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.

$$\therefore\ f(a+h)=0 \text{ ஆகும்.}$$

டெயிலரின் தேற்றத்தைக் (Taylor's theorem) கொண்டு இதை விரித்தெழுத :

$$f(a+h)\equiv f(a)+h\,f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots\ldots\ldots\ldots=0$$

இப்பொழுது, h மிகச் சிறியதாகையால், h^2ஐயும் அதற்கு மேற்பட்ட h இன்படிகளையும் புறக்கணித்தால்,

$$f(a+h)=f(a)+h\,f'(a)=0$$

$$\therefore\ h\,f'(a)=-f(a)$$

$$\therefore\ h=-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

ஆகவே, முதல் தோராயமாக அந்த மூலத்தின் மதிப்பு $=a+h$

$$=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

$=a_1$ எனக் கொள்க.

இப்பொழுது, இரண்டாவது தோராயமாக அம்மூலத்தின் மதிப்பை a_1+h_1 எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore\ f(a_1+h_1)=0$$

அதாவது, $f(a_1)+h_1\,f'(a_1)+\frac{h^2}{2!}f''(a_1)+\ldots\ldots\ldots\ldots=0$

h_1 மிகச் சிறியதாகையால், h_1^2ஐயும், அதற்கு மேற்பட்ட h_1இன் படிகளையும் புறக்கணித்த பின்,

$$f(a_1)+h_1\,f'(a_1)=0$$

$$\therefore\ h_1=-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$$

ஆகவே, இரண்டாவது தோராயமாக அம்மூலத்தின் மதிப்பு

$$=a_1+h_1$$

$$=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$$

$=a_2$ எனக்கொள்க.

இம்முறையை மேலும் மேலும் தொடர்ந்து செய்து வந்தால், அம்மூலத்தின் தோராய மதிப்புத் துல்லியத்தை நெருங்குவதைக் காணலாம்.

மாதிரி 21

நியூட்டன்—ராப்சன் முறையைப் பயன்படுத்தி $x^4-12x+7=0$ இன் 2க்கும் 3க்குமிடையேயுள்ள மூலத்தை மூன்று தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

$f(x)\equiv x^4-12x+7 = 0$ எனக் கொள்க.

$\therefore\quad f'(x)=4x^3-12 = 4\,(x^3-3)$

$f(x)=0$ இன் மூலம் 2க்கும் 3க்குமிடையேயிருப்பதால், $a=2$ எனக் கொண்டு, அந்த மூலத்தை $2+h$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\quad h = -\frac{f(2)}{f'(2)}$$

இங்கு, $f(2)=16-24+7 = -1$

$f'(2) = 4\,(8-3) = 20$

$$\therefore\ h = -\frac{(-1)}{20} = \frac{1}{20}=0{\cdot}05$$

ஆகவே, $f(x) = 0$ இன் மூலத்தின் முதல் தோராயம் $= 2+0{\cdot}05$
$= 2{\cdot}05$
$= a_1$ எனக் கொள்க.

இரண்டாவது தோராயமாக மூலத்தை $a_1+h_1 = 2{\cdot}05+h_1$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\ h_1 = -\frac{f(2{\cdot}05)}{f'(2{\cdot}05)}$$

இங்கு $f(2{\cdot}05) = (2{\cdot}05)^4-12\,(2{\cdot}05)+7$
$= 17{\cdot}661 - 24{\cdot}60 + 7$
$= 0{\cdot}061$

$f'(2{\cdot}05) = 4\,[(2{\cdot}05)^3-3]$
$= 4\,(8{\cdot}615125-3)$
$= 22{\cdot}4605$

ஆகவே, $h = -\dfrac{0{\cdot}061}{22{\cdot}4605} = -0{\cdot}0027.$

ஆகவே, மூலத்தின் இரண்டாவது தோராய மதிப்பு $=2{\cdot}05-0{\cdot}0027$
$= 2{\cdot}0473$

ஆகவே, மூன்று தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாக $f(x) = 0$ இன் மூலத்தின் மதிப்பு $= 2{\cdot}047$.

மாதிரி 22

நியூட்டன்—ராப்சன் முறைப்படி $x-2\,\mathrm{Sin}\,x = 0$ இன் நேர் மூலத்தைக் காண்க.

$f(x) \equiv x - 2 \text{ Sin } x = 0$ எனக் கொள்க.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2.$$

$$= 1{\cdot}57 - 2 < 0 \left(\text{ஏனெனில், } \pi = \frac{22}{7} \therefore \frac{\pi}{2} = 1{\cdot}57\right)$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\frac{\pi}{3} - 2 \text{ Sin } \frac{2\pi}{3}$$

$$= 2{\cdot}094 - 1{\cdot}732 > 0$$

ஆகவே, $f(x) = 0$ இன் ஒரு மூலம் $\frac{\pi}{2}$ க்கும் $\frac{2\pi}{3}$ க்குமிடையே யுள்ளது.

அதாவது, $x = 1{\cdot}57$ க்கும் $x = 2{\cdot}094$க்குமிடையேயுள்ளது.
ஆகவே, அம் மூலத்தை $1{\cdot}5 + h$ எனக் கொள்க.

$$\therefore h = -\frac{f(1{\cdot}5)}{f'(1{\cdot}5)}$$

இங்கு, $f(1{\cdot}5) = 1{\cdot}5 - 2 \text{ Sin } 1{\cdot}5$

$= 1{\cdot}5 - 2 \text{ Sin } 86°$ (திரிகோணக் கணித அட்டவணை யிலிருந்து)

$$= 1{\cdot}5 - 2\,(0{\cdot}99756)$$

$$= -0{\cdot}49512$$

இப்பொழுது $f'(x) = 1 - 2 \cos x$

$$\therefore f'(1{\cdot}5) = 1 - 2 \cos 86°$$

$$= 1 - 2\,(0{\cdot}06976)$$

$$= 0{\cdot}86048$$

$$\therefore \quad h = -\frac{(-0{\cdot}49512)}{0{\cdot}86048} = 0{\cdot}5753$$

ஆகவே, முதல் தோராயமாக மூலத்தின் மதிப்பு $= 1{\cdot}5 + 0{\cdot}5753 = 2{\cdot}0753$ ஆகும். ஆகவே, இரண்டாவது தோராயமாக மூலத்தின் மதிப்பை $2{\cdot}07 + h_1$ எனக் கொள்க.

$$\therefore h_1 = -\frac{f(2{\cdot}07)}{f'(2{\cdot}07)}$$

ஆனல் $2{\cdot}07$ ஆரையளவு (radian)க்குரிய பாகையளவு$= 118°\ 39'$

$$\therefore f(2{\cdot}07) = 2{\cdot}07 - 2 \text{ Sin } 118°\ 39'$$

$$= 2{\cdot}07 - 1{\cdot}75512$$

$$= 0{\cdot}31488$$

$$f'(2{\cdot}07) = 1-2\cos 118^\circ 39' = 1+0{\cdot}95892 = 1{\cdot}95892$$

$$\therefore\ h_1 = -\frac{0{\cdot}31488}{1{\cdot}95892} = -\ 0{\cdot}16076.$$

ஆகவே, இரண்டாவது தோராயமாக மூலத்தின்

$$\text{மதிப்பு} = 2{\cdot}07-0{\cdot}16076 = 1{\cdot}90924.$$

இப்பொழுது, மூன்ருவது தோராயமாக மூலத்தின் மதிப்பை $1{\cdot}90+h_2$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\ h_2 = -\frac{f(1{\cdot}90)}{f'(1{\cdot}90)}$$

ஆனுல் $1{\cdot}90$ ஆரையளவுக்குரிய பாகையளவு $= 108^\circ\ 54'$

$$\therefore\ f(1{\cdot}90) = 1{\cdot}90-2\ \text{Sin}\ 108^\circ 54' = 1{\cdot}90-1{\cdot}89218 = 0{\cdot}00782$$

$$f'(1{\cdot}90) = 1-2\cos 108^\circ 54' = 1+0{\cdot}32392 = 1{\cdot}32392$$

$$\therefore\ h_2 = -\frac{0{\cdot}00782}{1{\cdot}32392} = -\ 0{\cdot}0059$$

ஆகவே, மூன்ருவது தோராயமாக மூலத்தின்

$$\text{மதிப்பு} = 1{\cdot}90-0{\cdot}0059 = 1{\cdot}8941$$

இப்பொழுது நான்காவது தோராயமாக மூலத்தின் மதிப்பை $1{\cdot}89 + h_3$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\ h_3 = -\frac{f(1{\cdot}89)}{f'(1{\cdot}89)}$$

ஆனுல் $1{\cdot}89$ ஆரையளவுக்குரிய பாகையளவு $= 108^\circ\ 20'$

$$\therefore\ f(1{\cdot}89) = 1{\cdot}89-2\ \text{Sin}\ 108^\circ 20' = 1{\cdot}89-1{\cdot}89922 = -0{\cdot}00922$$

$$f'(1{\cdot}89) = 1-2\cos 108^\circ 20' = 1+0{\cdot}62908 = 1{\cdot}62908$$

$$\therefore\ h_3 = -\frac{(-0{\cdot}00922)}{1{\cdot}62908} = 0{\cdot}0056$$

ஆகவே, நான்காவது தோராயமாக மூலத்தின்

$$\text{மதிப்பு} = 1{\cdot}89 + 0056$$
$$= 1{\cdot}8956$$

எனவே, $x = 1{\cdot}8956$ என்பதை $f(x) = 0$ இன் மூலத்தின் சிறந்த தோராய மதிப்பாகக் கொள்ளலாம்.

மாதிரி 23

$x \log_e x = 1{\cdot}2$ என்ற சமன்பாட்டின் மெய் மூலத்தைக் கணக்கிடுக. (சென்னை '69 ஏப்.)

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$x \log_{10} x . \ \log_e 10 = 1{\cdot}2$$
$$\therefore \ x \log_{10} x = \frac{1{\cdot}2}{\log_e 10} = 1{\cdot}2 \times \log_{10} e = 1{\cdot}2 \times 0{\cdot}4343$$
$$= 0{\cdot}52116$$

இப்பொழுது, $f(x) \equiv x \log_{10} x - 0{\cdot}52116 = 0$ எனக் கொள்க.

$$f(1{\cdot}8) = 1{\cdot}8 \log_{10} 1{\cdot}8 - 0{\cdot}52116$$
$$= 1{\cdot}8\,(0{\cdot}25527) - 0{\cdot}52116$$
$$= 0{\cdot}459486 - 0{\cdot}52116$$
$$= -0{\cdot}061674 < 0.$$

$$f(1{\cdot}9) = 1{\cdot}9 \log_{10} 1{\cdot}9 - 0{\cdot}52116$$
$$= 1{\cdot}9\,(0{\cdot}27875) - 0{\cdot}52116$$
$$= 0{\cdot}529625 - 0{\cdot}52116 > 0$$

ஆகவே, $f(x) = 0$ இன் ஒரு மூலம் 1·8க்கும் 1·9க்குமிடையே யுள்ளது. முதல் தோராயமாக, அந்த மூலத்தின் மதிப்பை $1{\cdot}8 + h_1$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \ h_1 = \frac{f(1{\cdot}8)}{f'(1{\cdot}8)}$$

இப்பொழுது, $f'(x) = \log_{10} e\,(1 + \log_e x) = 0{\cdot}4343 + \log_{10} x$

$$\therefore \ f'(1{\cdot}8) = 0{\cdot}4343 + \log_{10} 1{\cdot}8$$
$$= 0{\cdot}4343 + 0{\cdot}25527$$
$$= 0{\cdot}68957$$

மேலும் $f(1{\cdot}8) = -0{\cdot}061674$ என்று கண்டோம்.

ஆகவே, $$h_1 = -\frac{(-0{\cdot}061674)}{0{\cdot}68957} = 0{\cdot}0894$$

ஆகவே, f (x) = 0 இன் மூலத்தின் முதல் தோராய

$$\text{மதிப்பு} = 1.8+00894 = 1.8894$$

இப்பொழுது, இரண்டாவது தோராயமாக மூலத்தின் மதிப்பை $1.889+h_2$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad h_2 = \frac{f(1.889)}{f'(1.889)}$$

இங்கு,
$$\begin{aligned} f(1.889) &= 1.889 \log_{10} 1.889 - 0.52116 \\ &= 1.889\,(0.27624) - 0.52116 \\ &= 0.52167 - 0.52116 \\ &= 0.00051 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1.889) &= 0.4343 + \log_{10} 1.889 \\ &= 0.4343 + 0.27624 \\ &= 0.71054 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad h_2 = -\frac{0.00051}{0.71054} = -0.000718$$

ஆகவே, இரண்டாவது தோராயமாக மூலத்தின்

$$\text{மதிப்பு} = 1.889 - 0.000718 = 1.888282.$$

ஆகவே, 1.888 என்பதை f (x) = 0 இன் மூன்று தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமான மூலமாகக் கொள்ளலாம்.

2.4 இரு மாறிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க நியூட்டன்-ராப்சன் முறை

$f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ என்பன x, y ஆகிய இரு மாறிகளைக் கொண்ட இரண்டு சமன்பாடுகள் எனக் கருதுக. x_1, y_1 என்பன முறையே x, y ஆகியவற்றின் தோராய மதிப்புக்களானல் அவற்றின் சரியான மதிப்புக்களை x_1+h, y_1+k என்று எழுதலாம். இம் மதிப்புக்களைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளில் பிரதியிட்டு, டெயிலர் தேற்றத்தின் (Taylor's Theorem) உதவியால் விரித்தெழுத, கீழ்க் கண்ட சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$f_1(x_1+h, y_1+k) \equiv f_1(x_1, y_1) + \left(h\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + k\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$f_2(x_1+h, y_1+k) \equiv f_2(x_1, y_1) + \left(h\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + k\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

இரண்டாவதும் அதற்கு மேற்பட்ட h, k-இன் படிகளைப் புறக் கணித்துவிட்டால் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$f_1(x_1, y_1)+h\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+k\frac{\partial f_1}{\partial y_1}=0$$

$$f_2(x_1, y_1)+h\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+k\frac{\partial f_2}{\partial y_1}=0$$

அல்லது, $$h\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+k\frac{\partial f_1}{\partial y_1}=-f_1(x_1, y_1) \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$h\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+k\frac{\partial f_2}{\partial y_1}=-f_2(x_1, y_1) \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

(1) ஐ $\frac{\partial f_2}{\partial y_1}$ ஆலும், (2) ஐ $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}$ ஆலும் பெருக்கிக் கழிக்க,

$$h=\frac{f_2(x_1, y_1)\frac{\partial f_1}{\partial y_1}-f_1(x_1, y_1)\frac{\partial f_2}{\partial y_1}}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y_1}-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y_1}}$$

இதுபோலவே, $$k=\frac{f_1(x_1, y_1)\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-f_2(x_1, y_1)\frac{\partial f_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y_1}-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y_1}}$$

ஆகவே, சமன்பாடுகளின் மூலத்தின் தோராய மதிப்பை $x=x_1+h$, $y=y_1+k$ என்ற தொடர்புகளிலிருந்து அறியலாம். இம் முறையை மேலும் மேலும் தொடர்ந்து செய்தால் மூலத்தின் மதிப்பைத் தேவையான தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காணலாம்.

மாதிரி 24

$$x^3+2y^2=1,$$
$$5y^3+x^2-2xy=4$$

என்ற சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தோராய மதிப்புக்கள் $x=-0{\cdot}6494$, $y=0{\cdot}7981$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. நியூட்டனின் முறையை ஒரு முறை பயன்படுத்தி x, y ஆகியவற்றின் திருத்த மதிப்புக்களைக் காண்க. (சென்னை '61 ஏப்.)

இங்கு, $$f_1(x, y)\equiv x^3+2y^2-1=0$$
$$f_2(x, y)\equiv 5y^3+x^2-2xy-4=0$$

$$\therefore \frac{\partial f_1}{\partial x}=3x^2; \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}=4y$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}=2x-2y=2(x-y); \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}=15y^2-2x$$

இப்பொழுது, $x_1 = -0{\cdot}6494,\ y_1 = 0{\cdot}7981$

$$\therefore\ f_1(x_1, y_1) = (-0{\cdot}6494)^3 + 2\,(0{\cdot}7981)^2 - 1$$
$$= -0{\cdot}27384 + 2\,(0{\cdot}63695) - 1$$
$$= -0{\cdot}27384 + 1{\cdot}27390 - 1$$
$$= 0{\cdot}00006.$$

$$f_2(x_1, y_1) = 5\,(0{\cdot}7981)^3 + (-0{\cdot}6494)^2 - 2\,(-0{\cdot}6494)\,(0{\cdot}7981) - 4$$
$$= 2{\cdot}54195 + 0{\cdot}42170 + 1{\cdot}03642 - 4$$
$$= 0{\cdot}00007$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 3\,(-0{\cdot}6494)^2 = 3\,(0{\cdot}42170) = 1{\cdot}26510$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 4\,(0{\cdot}7981) = 3{\cdot}1924$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2\,(-0{\cdot}6494 - 0{\cdot}7981) = -2{\cdot}8950$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 15\,(0{\cdot}7981)^2 - 2\,(-0{\cdot}6494)$$
$$= 15\,(0{\cdot}63695) + 1{\cdot}2988$$
$$= 10{\cdot}85305$$

ஆகவே,
$$h = \frac{f_2(x_1, y_1)\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} - f_1(x_1, y_1)\dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} - \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}}$$

$$= \frac{(0{\cdot}00007)\,(3{\cdot}1924) - (0{\cdot}00006)\,(10{\cdot}85305)}{(1{\cdot}26510)\,(10{\cdot}85305) - (-2{\cdot}8950)\,(3{\cdot}1924)}$$

$$= \frac{0{\cdot}00022346 - 0{\cdot}00065103}{13{\cdot}725 + 9{\cdot}2406}$$

$$= \frac{-0{\cdot}00042757}{22{\cdot}9656}$$

$$= \underline{-0{\cdot}000016}$$

$$k = \frac{f_1(x_1, y_1)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - f_2(x_1, y_1)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} - \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}}$$

$$= \frac{(0{\cdot}00006)\,(-2{\cdot}8950) - (0{\cdot}00007)\,(1{\cdot}26510)}{22{\cdot}9656}$$

$$=\frac{-0{\cdot}000173700-0{\cdot}0000885570}{22{\cdot}9656}$$

$$=\frac{-0{\cdot}0002623}{22{\cdot}9656}$$

$$=\underline{-0{\cdot}0000114}$$

$\therefore\ x=x_1+h=-0{\cdot}6494-0{\cdot}000016=-0{\cdot}649416$

$y=y_1+k=0{\cdot}7981-0{\cdot}0000114=0{\cdot}7980886$

ஆகவே, சமன்பாடுகளின் தீர்வு : $x=-0{\cdot}649416$

$y=0{\cdot}798088$

2.5 தொடர் கணிப்பு முறையில் வர்க்க மூலம் காணல்

N என்ற நேரெண்ணின் வர்க்க மூலம் x எனக் கொள்க.

$$\therefore\ x=\sqrt{N}$$

அல்லது $x^2=N$

அதாவது, $x^2-N=0$

ஆகவே, $f(x)\equiv x^2-N=0$ எனக் கொள்க.

$$\therefore f'(x)=2x$$

$f(x)=0$ இன் தோராய மூலம் a என்ருல், அதன் சரியான மதிப்பு $a+h$ என்ற வடிவில் இருக்கும். ஆனுல், நியூட்டன்-ராப்சன் முறைப்படி

$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)}=-\frac{a^2-N}{2a}$$

ஆகவே, மூலத்தின் முதல் தோராய மதிப்பு $=a+h$

$$=a-\frac{a^2-N}{2a}$$

$$=\frac{a^2+N}{2a}=\tfrac{1}{2}\left(a+\frac{N}{a}\right)$$

இந்த முதல் தோராய மதிப்பை a_1 எனக் கொள்க.

$$\text{அதாவது, } a_1=\tfrac{1}{2}\left(a+\frac{N}{a}\right)$$

இப்பொழுது இரண்டாவது தோராயமாக மூலத்தின் மதிப்பை $a_1+h_1\ (=a_2)$ எனக் கொண்டால், மேற்கண்ட முறைப்படி

$$a_2=\tfrac{1}{2}\left(a_1+\frac{N}{a_1}\right) \text{ ஆகும்.}$$

இதுபோல், a_3, a_4,... என்பன முறையே மூலத்தின் மூன்ருவது, நான்காவது,... தோராய மதிப்புக்களாஞல்,

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{N}{a_2}\right)$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{N}{a_3}\right)$$

... ... ஆகும்.

இவ்வாறு கிடைக்கப்பெற்ற a, a_1, a_2, a_3, a_4,...... என்ற எல்லை $x^2 - N = 0$ இன் சரியான மூலமாகும். அதாவது N-இன் வர்க்க மூலமாகும்.

மாதிரி 25

15-இன் வர்க்க மூலத்தை மூன்று தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

$$x = \sqrt{15}$$

$$\therefore f(x) \equiv x^2 - 15 = 0$$

$$f(3) = 9 - 15 = -6 < 0$$

$$f(4) = 16 - 15 = 1 > 0$$

ஆகவே, $f(x) = 0$ இன் ஒரு மூலம் 3க்கும் 4க்குமிடையேயுள்ளது. எனவே, $a = 3$ எனக் கொள்க.

$$\therefore a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{N}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{15}{3}\right) = 4$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{N}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{15}{4}\right) = 3{\cdot}875$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{N}{a_2}\right) = \frac{1}{2}\left(3{\cdot}875 + \frac{15}{3{\cdot}875}\right) = 3{\cdot}873$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{N}{a_3}\right) = \frac{1}{2}\left(3{\cdot}873 + \frac{15}{3{\cdot}873}\right) = 3{\cdot}873$$

ஆகவே, $\sqrt{15} = 3{\cdot}873$.

பயிற்சி 4

1. நியூட்டன்—ராப்சன் முறையில் $x^3 - 2x - 5 = 0$ இன் மெய் மூலத்தை 5 தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க. (சென்னை 64 ஏப்.)

2. நியூட்டனின் முறையில் $x^3 - 3x - 4 = 0$ இன் மெய் மூலத்தைக் காண்க. (மதுரை '70 ஏப்.)

3. நியூட்டனின் முறையைப் பயன்படுத்தி $x^4-12x+7=0$ இன் மூலத்தை 3 தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

4. $x^4-2x-11{\cdot}9=0$ இன் நேர் மூலத்தை நான்கு தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் கணக்கிடுக. (சென்னை '67 ஏப்.)

5. $x^3-7x+0{\cdot}5=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மிகச் சிறிய நேர் மூலத்தை ஐந்து தசம இடங்களுக்குக் கணக்கிடுக. (சென்னை '64 செப்.)

6. $x^3-4x^2-x+3=0$ இன் மிகப் பெரிய மெய் மூலத்தை மூன்று தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

7. 4·3ஐ தோராய மதிப்பாகக் கொண்ட $x^4+x^2+x-100=0$ இன் மூலத்தை நான்கு தசம இடங்களுக்குக் காண்க. (சென்னை '62 ஏப்.)

8. $x^3-0{\cdot}4x^2+0{\cdot}06x-20=0$ இன் ஒரு மூலம் 2க்கும் 3க்கும் இடையேயுள்ளது. நியூட்டன்—ராப்சன் முறையில் அம் மூலத்தை ஐந்து தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

9. $x^3-x^2-x-2000=0$ இன் மெய்மூலத்தை ஐந்து தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

10. 0 க்கும் 1 க்குமிடையேயுள்ள $x^4+x^3-x^2-10x+1=0$ இன் மூலத்தை நான்கு தசம இடங்களுக்குத் துல்லியமாகக் கணக்கிடுக.

11. $x^4+4x^3-4x^2-11x+4=0$ இன் ஒரு மூலம் 1க்கும் 2க்கும் இடையேயுள்ளது. நியூட்டனின் முறையைப் பயன்படுத்தி அம் மூலத்தின் மதிப்பை எட்டு தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் காண்க.

12. $f(x)\equiv x^3+4x^2-7=0$ இன் ஒரு மூலம் -2க்கும் -1க்கும் இடையேயுள்ளது. நியூட்டனின் முறையில் அம் மூலத்தின் மதிப்பை ஏழு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

13. இரண்டுக்கும் மூன்றுக்குமிடையேயுள்ள $x^3-x-9=0$ இன் மூலத்தை ஒன்பது தசம இடங்களுக்குக் கணக்கிடுக.

14. $x^3-111=0$ இன் மெய் மூலத்தை 10 தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

15. $f(x)\equiv x^4-12x^2+12x-3=0$ இன் எதிர் மூலத்தை ஏழு தசம இடங்களுக்குப் பெறுக.

16. $x^3-6x-13=0$ இன் நேர் மூலத்தை ஒன்பது தசம இடங்களுக்குப் பெறுக.

17. $x^3+2x^2-23x-70=0$ இன் நேர் மூலத்தைப் பத்து தசம இடங்கள் வரைக் கணக்கிடுக.

18. நியூட்டனின் முறையைப் பயன்படுத்தி 9க்கும் 10க்கும் இடையேயுள்ள $x^4-3x^2+75x-10{,}000=0$ இன் மூலத்தை நான்கு தசம இடங்களுக்குக் காண்க. (சென்னை '62 செப்.)

19. $x-\sin x=2$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் 2க்கும் 3க்குமிடையேயுள்ளது. நியூட்டனின் முறையைப் பயன்படுத்தி அம் மூலத்தை ஆறு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

20. நியூட்டன்—ராப்சன் முறையில் $2x-3\sin x=5$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலத்தை ஆறு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

21. நியூட்டன்—ராப்சன் முறையில் $3x-\text{Cos } x-1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மெய் மூலத்தைக் காண்க. (சென்னை '69 செப்.)

22. நியூட்டன் முறையில் $x=\text{Sin } x+\frac{\pi}{2}$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலத்தை மூன்று தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

23. $x \tan x=1\cdot28$ என்ற சமன்பாட்டின் மிகச் சிறிய நேர் மூலத்தை நான்கு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

24. $x^2+4 \text{ Sin } x=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மெய் மூலத்தை நான்கு தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

25. $x+\log_{10}x=0\cdot5$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலத்தை நான்கு தசம இடங்களுக்குக் கணக்கிடுக.

26. $\log_{10}x=2x-7$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

27. $x \log_{10}x=-0\cdot125$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலத்தை ஐந்து தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

28. $x \log_e x = 18$ என்ற சமன்பாட்டின் நேர் மூலத்தைக் காண்க.

29. நியூட்டன் முறையில் $e^x-1=2x$ என்ற சமன்பாட்டின் நேர் மூலத்தை நான்கு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

30. $e^x=4x$ என்ற சமன்பாட்டின் நேர் மூலத்தை நியூட்டனின் முறையை இருமுறைப் பயன்படுத்திக் காண்க. (சென்னை 67 ஏப்.)

31. கீழ்க்கண்ட எண்களின் வர்க்க மூலங்களைத் தொடர் கணிப்பு முறையில் நான்கு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

(i) 10 (ii) 47 (iii) 7·4.

32. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும் :

$$4\cdot2\, x^2+8\cdot8y^2=1\cdot42$$
$$(x-1\cdot2)^2+(y-0\cdot6)^2=1$$

மூலத்தின் தோராய மதிப்பு : $x=0\cdot226,\ y=0\cdot369$

2·6 தொடர் கணிப்பு முறையில் மூன்று மாறிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் (Iteration method for solution of equations in three unknowns).

தொடர் கணிப்பு முறையில் மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளையுடைய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறைகள் கீழ்க்காணும் மாதிரிக் கணக்குகளில் விளக்கப்பட்டுள்ளன.

மாதிரி 26

தொடர் கணிப்பு முறையில் கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

$$\begin{aligned} 27x + 6y - z &= 85 \\ 6x + 15y + 2z &= 72 \\ x + y + 54z &= 110 \end{aligned}$$

இச் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் அதிக மதிப்புள்ள குணகத்தைப் பெற்றிருக்கும் மாறியை மற்ற மாறிகளின் சார்பலனுக மாற்றி எழுதவும். உதாரணமாக, முதல் சமன்பாட்டில் x-இன் குணகமாகிய 27 மற்ற மாறிகளின் குணகங்களை விடப் பெரியதாக யிருக்கிறது. ஆகவே, xஐ y, z ஆகிய மாறிகளின் சார்பலனுக எழுத வேண்டும்.

$$27x = 85-6y+z$$

$$\therefore x = \tfrac{1}{27}(85-6y+z) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இதுபோல, இரண்டாவது சமன்பாட்டிலிருந்து

$$y = \tfrac{1}{15}(72-6x-2z) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்றும், மூன்ருவது சமன்பாட்டிலிருந்து

$$z = \tfrac{1}{54}(110-x-y) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

என்றும் கிடைக்கின்றன. இப்பொழுது, சமன்பாடு (1) இல் $y = 0$, $z = 0$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore \quad x = \tfrac{1}{27}(85) = 3{\cdot}15$$

இப்பொழுது சமன்பாடு (2) இல் $x = 3{\cdot}15$, $z = 0$ என்று பிரதி யிடவும்.

$$\therefore \quad y = \tfrac{1}{15}(72-6\times3{\cdot}15-0)$$
$$= \tfrac{1}{15}(72-18{\cdot}90)$$
$$= \tfrac{1}{15}(53{\cdot}10) = 3{\cdot}54.$$

பின்னர், சமன்பாடு (3) இல் $x = 3{\cdot}15$, $y = 3{\cdot}54$ என்று பிரதி யிடவும்.

$$\therefore z=\tfrac{1}{54}(110-3{\cdot}15-3{\cdot}54)$$
$$=\tfrac{1}{54}(103{\cdot}31)=1{\cdot}91$$

x_1, y_1, z_1 என்பன x, y, z ஆகியவற்றின் முதல் தோராய மதிப்புக் களைக் குறிப்பிட்டால்,

$x_1=3{\cdot}15$, $y_1=3{\cdot}54$, $z_1=1{\cdot}91$ ஆகும். இப்பொழுது $y=y_1=3{\cdot}54$, $z=z_1=1{\cdot}91$ என்று y, z ஆகியவற்றின் முதல் கணிப்பு மதிப்புக்களை சமன்பாடு (1) இல் பிரதியிட்டு x இன் இரண்டாம் கணிப்பு மதிப்பு x_2ஐப் பெறலாம்.

$$\therefore x_2=\tfrac{1}{27}(85-6\times3{\cdot}54+1{\cdot}91)$$
$$=\tfrac{1}{27}(85-21{\cdot}24+1{\cdot}91)$$
$$=\tfrac{1}{27}(65{\cdot}67)=2{\cdot}432$$

இப்பொழுது, $x=x_2=2{\cdot}432$, $z=z_1=1{\cdot}91$ ஆகிய மதிப்புக்களைச் சமன்பாடு (2) இல் பிரதியிட்டு $y=y_2$ என்ற yஇன் இரண்டாம் கணிப்பு மதிப்பைப் பெறலாம்.

$$\therefore\ y_2=\tfrac{1}{15}(72-6\times 2\cdot432-2\times 1\cdot91)$$
$$=\tfrac{1}{15}(72-14\cdot592-3\cdot82)$$
$$=\tfrac{1}{15}(53\cdot588)=3\cdot572$$

பின்னர், $x=x_2=2\cdot432, y=y_2=3\cdot572$ என்ற மதிப்புக்களைச் சமன்பாடு (3) இல் பிரதியிட்டு $z=z_2$ என்ற z-இன் இரண்டாம் கணிப்பு மதிப்பைப் பெறலாம்.

$$\therefore\ z_2=\tfrac{1}{54}(110-2\cdot432-3\cdot572)$$
$$=\tfrac{1}{54}(103\cdot996)=1\cdot925$$

ஆகவே, x, y, z ஆகியவற்றின் இரண்டாம் கணிப்பு மதிப்புக்கள் $x_2=2\cdot432$, $y_2=3\cdot572$, $z_2=1\cdot925$ ஆகும்.

இப்பொழுது, மீண்டும் $y=y_2=3\cdot572$, $z=z_2=1\cdot925$ ஆகிய மதிப்புக்களை சமன்பாடு (1) இல் பிரதியிட்டு $x=x_3$ என்ற x-இன் மூன்றும் கணிப்பு மதிப்பைப் பெறலாம்.

$$\therefore\ x_3=\tfrac{1}{27}(85-6\times 3\cdot572+1\cdot925)$$
$$=\tfrac{1}{27}(85-21\cdot432+1\cdot925)$$
$$=\tfrac{1}{27}(65\cdot493)=2\cdot4256.$$

இதுபோல்,
$$y_3=\tfrac{1}{15}(72-6\times 2\cdot4256-2\times 1\cdot925)$$
$$=\tfrac{1}{15}(53\cdot5964)=3\cdot5731$$
$$z_3=\tfrac{1}{54}(110-2\cdot4256-3\cdot5731)$$
$$=\tfrac{1}{54}(104\cdot0013)=1\cdot9259$$

ஆகவே, மூன்றும் கணிப்பு மதிப்புக்கள்

$x_3=2\cdot4256$, $y_3=3\cdot5731$, $z_3=1\cdot9259$ ஆகும்.

இதுபோலவே,

$$x_4=\tfrac{1}{27}(85-6\times 3\cdot5731+1\cdot9259)$$
$$=\tfrac{1}{27}(85-21\cdot4386+1\cdot9259)$$
$$=\tfrac{1}{27}(65\cdot4873)=2\cdot4254$$
$$y_4=\tfrac{1}{15}(72-6\times 2\cdot4254-2\cdot19259)$$
$$=\tfrac{1}{15}(72-14\cdot5524-3\cdot8518)$$
$$=\tfrac{1}{15}(53\cdot5958)=3\cdot57305$$
$$z_4=\tfrac{1}{54}(110-2\cdot4254-3\cdot57305)$$
$$=\tfrac{1}{54}(104\cdot00155)=1\cdot92595$$

ஆகவே, $x=2\cdot425$, $y=3\cdot573$, $z=1\cdot926$ ஆகிய மதிப்புக்களை மூன்று தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமான மதிப்புக்களாகக் கொள்ளலாம்.

2·7 தொடர்கணிப்பு முறையில் நான்கு மாறிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் (Interation method for solution of equations in four unknowns)

மாதிரி 27

தொடர்கணிப்பு முறையில் கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

$$3\cdot122\,x + 0\cdot5756\,y - 0\cdot1565\,z - 0\cdot0067t = 1\cdot571$$
$$0\cdot5756\,x + 2\cdot938\,y + 0\cdot1103\,z - 0\cdot0015t = -0\cdot9275$$
$$-0\cdot1565\,x + 0\cdot1103\,y + 4\cdot127\,z + 0\cdot2051t = -0\cdot0652$$
$$-0\cdot0067\,x - 0\cdot0015\,y + 0\cdot2051\,z + 4\cdot133t = -0\cdot0178$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளிலிருந்து x, y, z, t ஆகிய மாறிகள் ஒவ்வொன்றையும் மற்ற மூன்று மாறிகளின் சார்பலனாக மூன்று மாறிச் சமன்பாடுகளில் மாற்றியது போல் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி எழுதவும்.

$$x = \frac{1}{3\cdot122}\left[1\cdot571 - 0\cdot5756\,y + 0\cdot1565\,z + 0\cdot0067\,t\right] \quad \dots(1)$$

$$y = \frac{1}{2\cdot938}\left[-0\cdot9275 - 0\cdot5756\,x - 0\cdot1103\,z + 0\cdot0015\,t\right] \dots(2)$$

$$z = \frac{1}{4\cdot127}\left[-0\cdot0652 + 0\cdot1565\,x - 0\cdot1103\,y - 0\cdot2051\,t\right] \dots(3)$$

$$t = \frac{1}{4\cdot133}\left[-0\cdot0178 + 0\cdot0067\,x + 0\cdot0015\,y - 0\cdot2051\,z\right] \dots(4)$$

சமன்பாடு (1) இல் $y=0,\ z=0,\ t=0$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore x_1 = \frac{1}{3\cdot122}\left[1\cdot571\right]$$
$$= 0\cdot503$$

சமன்பாடு (2) இல் $x=0\cdot503,\ z=0,\ t=0$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore y_1 = \frac{1}{2\cdot938}\left[-0\cdot9275 - 0\cdot5756 \times 0\cdot503\right]$$
$$= \frac{1}{2\cdot938}\left[-0\cdot9275 - 0\cdot28954\right]$$
$$= \frac{1}{2\cdot938}\left[-1\cdot21704\right]$$
$$= -0\cdot414$$

சமன்பாடு (3) இல், $x=0{\cdot}503$, $y=-0{\cdot}414$, $t=0$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore z_1=\frac{1}{4{\cdot}127}\left[-0{\cdot}0652+0{\cdot}1565\,(0{\cdot}503)-0{\cdot}1103\,(-0{\cdot}414)\right]$$

$$=\frac{1}{4{\cdot}127}\left[-0{\cdot}0652+0{\cdot}0787+0{\cdot}04566\right]$$

$$=\frac{1}{4{\cdot}127}\left[0{\cdot}05916\right]$$

$$=0{\cdot}0143$$

இப்பொழுது சமன்பாடு (4) இல் $x=0{\cdot}503$, $y=-0{\cdot}414$, $z=0{\cdot}0143$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore t_1=\frac{1}{4{\cdot}133}\left[-0{\cdot}0178+0{\cdot}0067\,(0{\cdot}503)+0{\cdot}0015\,(-0.414)-0{\cdot}2051\,(0{\cdot}0143)\right]$$

$$=\frac{1}{4{\cdot}133}\left[-0{\cdot}0178+0{\cdot}00337-0{\cdot}00062-0{\cdot}00293\right]$$

$$=\frac{1}{4{\cdot}133}\left[-0{\cdot}01798\right]$$

$$=-0{\cdot}00435$$

ஆகவே, x, y, z, t ஆகியவற்றின் முதற்கணிப்பு மதிப்புக்கள்

$x_1=0{\cdot}503$,
$y_1=-0{\cdot}414$,
$z_1=0{\cdot}0143$,
$t_1=0{\cdot}00435$

ஆகும். இவ்வாறு தொடர்ந்து ஐந்து முறைகள் செய்தால் x, y, z, t ஆகியவற்றின் திருத்த மதிப்புக்கள்

$x=0{\cdot}5835$,
$y=0{\cdot}4307$,
$z=0{\cdot}01806$,
$t=0{\cdot}004413$

என்று காணலாம்.

2·8 மாறிகளை அடுத்தடுத்து நீக்கும் காஸ்—இன்முறை. (Gauss's method of successive elimination of the variables)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளுள் ஏதாவது ஒரு சமன்பாட்டிலிருந்து ஏதாவது ஒரு மாறியை மற்ற மாறிகளின் சார்பலனாக

மாற்றி எழுதிக் கொள்ள வேண்டும். இவ்வாறு மாற்றி எழுதப்பட்ட சமன்பாட்டிற்குச் சுழற்சித் தானச் சமன்பாடு (Pivotal Equation) என்று பெயர். பின்னர், அச்சார்பலனை மற்ற சமன்பாடுகளில் பிரதியிட்டால், எல்லாச் சமன்பாடுகளினின்றும் அந்த மாறி நீக்கப்பட்டு விடும். இவ்வாறு கிடைக்கப் பெற்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து மீண்டும் மேற்கூறப்பட்ட முறையைப் பின்பற்றி மற்றுமொரு மாறியை நீக்க வேண்டும். இவ்வாறு ஒவ்வொரு மாறியாக நீக்கிக் கொண்டே சென்றால் இறுதியில் ஒரு மாறியைக் கொண்டே ஒரு எளிய சமன்பாடு கிடைக்கும். இந்த எளிய சமன்பாட்டிலிருந்து அதிலுள்ள மாறியின் மதிப்பை எளிதில் காணலாம். பின்னர், அந்த மாறியுடன் மற்றுமொரு மாறியையும் கொண்டமைந்த இரு மாறிச் சமன்பாட்டில் அந்த மாறியின் மதிப்பைப் பிரதியிட்டு இரண்டாவது மாறியின் மதிப்பைக் காணலாம். இவ்வாறு தொடர்ந்து பிரதியிட்டு ஏனைய மாறிகளின் மதிப்புக்களையும் ஒவ்வொன்றாகக் காணலாம்.

இந்த முறையைப் பின்பற்றும்போது, முதலில் நீக்கப்பட வேண்டிய மாறியின் குணகம் எந்த சமன்பாட்டில் அதிக மதிப்புடையதாக யிருக்கிறதோ அந்தச் சமன்பாட்டை அந்த மாறியின் சுழற்சித்தானச் சமன்பாடாக எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். இது போல், இரண்டாவது மாறியை நீக்கும்போது அந்த மாறியின் குணகம் எந்த சமன்பாட்டில் அதிக மதிப்புடையதாக யிருக்கிறதோ அந்தச் சமன்பாட்டை இரண்டாவது மாறியின் சுழற்சித்தானச் சமன்பாடாக எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

மாதிரி 28

காஸ்—இன் முறையைப் பின்பற்றிக் கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

$$2{\cdot}6x + 5{\cdot}2y - 1{\cdot}7z + 0{\cdot}9t - 4{\cdot}2 = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

$$3{\cdot}2x - 2{\cdot}9y + 0{\cdot}8z - 4{\cdot}2t + 0{\cdot}7 = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

$$5{\cdot}4x + 1{\cdot}9y - 2{\cdot}1z - 4{\cdot}9t - 1{\cdot}3 = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

$$1{\cdot}3x + 2{\cdot}9y - 0{\cdot}4z - 1{\cdot}8t - 0{\cdot}4 = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

x, y, z, t ஆகிய நான்கு மாறிகளையும் x, y, z, t என்ற வரிசைப்படி ஒவ்வொன்றாக நீக்கவேண்டுமெனக் கொள்வோம். முதலில் நீக்கப்படவேண்டிய மாறி x ஆகும். இதன் குணகம் சமன்பாடு (3) அதிகமானதாகயிருப்பதால் சமன்பாடு (3)ஐ மாறி x-இன் சுழற்சித் தானச் சமன்பாடாகக் கொண்டு, அதிலிருந்து x-இன் மதிப்பை y, z, t ஆகிய மாறிகளின் சார்பலனாகக் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி எழுதவேண்டும்.

$$5{\cdot}4x = -1{\cdot}9y + 2{\cdot}1z + 4{\cdot}9t + 1{\cdot}3$$

$$x = \frac{-1{\cdot}9}{5{\cdot}4}y + \frac{2{\cdot}1}{5{\cdot}4}z + \frac{4{\cdot}9}{5{\cdot}4}t + \frac{1{\cdot}3}{5{\cdot}4}$$

அதாவது, $x = -0{\cdot}3517y + {\cdot}3889z + {\cdot}9074\,t + {\cdot}2407$ ... (5)

x இன் இச் சார்பலனை (1), (2), (4) ஆகிய சமன்பாடுகளில் பிரதியிட்டுக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைப் பெறவேண்டும்.

சமன்பாடு (1) இலிருந்து,

$$2{\cdot}6\,(-0{\cdot}3517y) + 0{\cdot}3889z + 0{\cdot}9074t + 0{\cdot}2407)$$
$$+ 5{\cdot}2y - 1{\cdot}7z + 0{\cdot}9t - 4{\cdot}2 = 0$$

அதாவது, $-0{\cdot}91442y + 1{\cdot}01114z + 2{\cdot}35924t + 0{\cdot}66582$
$$+ 5{\cdot}2y - 1{\cdot}70z + 0{\cdot}9t - 4{\cdot}2 = 0$$

அதாவது, $4{\cdot}28558y - 0{\cdot}70886z + 3{\cdot}25924t = 3{\cdot}63418 = 0$ ... ... (6)

இதுபோல், சமன்பாடு (2) இலிருந்து,

$$3{\cdot}2\,(-0{\cdot}3517y + 0{\cdot}3889z + 0{\cdot}9074t + 0{\cdot}2407)$$
$$-2{\cdot}9y + 0{\cdot}8z - 4{\cdot}2t + 0{\cdot}7 = 0$$

அதாவது, $-1{\cdot}12544y + 1{\cdot}24448z + 2{\cdot}90368t + 0{\cdot}76524$
$$-2{\cdot}9y + 0{\cdot}8z - 4{\cdot}2t + 0{\cdot}7 = 0$$

அதாவது, $-4{\cdot}02544y + 2{\cdot}06448z - 1{\cdot}29632t + 1{\cdot}46524 = 0$ ... (7)

சமன்பாடு (4) இலிருந்து,

$$1{\cdot}3\,(-0{\cdot}3517y + 0{\cdot}3889z + 0{\cdot}9074t + 0{\cdot}2407)$$
$$+2{\cdot}9y - 0{\cdot}4z - 1{\cdot}8t - 0{\cdot}4 = 0$$
$$-0{\cdot}45721y + 0{\cdot}50557z + 1{\cdot}17962t + 0{\cdot}31291$$
$$+ 2{\cdot}9y - 0{\cdot}4z = 1{\cdot}8t - 0{\cdot}4 - 0$$
$$2{\cdot}44279y + 0{\cdot}10557z - 0{\cdot}62038t - 0{\cdot}08709 = 0 \quad \ldots \quad (8)$$

இப்பொழுது சமன்பாடு (6) இல் y-இன் குணகத்தின் மதிப்பு அதிகமாக யிருப்பதால் அம் சமன்பாட்டை y-இன் சுழற்சித்தானச் சமன்பாடாக எடுத்துக் கொள்ளவும். ஆகவே, சமன்பாடு (6) இலிருந்து

$$y = \frac{0{\cdot}70886}{4{\cdot}28588}z - \frac{3{\cdot}25924}{4{\cdot}28588}t + \frac{3{\cdot}63418}{4{\cdot}28588}.$$

$$y = 0{\cdot}16539z - 0{\cdot}76033t + 0{\cdot}84791 \quad \ldots \quad \ldots \quad (9)$$

y இன் இச் சார்பலனை (7), (8) ஆகிய சமன்பாடுகளில் பிரதியிடவும்.

சமன்பாடு (7) இலிருந்து

$$-4{\cdot}02544\ (0{\cdot}16539z = 0{\cdot}76033t + 0{\cdot}84791)$$
$$+\ 2{\cdot}06448z = 1{\cdot}29632t + 1{\cdot}46524 = 0$$

அதாவது, $-\ 0{\cdot}66573z + 3{\cdot}0591t - 3{\cdot}4127$
$$+\ 2{\cdot}06448z - 1{\cdot}29632t + 1{\cdot}46524 = 0$$

அதாவது, $1{\cdot}39875z + 1{\cdot}76278t - 1{\cdot}94746 = 0$ .. .. (10)

சமன்பாடு (8) இலிருந்து

$$2{\cdot}44279\ (0{\cdot}16539z - 0{\cdot}76033t + 0{\cdot}84791)$$
$$+\ 0{\cdot}10557z - 0{\cdot}62038t - 0{\cdot}08709 = 0$$

அதாவது, $0{\cdot}40402z - 1{\cdot}8573t + 2{\cdot}0715$
$$+\ 0{\cdot}10557z - 0{\cdot}62038t - 0{\cdot}08709 = 0$$

அதாவது, $0{\cdot}50959z - 2{\cdot}47768t + 1{\cdot}98441 = 0$ .. .. (11)

இப்பொழுது சமன்பாடு (10)ஐ z இன் சுழற்சித் தானச் சமன்பாடாகக் கருதி z ஐ t இன் சார்பலஞக எழுதவும்.

$$\therefore\ z = -\frac{1{\cdot}76278}{1{\cdot}39875}t + \frac{1{\cdot}94746}{1{\cdot}39875}$$

$\therefore\ z = -\ 1{\cdot}2606t + 1{\cdot}3884$ .. .. (12)

z இன் இம் மதிப்பைச் சமன்பாடு (11) இல் பிரதியிடவும்.

$\therefore\ 0{\cdot}50959\ (-1{\cdot}2606t + 1{\cdot}3884) - 2{\cdot}47768t + 1{\cdot}98441 = 0$

அதாவது, $-0{\cdot}64253t + 0{\cdot}70729 - 2{\cdot}47768t + 1{\cdot}98441 = 0$

அதாவது, $-3{\cdot}12021t + 2{\cdot}69170 = 0$

$$\therefore\ t = \frac{2{\cdot}69170}{3{\cdot}12021} = 0{\cdot}86277$$

சமன்பாடு (12) இலிருந்து,

$$\begin{aligned} z &= -1{\cdot}2606\ (0{\cdot}86277) + 1{\cdot}3884 \\ &= -1{\cdot}0879 + 1{\cdot}3884 \\ &= 0{\cdot}3005 \end{aligned}$$

சமன்பாடு (9) இலிருந்து,

$$\begin{aligned} y &= 0{\cdot}16538\ (0{\cdot}3005) - 0{\cdot}76033\ (0{\cdot}86277) + 0{\cdot}84791 \\ &= 0{\cdot}04970 - 0{\cdot}65599 + 0{\cdot}84791 \\ &= 0{\cdot}24162 \end{aligned}$$

சமன்பாடு (5) இலிருந்து,

$$x = -\ 0{\cdot}3517\ (0{\cdot}24162) + 0{\cdot}3889\ (0{\cdot}3005) + 0{\cdot}9074\ (0{\cdot}86277)$$
$$+\ 0{\cdot}24070$$

$= -0{\cdot}08496 + 0{\cdot}11687 + 0{\cdot}78290 + 0{\cdot}24070$
$= 1{\cdot}05551.$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் வருமாறு:

$$x = 1{\cdot}05551$$
$$y = 0{\cdot}24162$$
$$z = 0{\cdot}30050$$
$$t = 0{\cdot}86277.$$

2·9 மூன்று மாறிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க நியூட்டன்—ராப்சன் முறை (Newton—Raphson method of solving equations of three variables)

x, y, z என்ற மூன்று மாறிகளைக் கொண்டு அமைந்த கீழ்க் கண்ட மூன்று சமன்பாடுகளைக் கருதுக.

$$f_1(x, y, z) = 0$$
$$f_2(x, y, z) = 0$$
$$f_3(x, y, z) = 0.$$

முதலில் மூலங்களின் தோராயமான மதிப்புக்களைக் காணவேண்டும். $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ என்பன மூலங்களின் தோராய மதிப்புக்க ளெனக் கொள்க. h, k, l என்பன இத் தோராய மதிப்புக்களின் திருத்தங்களானால், மூலங்களின் திருத்த மதிப்புக்கள்

$$x = x_0 + h,$$
$$y = y_0 + k,$$
$$z = z_0 + l.$$

ஆகும். ஆகவே, இத்திருத்த மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளைச் சமன்படுத்தவேண்டும்.

$$\therefore\ f_1(x_0+h,\ y_0+k,\ z_0+l) = 0$$
$$f_2(x_0+h,\ y_0+k,\ z_0+l) = 0$$
$$f_3(x_0+h,\ y_0+k,\ z_0+l) = 0$$

டெயிலரின் தேற்றத்தின் (Taylor's theorem)படி இவற்றை விரித் தெழுதவும்.

$$f_1(x_0+h, y_0+k, z_0+l) \equiv f_1(x_0, y_0, z_0) + h\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0 +$$

$$k\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0 + l\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)_0 + \text{h, k, l,-இல் உயர்ந்தபடி பெற்ற உறுப்புக்கள்} = 0$$

$$f_2\,(x_0+h,\ y_0+k,\ z_0+l) = f_2\,(x_0, y_0, z_0) + h\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_0$$

$$+ k\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_0 + l\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)_0 +$$ h, k, l இல் உயர்ந்தபடி

பெற்ற உறுப்புக்கள் $= 0$

$$f_3\ (x_0+h,\ y_0+k,\ z_0+l) = f_3\ (x_0,\ y_0,\ z_0) + h\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)_0$$

$$+ k\left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)_0 + l\left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)_0 + h, k, l$$ இல்

உயர்ந்தபடி பெற்ற உறுப்புக்கள் $=0$ h, k, l என்பன மிகச் சிறியன வாகையால் h, k, l இல் இரண்டும் அதற்கு மேற்பட்ட படிகளையும் பெற்ற உறுப்புக்களைப் புறக்கணித்து விடலாம். ஆகவே, கீழ்க் காணும் மூன்று எளிய சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$f_1\ (x_0, y_0, z_0) + h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + k\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0 + l\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)_0 = 0$$

$$f_2\ (x_0, y_0, z_0) + h\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_0 + k\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_0 + l\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)_0 = 0$$

$$f_3\ (z_0, y_0, z_0) + h\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)_0 + k\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)_0 + l\left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)_0 = 0$$

இச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து h, k, l ஆகியவற்றின் முதல் திருத்த மதிப்புக்களைப் பெறலாம். இப்பொழுது, $f_1=0$, $f_2=0$, $f_3=0$ ஆகிய சமன்பாடுகளின் தோராய மூலங்களை

$$x_1 = x_0 + h,$$
$$y_1 = y_0 + k,$$
$$z_1 = z_0 + l$$

என்று கொள்க. இத் தோராய மதிப்புக்களின் திருத்தங்களை h_1, k_1, l_1 எனக் கொண்டால்,

$$x = x_1 + h_1,$$
$$y = y_1 + k_1,$$
$$z = z_1 + l_1$$

என்பன சமன்பாடுகளின் இரண்டாவது திருத்தப்பட்ட தோராய மதிப்புகளாகும். முன் போலவே, h, k, l, ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களை

$$f_1\ (x_1, y_1, z_1) + h_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_1 + k_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_1 + l_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)_1 = 0$$

$$f_2\ (x_1, y_1, z_1) + h_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_1 + k_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_1 + l_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)_1 = 0$$

$$f_3\ (x_1, y_1, z_1) + h'\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)_1 + k_1\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)_1 + l_1\left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)_1 = 0$$

என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து பெறலாம். இம் முறையை மீண்டும் மீண்டும் செய்து வந்தால் மூலங்களின் மதிப்புக்களைத் தேவையான தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகப் பெறலாம்.

மாதிரி 29

நியூட்டன்-ராப்சன் முறையில் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்

$$27x + 6y - z = 85$$
$$6x + 13y + 2z = 72$$
$$x + y + 54z = 110$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளை

$$f_1\ (x, y, z) = 0$$
$$f_2\ (x, y, z) = 0$$
$$f_3\ (x, y, z) = 0 \quad \text{எனக் கொள்க.}$$

x, y, z ஆகியவற்றின் தோராய மதிப்புக்களைக் கீழ்க்கண்ட முறையில் காணலாம். முதல் சமன்பாட்டில் x இன் குணகம் மிகப் பெரியதாயிருப்பதால் அச்சமன்பாட்டிலிருந்து xஐ y, z ஆகியவற்றின் சார்பலனாக எழுதவும்.

$$27\ x = 85 - 6y + z$$

அல்லது, $x = \frac{1}{27}\ (85 - 6y + z)$

இப்பொழுது, $y = 0,\ z = 0$ என்று பிரதியிடவும்.

$\therefore\ x = \frac{85}{27} = 3{\cdot}15 = x_0$ எனக்கொள்க.

$\therefore x_0 = 3{\cdot}15$ என்பது xஇன் தோராய மதிப்பாகும். இதுபோல் இரண்டாவது சமன்பாட்டிலிருந்து

$$13\ y = 72 - 6x - 2z$$
$$\therefore\ y = \frac{1}{13}\ (72 - 6x - 2\ z)$$

என்று கிடைக்கிறது. இதில் $x = 3{\cdot}15,\ z - 0$ என்று பிரதியிட,

$$y = \frac{1}{15}\ [72 - 6 \times 3{\cdot}15 - 2\ (0)]$$
$$= \frac{1}{15}\ (72 - 18{\cdot}90)$$
$$= \frac{53{\cdot}1}{15}$$

$= 3{\cdot}54 = y_0$ என்று கிடைக்கிறது.

இதுபோல் மூன்ருவது சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கும்,

$$z=\frac{1}{54}\ (110=x-y)$$

என்ற சமன்பாட்டில் $x=3\cdot15$, $y=3\cdot54$ என்ற பிரதியிட

$$z=\frac{1}{54}\ (110-3\cdot15-3\cdot54)$$
$$=\frac{1}{54}\ (103\cdot31)$$
$$=1\cdot91=z_0 \text{ என்று கிடைக்கிறது.}$$

இவ்வாறு, $x_0=3\cdot15$, $y_0=3\cdot54$, $z_0=1\cdot91$ என்ற முதல் தோராய மதிப்புக்கள் கிடைக்கின்றன. இப்பொழுது, மூலங்களின் முதல் திருத்த மதிப்புக்களை

$$x=x_0+h=3\cdot15+h,$$
$$y=y_0+k=3\cdot54+k,$$
$$z=z_0+l=1\cdot91+l$$

என்று கொள்க.

இப்பொழுது, $f_1\ (x_0, y_0, z_0)=f_1\ (3\cdot15, 3\cdot54, 1\cdot91)$

$$=27\ (3\cdot15)+6\ (3\cdot54)-1\cdot91-85$$
$$=19\cdot38$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0=27;\quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_0=6;\quad \left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)_0=-1$$

ஆகவே, h, k, l ஆகியவற்றைக் கணக்கிடப் பயன்படும் முதல் சமன்பாடு வருமாறு :

$$f_1\ (x_0, y_0, z_0)+h\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0+k\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0+l\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)_0=0$$

அதாவது, $19\cdot38+27h+6k-l=0$.

அல்லது, $27h+6k-l=-19\cdot38$ ... ... (1)

இதுபோல் மற்ற இரு சமன்பாடுகளையும் பெறலாம்.

$$6h+15k+2=-3\cdot82 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$h+k+54l=\ 0\cdot17 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளையும் தீர்த்து h, k, l இன் மதிப்புக்களைப் பெறலாம்.

$$h=-0\cdot72458,$$
$$k=\ 0\cdot03328,$$
$$l=\ 0\cdot01595,$$

ஆகவே, மூலங்களின் முதல் திருத்த மதிப்புக்கள் :

$$x = x_0 + h = 3{\cdot}15 - 0{\cdot}72458 = 2{\cdot}42542,$$
$$y = y_0 + k = 3{\cdot}54 + 0{\cdot}03328 = 3{\cdot}57328,$$
$$z = z_0 + l = 1{\cdot}91 + 0{\cdot}01595 = 1{\cdot}92595.$$

இம்முறையைத் தொடர்ந்து செய்து மூலங்களைத் தேவையான அள வுக்குத் திருத்தமாகப் பெறலாம்.

பயிற்சி 5

கீழ்க்காணும் ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்

1. $3{\cdot}15x - 1{\cdot}96y + 3{\cdot}85z = 12{\cdot}95$
   $2{\cdot}13x + 5{\cdot}12y - 2{\cdot}89z = -8{\cdot}61$
   $5{\cdot}92x + 3{\cdot}05y + 2{\cdot}15z = 6{\cdot}88$

2. $0{\cdot}89x + 4{\cdot}32y - 0{\cdot}47z + 0{\cdot}95t = 3{\cdot}36$
   $1{\cdot}13x - 0{\cdot}89y + 0{\cdot}61z + 5{\cdot}63t = 4{\cdot}27$
   $6{\cdot}32x - 0{\cdot}73y - 0{\cdot}65z + 1{\cdot}06t = 2{\cdot}95$
   $0{\cdot}74x + 1{\cdot}01y + 5{\cdot}28z - 0{\cdot}88t = 1{\cdot}97$

3. $2{\cdot}63x + 5{\cdot}21y - 1{\cdot}694z + 0{\cdot}938t - 4.23 = 0$
   $3{\cdot}16x - 2{\cdot}95y + 0{\cdot}813z - 4{\cdot}21t + 0{\cdot}716 = 0$
   $5{\cdot}36x + 1{\cdot}88y - 2{\cdot}15z - 4{\cdot}95t - 1{\cdot}28 = 0$
   $1{\cdot}36x + 2{\cdot}98y - 0{\cdot}432z - 1{\cdot}768t - 0{\cdot}419 = 0$

4. $10x - 7y + 3z + 5w = 6$
   $-6x + 8y - z - 4w = 5$
   $3x + y + 4z + 11w = 2$
   $5x - 9y - 2z + 4w = 7$

5. $15x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 46{\cdot}207$
   $3x_1 + 27x_2 - 5x_3 - x_4 = 81{\cdot}024$
   $-4x_1 - 5x_2 + 16x_3 + 5x_4 = 23{\cdot}871$
   $2x_1 - x_2 + 5x_3 + 19x_4 = 54{\cdot}907$

2.10 கிராஃபி-இன் மூலத்தை வர்க்கப்படுத்தும் முறை (Graeffe's Root-Squaring Method)

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் சமன்பாட்டை, அச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் 2-ஆம்படி அல்லது 4-ஆம்படி அல்லது 6-ஆம்படி,...... களை மூலங்களாகவுடைய சமன்பாடாக மாற்றி, அவ்வாறு மாற்றப் பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் கணக்கிட்டு, அவற்றிலிருந்து கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காணலாம். எனவே, முதலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களின் வர்க்கங்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை அமைத்துக் கொள்ள வேண்டும். இவ்வாறு மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டின்

மூலங்களை எளிதாகக் காண முடியாவிடில், மாற்றப்பட்ட சமன் பாட்டின் மூலங்களின் வர்க்கங்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன் பாட்டை அமைத்து அதன் மூலங்களைக் காணவேண்டும். $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ என்பன இச் சமன்பாட்டின் மூலங்களானால் $\alpha^{1/4}, \beta^{1/4}, \gamma^{1/4}, \ldots$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். இவ்வாறு சமன்பாட்டை இரு முறை மாற்றிய பின்னரும் அதன் மூலங்களை எளிதில் காண இயலாவிடில், மீண்டும் மீண்டும் இது போல் தொடர்ந்து செய்து வரவேண்டும். மாற்றப்படும் சமன் பாட்டின் மூலங்கள் எளிதாகக் கணக்கிடப் படக்கூடிய வகையில் அமையும்வரை இந்த வர்க்கப்படுத்தும் முறையைத் தொடர்ந்து செய்து வரவேண்டும். இவ்வாறு ஒவ்வொரு தடவையும் சமன் பாட்டின் மூலங்களின் வர்க்கங்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு அமைக்கப்படுவதால் இந்த முறை கிராஃபி-இன் மூலத்தை வர்க்கப்படுத்தும் முறை (Graeffe's Root-squaring Method) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை $f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ என்று கொள்க. இச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்று வைத்துக்கொண்டால், இச் சமன் பாட்டைக் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$f(x) \equiv a_0 (x - x_2) \ldots\ldots (x - x_n) = 0 \qquad \ldots \quad (1)$$

$$\therefore (-1)^n f(-x) \equiv (-1)^n a_0 (-x - x_1)(-x - x_2)(-x - x_3) \ldots (-x - x_n)$$
$$\equiv (-1)^{2n} a_0 (x + x_1)(x + x_2)(x + x_3) \ldots (x + x_n)$$
$$\equiv a_0 (x + x_1)(x + x_2)(x + x_3) \ldots (x + x_n)$$

$$\therefore (-1)^n f(-x) f(x) \equiv a_0^2 (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2) \ldots (x^2 - x_n^2)$$

இப்பொழுது $x^2 = y$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore \phi(y) \equiv a_0^2 (y - x_1^2)(y - x_2^2)(y - x_3^2) \ldots\ldots (y - x_n^2) = 0$$

இச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $y = x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots\ldots, x_n^2$ ஆகும்.

ஆகவே, $f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ என்றால், $x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots\ldots, x_n^2$ ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை அமைக்க $f(x) = 0$ ஐ $(-1)^n f(-x)$ஆல் பெருக்கினால் போதும். எடுத்துக்காட்டாக,

$f(x) \equiv a_0 x^6 + a_1 x^5 + a_2 x^4 + a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_5 x + a_6 = 0$ என்ற ஆரும்படிச் சமன்பாட்டைக் கருதுக.

$$(-1)^6 f(-x) \equiv a_0 x^6 - a_1 x^5 + a_2 x^4 - a_3 x^3 + a_4 x^2 - a_5 x + a_6 = 0$$

$$\therefore (-1)^6 f(-x)\, f(x) \equiv a_0x^{12} + [-a_1^2 + 2\,a_0a_2]\, x^{10} + [a_2^2 - 2\,a_1a_3 + 2\,a_0a_4]\, x^8 + [-a_3^2 + 2\,a_2a_4 - 2\,a_1a_5 + 2\,a_0a_6]\, x^6 + [a_4^2 - 2\,a_3a_5 + 2\,a_2a_6]\, x^4 + [-a_5^2 + 2\,a_4a_6]\, x^2 + a_6^2 = 0.$$

இப்பெருக்கலைச் சமன்பாட்டின் குணகங்களைப் பிரித்துக் கீழ்க் கண்டவாறு செய்யலாம்.

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_0	$-a_1$	a_2	$-a_3$	a_4	$-a_5$	a_6
a_0^2	$-a_1^2$	a_2^2	$-a_3^2$	a_4^2	$-a_5^2$	a_6^2
	$2\,a_0a_2$	$-2\,a_1a_3$	$2\,a_2a_4$	$-2\,a_3a_5$	$2\,a_4a_6$	
		$2\,a_0a_4$	$-2\,a_1a_5$	$2\,a_2a_6$		
			$2\,a_0a_6$			
b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6

மேற்கண்ட பெருக்கலைச் செய்யுமுறை கீழே விளக்கப்பட்டுள்ளது.

முதலில் x^6, x^5, x^4, x^3, x^2, x^1, x^0 ஆகியவற்றை ஒரு வரிசையில் எழுதிக் கொள்ளவேண்டும். பின், அவைகளுக்கு நேர் கீழே அடுத்த வரிசையில் அவற்றிற்குரிய குணகங்களை, அதாவது a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 ஆகியவற்றை எழுதிக் கொள்ளவேண்டும். பின்னர் மூன்ருவது வரிசையில் அக் குணகங்களை வர்க்கப்படுத்தி, முதல், மூன்ருவது, ஐந்தாவது,....வர்க்கங்களை நேர் அடையாளத் துடனும், இரண்டாவது, நான்காவது, ஆருவது,....வர்க்கங்களை எதிர் அடையாளத்துடனும் எழுத வேண்டும். அதாவது, மூன்ருவது வரிசையில் a_0^2, $-a_1^2$, a_2^2, $-a_3^2$, a_4^2, $-a_5^2$, a_6^2 என்று எழுத வேண்டும். பின்னர் நான்காவது வரிசையில், மூன்ருவது வரிசையிலுள்ள வர்க்கங்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் நேர் மேல் வரிசை உறுப்புக்கு இரு பக்கமுமுள்ள உறுப்புக்களின் பெருக்கற் பலனின் இரு மடங்கை அவ்வர்க்கத்திற்கு நேர் கீழே எழுத வேண்டும். அவ்வாறு எழுதும்போது, இரண்டாவது, நான்காவது, ஆருவது, ...வர்க்கங்களுக்கு நேர்கீழே எழுதுகின்ற பெருக்கற் பலன்களின் இரு மடங்குகளுக்கு அடையாளங்களை மாற்ருமலும், மூன்ருவது, ஐந்தாவது, ஏழாவது,....வர்க்கங்களுக்கு நேர்கீழே எழுதப்படும் பெருக்கற் பலன்களின் இரு மடங்குகளுக்கு அடையாளங்களை மாற்றியும் எழுதவேண்டும். அடையாளங்கள் மாற்றுவதில்

ஏற்படும் குழப்பங்களைத் தவிர்க்க, அடையாளங்கள் மாற்றப்படாமல் எழுதப்பட வேண்டிய உறுப்புக்களுக்குப் பக்கங்களில் n (no change) என்றும், அடையாளங்கள் மாற்றப்பட வேண்டிய உறுப்புக்களுக்குப் பக்கங்களில் c (change) என்றும் குறித்துக் கொள்ளலாம். நான்காவது வரிசையில் முதல் உறுப்பு கிடையாது. ஏனெனில், இரண்டாவது வரிசையிலுள்ள முதல் குணகத்திற்கு இடப்பக்கம் குணகம் எதுவும் கிடையாது. ஆகவே, நான்காவது வரிசையில் இரண்டாவது, நான்காவது, ஆருவது,.... உறுப்புக்களுக்கான இடங்களின் ஓரங்களில் n என்றும், மூன்ருவது, ஐந்தாவது,.... ஆகிய உறுப்புக்களுக்கான இடங்களின் ஓரங்களில் c என்றும் குறித்துக் கொள்ளவேண்டும். உதாரணமாக இரண்டாவது வரிசையிலுள்ள a_1 என்ற குணகத்தின் இரு பக்கங்களிலுமுள்ள a_0, a_2 ஆகிய குணகங்களின் பெருக்கற் பலனின் இரு மடங்காகிய $2\,a_0a_2$ ஐ அடையாளம் மாற்ருமல் a_1க்கு நேர்கீழே நான்காவது வரிசையில் எழுதவேண்டும். இங்கு அடையாளம் மாற்றப்படவில்லையாகையால் $2\,a_0a_2$-இன் பக்கத்தில் n என்று குறிக்கின்ருேம். பின்னர், நான்காவது வரிசையில் இதற்கு அடுத்த கலத்தில் c என்றும், அதற்கடுத்த கலத்தில் n என்றும் இப்படி மாறிமாறி எழுதிக் கொள்ளலாம். இப்பொழுது a_2 என்ற குணகத்தின் இரு பக்கங்களிலுமுள்ள a_1, a_3 ஆகிய குணகங்களின் இரு மடங்காகிய $2\,a_1a_3$ ஐ a_2க்கு நேர்கீழே நான்காவது வரிசையில் எழுதவேண்டும். ஆனல் நான்காவது வரிசையில் அந்த இடத்தில் c என்று எழுதப்பட்டிருப்பதால் $2\,a_1a_3$ ஐ அடையாளம் மாற்றி $-2\,a_1a_3$ என்று எழுத வேண்டும். இவ்வாறு நான்காவது வரிசையை நிரப்பிய பின் ஐந்தாவது வரிசையைக் கீழ்க்கண்டவாறு நிரப்ப வேண்டும்.

இரண்டாம் வரிசையிலுள்ள a_2 என்ற குணகத்தின் இரு பக்கங்களிலும் ஒன்றுவிட்டு அடுத்துள்ள குணகங்களாகிய a_0, a_4 ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனின் இரு மடங்காகிய $2\,a_0a_4$ ஐ அடையாளம் மாற்ருமல் a_2க்கு நேர்கீழே எழுதிக் கொள்ளவேண்டும். இதன் அடையாளத்தை மாற்ருமல் எழுதுவதால் அதன் பக்கத்தில் n என்று குறித்துக் கொள்ளவேண்டும். பின்னர், ஐந்தாவது வரிசையில் இதற்கடுத்த கலத்தில் c என்றும், அதற்கடுத்த கலத்தில் n என்றும் இவ்வாறு மாற்றி மாற்றி எழுதிக் கொள்ளவேண்டும். இப்போது, a_3க்கு நேர்கீழே ஐந்தாவது வரிசையில் $2\,a_1a_5$ ஐ எழுத வேண்டும். ஆனல் அங்கு c என்று குறிக்கப்பட்டிருப்பதால் $2\,a_1a_5$க்கு அடையாளம் மாற்றி $-2\,a_1a_5$ என்று எழுதவேண்டும். இவ்வாறு வரிசையைப் பூர்த்தி செய்ய வேண்டும். இதுபோல் எத்தனை வரிசைகள் நிரப்ப முடியுமோ அத்தனை வரிசைகளை நிரப்பியபின் கோடிட்டு

மூன்ருவது வரிசையிலிருந்து இறுதி வரிசை வரை ஒவ்வொரு கலத்திலுமுள்ள உறுப்புக்களை யெல்லாம் கூட்டிக் கோட்டிற்குக் கீழே எழுத வேண்டும். கோட்டிற்குக் கீழே பல்வேறு கலங்களிலுமுள்ள கூட்டுத் தொகைகள்தான் வேண்டிய சமன்பாட்டின் குணகங்களாகும்.

	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
f (x)	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
	a_0^2	$-a_1^2$ $2a_0a_2(n)$	a_2^2 $-2a_1a_3(c)$ $2a_0a_4(n)$	$-a_3^2$ $2a_2a_4(n)$ $-2a_1a_2(c)$ $2a_0a_6(n)$	a_4^2 $-2a_3a_6(c)$ $2a_2a_3(n)$	$-a_5^2$ $2a_4a_6(n)$	a_6^2
2-ஆம் படி	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6

வகை (i) $f(x)=0$ தனித்தனி மெய் மூலங்களைக் கொண்டது.

$x_1, x_2..., x_n$ என்பன $f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}...+a_n=0$இன் n தனித்தனி மூலங்களெனக் கொள்க.

$$\therefore \frac{a_1}{a_0}=-(x_1+x_2+...+x_n)$$

$$\frac{a_2}{a_0}=\quad(x_1x_2+x_1x_3+....)$$

$$\frac{a_3}{a_0}=-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+....)$$

... .

$$\frac{a_n}{a_0}=\quad(-1)^nx_1x_2x_3...x_n.$$

இப்பொழுது $f(x)=0$ இலிருந்து $x_1^m, x_2^m,...,x_n^m$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகவுடைய மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டை

$b_0(x^m)^n+b_1(x^m)^{n-1}+...+b_{n-1}x^m+b_n=0$ என்று கொண்டால்,

$$\frac{b_1}{b_0}=-(x_1^m+x_2^m+...+x_n^m)$$

$$=-x_1^m\left(1+\frac{x_2^m}{x_1^m}+\frac{x_3^m}{x_1^m}+...+\frac{x_n^m}{x_1^m}\right)$$

$$\frac{b_2}{b_0}=x_1^mx_2^m+x_1^mx_3^m+......$$

$$=x_1^m x_2^m\left(1+\frac{x_3^m}{x_2^m}+\frac{x_4^m}{x_2^m}+\ldots\right)$$

$$\frac{b_3}{b_0}=-\left(x_1^m x_2^m x_3^m+x_1^m x_2^m x_4^m+\ldots\right)$$

$$=-x_1^m x_2^m x_3^m\left(1+\frac{x_4^m}{x_3^m}+\ldots\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{b_n}{b_o}=(-1)^n x_1^m x_2^m x_3^m \ldots x_n^m.$$

இப்பொழுது $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ஆகிய மூலங்களை

$$|x_1|>|x_2|>|x_3|>\ldots>|x_n|$$

என்றவாறு எடுத்துக் கொண்டால், $\frac{x_2^m}{x_1^m}, \frac{x_3^m}{x_2^m}, \ldots$ ஆகிய விகிதங்கள் புறக்கணிக்கத் தக்கவாறு மிகச்சிறியனவாகிவிடும். ஆகவே,

$$\frac{b_1}{b_0}=-x_1^m, \frac{b_2}{b_0}=x_1^m x_2^m, \frac{b_3}{b_0}=-x_1^m x_2^m x_3^m,$$

$$\ldots\ldots, \frac{b_n}{b_o}=(-1)^n x_1^m x_2^m \ldots x_n^m.$$

$$\therefore \frac{b_2}{b_1}=-x_2^m;\ \frac{b_3}{b_2}=-x_3^m, \frac{b_4}{b_3}=-x_4^m, \ldots,$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}}=-x_n^m.$$

இவற்றிலிருந்து நாம் கீழ்க்கண்ட n சமன்பாடுகளைப் பெறுகிறோம்.

$$b_o x_1^m+b_1=0$$
$$b_1 x_2^m+b_2=0$$
$$b_2 x_3^m+b_3=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_{n-1} x_n^m+b_n=0$$

இவ்வாறு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை மூலங்களை வர்க்கப் படுத்தும் முறையில் n எளிய சமன்பாடுகளாகப் பிரிக்கலாம். இந்த n சமன்பாடுகளிலிருந்து $x_1^m, x_2^m, x_3^m, \ldots, x_n^m$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பெறலாம். அவற்றிலிருந்து $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ஆகிய $f(x)=0$ இன் n மூலங்களையும் மிக எளிதில் பெறமுடியும்.

மாதிரி 30

கீழ்க்காணும் சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களையும் கணக்கிடுக.

$$1{\cdot}23x^5-2{\cdot}52x^4-16{\cdot}1x^3+17{\cdot}3x^2+29{\cdot}4x-1{\cdot}34=0.$$

	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
f (x)	1·23	—2·52	—16·1	17·3	29·4	—1·34
	1·513	—0·635 (10) —3·961 (10) n	2·592 (10^{2}) 0·872 (10^{2}) c 0·723 (10^{2}) n	—2·993 (10^{2}) —9·467 (10^{2}) n —0·068 (10^{2}) c	8·644 (10^{2}) 0·464 (10^{4}) c	—1 796
2-ஆம் படி	1·513	—4·596 (10)	4·187 (10^{2})	—1·253 (10^{3})	9·108 (10^{2})	—1·796
	2·289	—2·112 (10^{3}) 1·267 (10^{3}) n —	1·753 (10^{5}) —1·152 (10^{5}) c 0·028 (10^{5}) n	—1·570 (10^{6}) 0·763 (10^{6}) n * * * *	8·296 (10^{5}) —0·045 (10^{5}) c	—3·226
4-ஆம் படி	2·289	—0·845 (10^{3})	0·629 (10^{4})	—0·807 (10^{6})	8·251 (10^{5})	—3·226
	5·240	—0·714 (10^{6}) 0·288 (10^{6}) n	0·396 (10^{10}) —0 136 (10^{10}) c * * * *	—0·651 (10^{12}) 0·104 (10^{12}) n * * * *	6·808 (10^{11}) * * * *	—10·41
8-ஆம் படி	5·240	—0 426 (10^{6})	0·260 (10^{10})	—0·547 (10^{12})	6·808 (10^{11})	—10·41
	2·746 (10)	—1·815 (10^{11}) 0·272 (10^{11}) n	6·76 (10^{18}) —0·47 (10^{18}) c	—2·992 (10^{23}) 0·035 (10^{23}) n	4·635 (10^{23})	—1·084 (10^{2})
16-ஆம் படி	2·746 (10)	—1·543 (10^{11})	6·29 (10^{18})	—2·957 (10^{23})	4·635 (10^{23})	—1·084 (10^{2})
	7·541 (10^{2})	—2·381 (10^{22}) —0·035 (10^{22})	3·96 (10^{37}) —0·01 (10^{37}) c	—8·744 (10^{46}) * * * *	2·148 (10^{47})	—1·175 (10^{4})
32-ஆம் படி	7·541 (10^{2})	—2·346 (10^{22})	3·95 (10^{37})	—8·744 (10^{46})	2·148 (10^{47})	—1·175 (10^{4})
(y)	b_0	b^1	b_2	b_3	b_4	b_5

கீழ்க்கண்ட ஐந்து எளிய சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$b_0x_1^m+b_1=0 \quad \therefore \quad 7{\cdot}541\ (10^2)\ x_1^{32}-2{\cdot}346\ (10^{22})=0$$
$$b_1x_2^m+b_2=0 \quad \therefore \quad -2{\cdot}346\ (10^{22})\ x_2^{32}+3{\cdot}95\ (10^{37})=0$$
$$b_2x_3^m+b_3=0 \quad \therefore \quad 3{\cdot}95\ (10^{37})\ x_3^{32}-8{\cdot}744\ (10^{46})=0$$
$$b_3x_4^m+b_4=0 \quad \therefore \quad -8{\cdot}744\ (10^{46})\ x_4^{32}+2{\cdot}148\ (10^{47})=0$$
$$b_4x_5^m+b_5=0 \quad \therefore \quad 2{\cdot}148\ (10^{47})\ x_5^{32}-1{\cdot}175\ (10^4)=0$$

முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$x_1^{32}=\frac{2{\cdot}346\ (10^{22})}{7{\cdot}541\ (10^2)}=\frac{10^{20}\times 2{\cdot}346}{7{\cdot}541}$$
$$\therefore\ 32 \log x_1 \doteq 20+\log 2{\cdot}346-\log 7{\cdot}541$$
$$\therefore\ \log x_1=\frac{20+0{\cdot}3703-0{\cdot}8775}{32}$$
$$=\frac{19{\cdot}4928}{32}$$
$$=0{\cdot}60915$$
$$x_1=4{\cdot}066$$

இதுபோல், $x_2=2{\cdot}991$, $x_3=1{\cdot}959$, $x_4=1{\cdot}0285$, $x_5=0{\cdot}0447$ என்று கணக்கிட்டுப் பெறலாம். இம் மதிப்புக்களின் அடையாளங்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம். தெக்காட்டின் குறியீட்டு விதி (Descarte's Rule of Signs)யின்படி $f(x)=0$க்கு மூன்றுக்கு மேற்பட்ட நேர் மூலங்களும், இரண்டுக்கு மேற்பட்ட எதிர் மூலங்களும் இருக்க முடியாதென்று அறியலாம். இப்பொழுது x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ஆகியவற்றின் தோராய மதிப்புக்களான $x_1=\pm 4$, $x_2=\pm 3$, $x_3=\pm 2$, $x_4=\pm 1$, $x_5=\pm 0{\cdot}04$ ஆகியவற்றை $f(x)=0$ இல் பிரதியிட்டு $f(x)=0$ஐத் தோராயமாகச் சமன்படுத்தும் x-இன் மதிப்புக் களிலிருந்து நேர் மூலங்களையும் எதிர் மூலங்களையும் கண்டறியலாம்.

இவ்வாறு, $x_1=4{\cdot}066$,
$x_2=-2{\cdot}991$,
$x_3=1{\cdot}959$,
$x_4=-1{\cdot}0285$,
$x_5=0{\cdot}0445$

என்ற ஐந்து மூலங்களையும் பெறுகிறோம்.

வகை (ii)

n-படி பெற்ற $f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களுள் சில மூலங்கள் சிக்கலானவை (complex)யாக யிருப்பின் ஒரு சோடி

(pair) சிக்கல் மூலங்களுக்கு ஒரு வர்க்கக் காரணி வீதம் சில வர்க்கக் காரணிகளும் மற்ற மூலங்களுக்கு ஒரு படிக் காரணி (linear factor) களும் அடங்கிய பெருக்கமாக f (x)-ஐ எழுத முடியும். f (x) = 0 இன் மெய் மூலங்களை ஒரு படிக் காரணிகளிலிருந்தும், சிக்கல் மூலங்களை வர்க்கக் காரணிகளிலிருந்தும் பெறலாம். மூலங்களை வர்க்கப் படுத்தும் முறையைப் பயன்படுத்தும்போது, குணகங்களின் வர்க்கங் களுக்குக் கீழ் வரிசையில் எழுதப்படும் இரு மடங்குப் பெருக்கங் களுள் ஏதாவது ஒன்றை அதற்கு நேர் மேலுள்ள வர்க்கத்தினுல் வகுத்துக் கிடைக்கப்படும் ஈவு புறக்கணிக்கத் தக்க அளவு சிறியதாக யில்லாவிடில், வர்க்கப்படுத்தப்பட்ட சமன்பாட்டில் அந்த இரு மடங்குப் பெருக்கத்திற்குரிய குணகத்திலிருந்தும், அதற்கு இரு பக்கமுமுள்ள குணகங்களிலிருந்தும் அமைக்கப்படும் வர்க்கக் காரணியிலிருந்து ஒரு சோடி சிக்கல் மூலங்களைப் பெறலாம். கீழ்க் காணும் மாதிரிக் கணக்கிலிருந்து சிக்கல் மூலங்களைக் கணக்கிடும் முறை நன்கு விளங்கும்.

மாதிரி 31

$x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களையும் காண்க.

மூலங்களைத் தனிமைப்படுத்தப் பயன்படும் கணிப்புக்கள் அடுத்துள்ள பக்கங்களிலுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களின் 256-ஆம் படிகளை மூலங்களாகவுடைய சமன்பாட்டைக் காரணிப் படுத்தத் தேவையான கணிப்புக்களை அட்டவணையில் காணலாம்.

	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
f (x)	1	0	−2	0	−3	4	−5	6
	1	0 −4 n	4 0 c −6 n	0 12 n 0 c −10 n	9 0 c 20 n 0 c	−16 30 n 0 c	25 −48 c	−36
2-ஆம்படி	1	−4	−2	2	20	14	−23	−36
	1	−16 −4 n	4 16 c 58 n	−4 −116 n 112 c −46 n	8·41 (10^2) −0·56 (10^2) c 0·92 (10^2) n −2·88 (10^2) c	−1·96 (10^2) −13·34 (10^2) n 1·44 (10^2) c	5·29 (10^2) 10·08 (10^2) c	−1·296 (10^3)
4-ஆம்படி	1	−20	7·8 (10)	−5·4 (10)	5·89 (10^2)	−1·386 (10^3)	1·537 (10^3)	−1·296 (10^3)
	1	−4·00 (10^2) 1·56 (10^2) n	6·084 (10^3) −2·160 (10^3) c 1·178 (10^3) n	−0·2916 (10^4) 9·1884 (10^4) n −5·5440 (10^4) c 0·3074 (10^4) n	3·4692 (10^5) −1·4909 (10^5) c 2·3977 (10^5) n −0·5194 (10^5) c	−1·9210 (10^6) 1·8106 (10^6) n −0·1400 (10^6) c	2·3624 (10^6) −3·5925 (10^6) c	−1·680 (10^6)
8-ஆம்படி	1	−2·44 (10^2)	5·102 (10^3)	3·660 (10^4)	3·852 (10^5)	−0·2504 (10^6)	−1·230 (10^6)	−1·680 (10^6)
	1	−5·9536 (10^4) 1·0204 (10^4) n	2·6030 (10^7) 1·7861 (10^7) c 0·0770 (10^7) n	−1·3396 (10^9) 3·9306 (10^9) n −0·1222 (10^9) c −0·0025 (10^9) n	1·4838 (10^{11}) 0·1833 (10^{11}) c −0·1255 (10^{11}) n −0·0082 (10^{11}) c	−0·6270 (10^{11}) −9·4759 (10^{11}) n 1·2298 (10^{11}) c	1·5129 (10^{12}) −0·8413 (10^{12}) c	−2·8224 (10^{12})
16-ஆம்படி	1	−4·933 (10^4)	4·466 (10^7)	2·466 (10^9)	1·533 (10^{11})	−8·873 (10^{11})	0·6716 (10^{12})	−2·822 (10^{12})

	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
16ஆம்படி	1	−4·933 (10^{4})	4·466 (10^{7})	2·466 (10^{9})	1·533 (10^{11})	−8·873 (10^{11})	0·6716 (10^{12})	−2·822 (10^{12})
	1	−2·433 (10^{9}) 0·089 (10^{9}) n	1·9945 (10^{15}) 0·2433 (10^{15}) c 0·0003 (10^{15}) n	−0·6081 (10^{19}) 1·3693 (10^{19}) n −0·0088 (10^{19}) c * * *	2·350 (10^{22}) 0·438 (10^{22}) c 0·006 (10^{22}) n * * *	−7·873 (10^{23}) 2·059 (10^{23}) n 0·139 (10^{23}) c	0·4510 (10^{24}) −5·0079 (10^{24}) c	−7·964 (10^{24})
32ஆம்படி	1	−2·344 (10^{9})	2·238 (10^{15})	0·7524 (10^{19})	2·794 (10^{22})	−5·675 (10^{23})	−4·557 (10^{24})	−7·964 (10^{24})
	1	−5·494 (10^{18}) 0·004 (10^{18}) n	5·009 (10^{30}) 0·035 (10^{30}) c * * *	−0·5661 (10^{38}) 1·2502 (10^{38}) n * * *	7·806 (10^{44}) 8·085 (10^{44}) c * * *	−3·221 (10^{47}) −2·546 (10^{47}) n 0·001 (10^{47}) c	2·077 (10^{49}) −0·904 (10^{49}) c	−6·343 (10^{49})
64ஆம்படி	1	−5·490 (10^{18})	5·044 (10^{30})	6·841 (10^{37})	7·891 (10^{44})	−5·766 (10^{47})	1·173 (10^{49})	−6·343 (10^{49})
	1	−3·014 (10^{37}) * * * n	2·544 (10^{61}) * * * c	−4·680 (10^{75}) 7·960 (10^{75}) n	6·227 (10^{89}) 0·001 (10^{89}) c	−3·325 (10^{95}) 0·185 (10^{95}) n	1·376 (10^{98}) −0·731 (10^{98})	−4·023 (10^{99})
128ஆம்படி	1	−3·014 (10^{37})	2·544 (10^{61})	3·280 (10^{75})	6·228 (10^{89})	−3·140 (10^{95})	0·645 (10^{98})	−4·023 (10^{99})
	1	−9·084 (10^{74}) * * * n	6·472 (10^{122}) * * * c	−1·076 (10^{151}) 3·169 (10^{151}) n	3·879 (10^{179}) * * * c	−9·860 (10^{190}) 0·008 (10^{190}) n * * *	0·416 (10^{196}) −0·253 (10^{196}) c	−1·618 (10^{198})
256ஆம்படி	1	−9·084 (10^{74})	6·472 (10^{122})	2·093 (10^{151})	3·879 (10^{179})	−9·852 (10^{190})	0·163 (10^{196})	−1·618 (10^{198})

அட்டவணையின் கடைசி வரிசையில் நான்காவது பத்தியிலுள்ள $2{\cdot}093\ (10^{151})$ என்ற குணகத்திற்கு நேர் மேலேயுள்ள $3{\cdot}169$ என்ற இருமடங்குப் பெருக்கத்தை அதற்கு நேர் மேலேயுள்ள $1{\cdot}076\ (10^{151})$ என்ற வர்க்கத்தினுல் வகுத்தால் தோராயமாக $2{\cdot}94$ என்று கிடைக்கிறது. இது புறக்கணிக்கத் தக்க அளவு சிறியதாக இல்லை. ஆகவே, $2{\cdot}093\ (10^{151})$, $6{\cdot}472\ (10^{122})$, $3{\cdot}879\ (10^{179})$ ஆகிய குணகங்களைக் கொண்டு அமைக்கப்படும்.

$$6{\cdot}472\ (10^{122})\ y^2 + 2{\cdot}093\ (10^{151})\ y + 3{\cdot}879\ (10^{179}) = 0 \ldots (1)$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து ஒரு சோடி சிக்கல் மூலங்களைப் பெறலாம். இதுபோல், $0{\cdot}163\ (10^{196})$-ஐயும் அதற்கு இரு பக்கமுமுள்ள $-9{\cdot}852\ (10^{190})$, $-1{\cdot}618\ (10^{199})$ ஆகியவற்றையும் கொண்டு அமைக்கப்படும்

$$-9{\cdot}852\ (10^{190})\ y^2 + 0{\cdot}163\ (10^{196})\ y - 1{\cdot}618\ (10^{199}) = 0 \ldots (2)$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து மற்றொரு சோடி சிக்கல் மூலங்களைக் காணலாம். முதலில், $f(x) = 0$ இன் மெய் மூலங்களைக் கீழ்க் கண்டவாறு பெறுக.

அட்டவணையிலிருந்து கிடைக்கப்படும் $f(x^{256}) = 0$ என்ற சமன்பாட்டை மூன்று ஒருபடிக் காரணிகளாகவும், இரண்டு வர்க்கக் காரணிகளாகவும் (quadratic factors) பிரிக்கலாம். மூன்று ஒருபடிக் காரணிகளிலிருந்து மூன்று மெய் மூலங்களும் இரண்டு வர்க்கக் காரணிகளிலிருந்து நான்கு சிக்கல் மூலங்களும் கிடைக்கின்றன. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 என்பன $f(x) = 0$ இன் ஏழு மூலங்கள் எனக் கொண்டால் அவற்றுள் x_1, x_2, x_5 ஆகியவை மெய் மூலங்கள் எனவும், x_3, x_4, x_6, x_7 ஆகியவை சிக்கல் மூலங்கள் எனவும் ஆகும். அட்டவணையிலிருந்து, x_1 கிடைக்கக் கூடிய சமன்பாடு வருமாறு :

$$x_1^{256} - 9{\cdot}084\ (10^{74}) = 0.$$

$$\therefore x_1^{256} = 9{\cdot}084\ (10^{74})$$

$$256 \log x_1 = 74 + \log 9{\cdot}084$$

$$\therefore x_1 = \frac{74 + \log 9{\cdot}084}{256}$$

மடக்கைப் பட்டியலைப் பயன்படுத்திச் சுருக்கினுல்,

$$x_1 = 1{\cdot}9625$$

என்று கிடைக்கிறது.

x_2 கிடைக்கப்படும் சமன்பாடு வருமாறு :

$$-9{\cdot}084\ (10^{74})\ x_2^{256} + 6{\cdot}472\ (10^{122}) = 0$$

$$\therefore \quad x_2 = 1{\cdot}5379$$

இதுபோல்,

$$3{\cdot}879\ (10^{179})\ x_5^{256} - 9{\cdot}852\ (10^{190}) = 0$$

$$\therefore\ x_5 = 1{\cdot}1080$$

மேலும் $f(x) = 0$க்கு ஒரு எதிர் மூலத்திற்கு மேல் இருக்க முடியாதென்பதை எளிதில் காணலாம். ஆகவே, மற்ற இரு மெய் மூலங்களும் நேர் மூலங்களாகும். இப்பொழுது x_1 இன் தோராய மதிப்பாகிய $x_1 = \pm 2$ ஐ $f(x) = 0$ இல் பிரதியிட, $x_1 = -2$ ஆனது $f(x) = 0$-ஐத் தோராயமாகச் சமன்படுத்துவதைக் காணலாம். ஆகவே, x_1 என்பது எதிர் மூலமாகும். எனவே, x_2, x_5 என்பன நேர் மூலங்களாகும்.

$$\therefore\ x_1 = -1{\cdot}9625,\ x_2 = 1{\cdot}5379,\ x_5 = 1{\cdot}1080.$$

இப்பொழுது, வர்க்கச் சமன்பாடு (1) இன் மூலங்களை $u_1 \pm i\,v_1$ என்றும், வர்க்கச் சமன்பாடு (2) இன் மூலங்களை $u_2 \pm i\,v_2$ என்றும் கொள்க. u_1, u_2, v_1, v_2 ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் கீழ்க் கண்டவாறு பெறலாம்.

$x^2+bx+c = 0$ என்ற வர்க்கச் சமன்பாட்டைக் கருதுக. இச் சமன்பாட்டின் சிக்கல் மூலங்களை

$$r\ (\cos\theta + i\sin\theta),\ r\ (\cos\theta - i\sin\theta)$$

என்று கொள்க.

$$\therefore\ x^2 + bx + c \equiv x^2 - (2\,r\cos\theta)\,x + r^2 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore\ r^2 = c$$

இப்பொழுது, சமன்பாடு (1)ஐக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுக.

$$y^2 + \frac{2{\cdot}093\times10^{151}}{6{\cdot}472\times10^{122}}\,y + \frac{3{\cdot}879\times10^{179}}{6{\cdot}472\times10^{122}} = 0.$$

இச் சமன்பாட்டின் சிக்கல் மூலங்களை

$u_1 \pm i\,v_1 \equiv r_1\ (\cos_1 \pm i\sin\theta_1)$ என்று கொள்க.

$$\therefore\ (r_1^{256})^2 = \frac{3{\cdot}879\times10^{179}}{6{\cdot}472\times10^{122}}$$

$$= \frac{3{\cdot}879\times10^{57}}{6{\cdot}472}$$

மடக்கைக் கணிப்பின் மூலம் $r_1 = 1{\cdot}2909$ என்று காணலாம்.

இதுபோல், வர்க்கச் சமன்பாடு (2)-இன் மூலங்களை

$$u_2 \pm iv_2 = v_2\ (\cos\theta_2 \pm i\sin\theta_2)$$

என்று கொண்டால்,

$$(r_2^{256})^2 = \frac{1{\cdot}618\times10^{199}}{9{\cdot}852\times10^{190}}$$

ஆகும். அதாவது,

$$r_2^{512}=\frac{1\cdot618\times10^9}{9\cdot852}$$

மடக்கைக் கணிப்பின் மூலம்,

$r_2=1\cdot0618$ என்று காணலாம்.

இப்பொழுது கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடாகிய

$f(x)\equiv x^7-2x^5-3x^3+4x^2-5x+6=0$-இலிருந்து,

சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களின் கூட்டுப் பலன் 0-என்று காண்கிறோம். அதாவது,

$$x_1+x_2+u_1+iv_1+u_1-iv_1+x_5+u_2+iv_2+u_2-iv_2=0.$$

அதாவது, $x_1+x_2+x_5+2(u_1+u_2)=0.$

$$-1\cdot9625+1\cdot5379+1\cdot1080+2(u_1+u_2)=0$$

$$0\cdot6834+2(u_1+u_2)=0$$

$$\therefore\ 2(u_1+u_2)=-0\cdot6834$$

அல்லது, $u_1+u_2=-0\cdot3417$ ... ... (3)

மேலும், $f\left(\frac{1}{x}\right)\equiv6x^7-5x^6+4x^5-3x^4-2x^2+1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{u_1\pm iv_1},\frac{1}{x_5},\frac{1}{u_2\pm iv_2}$ ஆகும்.

$$\therefore\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{u_1+iv_1}+\frac{1}{u_1-iv_1}+\frac{1}{x_5}+\frac{1}{u_2+iv_2}+\frac{1}{u_2-iv_2}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_5}+\frac{u_1-iv_1+u_1+iv_1}{u_1^2+v_1^2}+\frac{u_2-iv_2+u_2+iv_2}{u_2^2+v_2^2}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_5}+\frac{2u_1}{u_1^2+v_1^2}+\frac{2u_2}{u_2^2+v_2^2}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_5}+\frac{2u_1}{r_1^2}+\frac{2u_2}{r_2^2}=\frac{5}{6}$$

ஆனல், $\frac{1}{x_1}=\frac{1}{-1\cdot9635}=-0\cdot508386$

$$\frac{1}{x_2}=\frac{1}{1\cdot5379}=\quad0\cdot6502374$$

$$\frac{1}{x_5}=\frac{1}{1\cdot1080}=\quad0\cdot902527$$

$$\frac{1}{r_1^2}=\frac{1}{(1\cdot2909)^2}=0\cdot60010$$

$$\frac{1}{r_2^2}=\frac{1}{(1\cdot0618)^2}=0\cdot88698$$

$$\therefore -0\cdot508386+0\cdot6502374+0\cdot902527+1\cdot20020\,u_1+1\cdot77396\,u_2=0\cdot833333$$

அதாவது, $1\cdot20020\,u_1+1\cdot77396\,u_2=-0\cdot211045$ ... (4)

(3), (4) ஆகிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

$$u_1=-0\cdot6445$$

$$u_2=\ \ 0\cdot3028$$

மேலும், $u_1^2+v_1^2=r_1^2$

$$\therefore v_1^2=r_1^2-u_1^2$$

$$=(1\cdot2909)^2-(-0\cdot6445)^2$$

$$=1\cdot9354\times0\cdot6464$$

$$\therefore\ v_1=\sqrt{1\cdot9354\times0\cdot6464}$$

$$=1\cdot1185.$$

இதுபோல், $v_2=1\cdot018$ என்று காணலாம்.

ஆகவே, இரு சோடி சிக்கல் மூலங்களாவன :

$$-0\cdot6445\pm1\cdot1185\,i$$

$$0\cdot3028\pm1\cdot018\,i$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களாவன :—

$$-1\cdot9625,\ 1\cdot5379,\ 1\cdot1080,$$

$$-0\cdot6445\pm1\cdot1185\,i,$$

$$0\cdot3028\pm1\cdot018\,i.$$

வகை (iii)

$f(x)=0$-இன் ஏதாவது இரு மூலங்கள் சமமாகவும் எதிர் அடையாளமுடனுமிருந்தால், கீழே விளக்கப்பட்டுள்ள மாதிரியைப் பின்பற்றி மூலங்களைக் கணக்கிடலாம்.

மாதிரி 32

$5x^3+2x^2-15x-6=0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

அட்டவணைக் கணிப்பு அடுத்துள்ள பக்கத்தில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

	x^3	x^2	x^1	x^0
f (x)	5	2	—15	—6
	25	–4 –150 n	225 24 c	—36
2ஆம்படி	25	–1·54 (10^2)	2·49 (10^2)	—36
	6·25 (10^2)	—2·3716 (10^4) 1·2450 (10^4) n	6·2001 (10^4) —1·1008 (10^4) c	—1·296 (10^3)
4ஆம்படி	6·25 (10^2)	—1·1266 (10^4)	5·0[illegible]93 (10^4)	—1·296 (10^3)
	3·9062 (10^5)	—1·269 (10^8) 0·637 (10^8)	2·600 (10^9) —0·029 (10^9) c	—1·680 (10^6)
8ஆம்படி	3·906 (10^5)	—0·632 (10^8)	2·571 (10^9)	—1·680 (10^6)
	1·526 (10^{11})	—3·994 (10^{15}) 2·008 (10^{15}) n	6·610 (10^{18}) * * *	—2·822 (10^{12})
16ஆம்படி	1·526 (10^{11})	—1·986 (10^{15})	6·610 (10^{18})	—2·822 (10^{12})

அட்டவணையிலிருந்து கீழ்க்கண்ட எளிய சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$6{\cdot}610\ (10^{18})\ x_3^{16} - 2{\cdot}822\ (10^{12}) = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$1{\cdot}526\ (10^{11})\ x_1^{32} - 1{\cdot}986\ (10^{15})\ x_1^{16} + 6{\cdot}610\ (10^{18}) = 0 \qquad \ldots \qquad (2)$$

சமன்பாடு (1)-இலிருந்து

$x_3 = 0{\cdot}3999$ என்று காணலாம்.

சமன்பாடு (2)-இலிருந்து

$$x_1^{32} - \frac{1{\cdot}986\ (10^4)}{1{\cdot}526} x_1^{16} + \frac{6{\cdot}610 \times 10^7}{1{\cdot}526} = 0$$

இச்சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களும் சமமாகயிருப்பதால், மூலங்களின் பெருக்கம்

$$x_1^{16} \times x_1^{16} = \frac{6{\cdot}610 \times 10^7}{1{\cdot}526}$$

அதாவது, $x_1^{32} = \frac{6{\cdot}610 \times 10^7}{1{\cdot}5_6}$

மடக்கைக் கணிப்பின் மூலம்

$x_1 = \pm 1{\cdot}732$ என்று காணலாம்.

அதாவது,

$x_1 = 1{\cdot}732$,

$x_2 = -1{\cdot}732$ ஆகும்.

மேலும், $x_3 = 0{\cdot}3999$-இன் தோராய மதிப்பு 0·4 ஆகும். ஆகவே, $x = \pm 0{\cdot}4$ என்று f (x) = 0-இல் பிரதியிட, $x = -0{\cdot}4$ என்பது f (x) = 0ஐத் தோராயமாகச் சமன்படுத்துவதைக் காணலாம். ஆகவே, f (x) = 0-இன் மூன்று மூலங்கள்

$x_1 = 1{\cdot}732$, $x_2 = -1{\cdot}732$, $x_3 = -0{\cdot}3999$ ஆகும்.

பயிற்சி 6

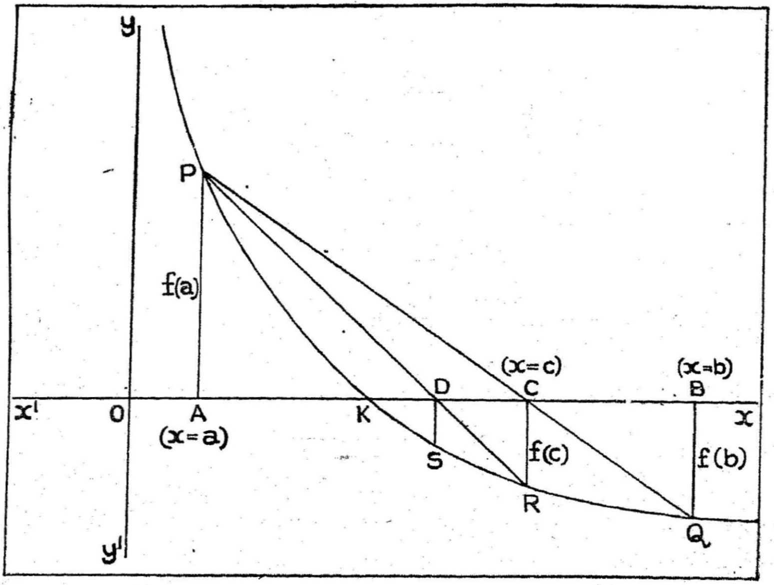
கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளின் எல்லா மூலங்களையும் கணக்கிடுக :

1. $x^4 + 7{\cdot}18\,x^3 + 19{\cdot}41\,x^2 + 1{\cdot}83\,x + 2 = 0$
2. $3{\cdot}26\,x^5 + 4{\cdot}2\,x^4 + 3{\cdot}08\,x^3 - 7{\cdot}16\,x^2 + 1{\cdot}92\,x - 7{\cdot}76 = 0$
3. $x^6 - 6\,x^5 + 3\,x^4 + 5\,x^3 - 6\,x + 2 = 0$
4. $x^7 + 3\,x^4 + 6 = 0$.

2.11. பிழைநிலை முறை (Method of False Position)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள f(x) = 0 என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மெய் மூலம் a க்கும் b க்குமிடையேயிருப்பதாகக் கொள்வோம். எனவே, y = f (x) இன் வளைவு வரைப்படத்தில் x - அச்சில் x = a என்ற புள்ளி (A) க்கும் x = b என்ற புள்ளி (B) க்குமிடையே x - அச்சைக் கடந்து செல்லும். x = a ஆகயிருக்கும்போது y = f (a) ஆகும். x = b ஆகயிருக்கும்போது y = f (b) ஆகும். ஆகவே, P [a, f (a)], Q [b, f(b)] என்ற புள்ளிகள் y = f(x) இன் வளைவின் மேல் அமைந்திருக்கும் புள்ளிகளாகும். Aயும் Bயும் மிகவும் நெருங்கியிருக்கும்

மூலத்தைக் கணக்கிட கீழே விளக்கப்பட்டுள்ள பிழை நிலைமுறை பயன்படுகிறது. (படம் 4ஐப் பார்க்கவும்)



படம் 4

P, Q ஐ ஒரு நேர்கோட்டினால் சேர்த்து, அந்த நேர்கோடு x-அச்சை வெட்டும் புள்ளியை C என்று குறிக்கவும். C-யில் x-அச்சுக்கு ஒரு செங்குத்துக்கோடு வரைந்து, அது வளைவை வெட்டும் புள்ளியை R என்று குறிக்கவும். Cயின் x-அச்சுத் தூரம் c என்றால், CR=f(c) ஆகும். பின்னர், PRஐ ஒரு நேர்கோட்டினால் சேர்த்து, அது x-அச்சை வெட்டும் புள்ளியை D என்று குறிக்கவும். Dயில் x-அச்சுக்கு ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைந்து, அது வளைவை வெட்டும் புள்ளியை S என்று குறிக்கவும். Dயின் x-அச்சுத் தூரம் d என்றால் DS = f(d) ஆகும். இம் முறையைத் தொடர்ந்து செய்து வந்தால், B, C, D,...... ஆகிய புள்ளிகள் y=f(x) இன் வளைவு x-அச்சை வெட்டும் புள்ளியாகிய Kயை நெருங்கி வருவதைக் காணலாம். B, C, D,...... என்ற தொடரின் இறுதியில் கிடைக்கும் புள்ளியின் x-அச்சுத்தூரம் நமக்குத் தேவையான f(x) = 0 இன் மூலத்தின் மதிப்பைக் கொடுக்கும்.

படம் 4 இலிருந்து, $\triangle PAC$ ||| $\triangle QBC$ என்று அறிகிறோம்.

$$\therefore \frac{AP}{BQ} = \frac{AC}{CB}$$

AP, BQ ஆகியவற்றின் எண்ணளவைகளை (modulii) மட்டும் கருதினல்

$$\frac{|f(a)|}{|f(b)|} = \frac{c-a}{b-c}$$

$$\therefore \quad (c-a)\,|f(b)| = (b-c)\,|f(a)|$$

அதாவது, $c[\,|f(a)| + |f(b)|\,] = b\,|f(a)| + a\,|f(b)|$

$$= a(\,|f(a)| + |f(b)|\,) - a\,|f(a)| + b\,|f(a)|$$
$$= a(\,|f(a)| + |f(b)|\,) + (b-a)\,|f(a)|$$

$$\therefore \quad c = a + \frac{(b-a)\,|f(a)|}{|f(a)| + |f(b)|}$$

இதேபோல், இதற்கடுத்தத் தோராய மதிப்பாகிய $x = d$ என்பது

$$d = a + \frac{(c-a)\,|f(a)|}{|f(a)| + |f(c)|}$$

என்ற தொடர்பிலிருந்து கிடைக்கும். இம் முறையை மேலும் மேலும் தொடர்ந்து செய்து மூலத்தின் சரியான மதிப்பைத் தேவை யான அளவு துல்லியமாகப் பெறலாம்.

மாதிரி 33

$x^3 - 2x - 5 = 0$ இன் மெய் மூலத்தை பிழைநிலை முறையில் ஐந்து தசம இடங்களுக்குத் துல்லியமாகக் கணக்கிடுக.

$f(x) \equiv x^3 - 2x - 5 = 0$ எனக் கொள்க.

$f(2) = 8 - 4 - 5 = -1 < 0$

$f(3) = 27 - 6 - 5 = 16 > 0$

$\therefore$ $f(x) = 0$ இன் மூலம் 2க்கும் 3க்குமிடையேயுள்ளது.

மேலும் $f(2{\cdot}1) = 9{\cdot}261 - 4{\cdot}2 - 5 = 0{\cdot}061 > 0$

ஆகவே அந்த மூலம் 2க்கும் 2·1க்குமிடையேயுள்ளது. மேலும் $f(2{\cdot}1)$ நேர் மதிப்பையும், $f(2)$ எதிர் மதிப்பையும் கொண்டுள்ளதால், $a = 2{\cdot}1$, $b = 2$ எனக் கொள்க.

$|f(a)| = |f(2{\cdot}1)| = 0{\cdot}061$

$|f(b)| = |f(2)| = 1$

$b - a = 2 - 2{\cdot}1 = -0{\cdot}1$

$$\therefore \quad c = a + \frac{(b-a)\,|\,f(a)\,|}{|\,f(a)\,| + |\,f(b)\,|}$$

$$= 2{\cdot}1 + \frac{(-0{\cdot}1)\,(0{\cdot}061)}{0{\cdot}061 + 1}$$

$$= 2{\cdot}1 - \frac{0{\cdot}0061}{1{\cdot}061}$$

$$= 2{\cdot}1 - 0{\cdot}0057$$

$$= 2{\cdot}0943$$

மீண்டும் இம் முறையைப் பயன்படுத்தவும்.

$$f(c) = f(2{\cdot}0943) = (2{\cdot}0943)^3 - 2(2{\cdot}0943) - 5$$

$$= 9{\cdot}1858 - 4{\cdot}1886 - 5$$

$$= -0{\cdot}0028$$

$$\therefore \quad |\,f(c)\,| = 0{\cdot}0028$$

$$c - a = 2{\cdot}0943 - 2{\cdot}1 = -0{\cdot}0057$$

$$d = a + \frac{(c-a)\,|\,f(a)\,|}{|\,f(a)\,| + |\,f(c)\,|}$$

$$= 2{\cdot}1 + \frac{(-0{\cdot}0057)\,(0{\cdot}061)}{0{\cdot}061 + 0{\cdot}0028}$$

$$= 2{\cdot}1 - 0{\cdot}00545$$

$$= 2{\cdot}09455$$

ஆகவே, $f(x) = 0$ இன் மூலம் $= 2{\cdot}09455$.

பயிற்சி 7

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் மெய் மூலங்களை ஐந்து தசம இடங்களுக்குப் பிழைநிலை முறையில் காண்க.

1. $x^3 - 3x + 1 = 0$
2. $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$
3. $x^3 - 7x + 7 = 0$
4. $x^3 - x - 9 = 0$
5. $x^3 - 4x^2 + 7 = 0$
6. $x\,e^x - 2 = 0$.

2.12. இலக்ராஞ்சியின் முறை (Lagrange's method)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை $f(x) = 0$ எனக் கொள்க. இதன் ஒரு மூலம் a_1க்கும் $a_1 + 1$க்குமிடையேயிருப்பதாகக்

கொள்வோம். அதன் சரியான மதிப்பு $a_1 + \frac{1}{y}$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும். ஆகவே, $f(x) = 0$ இன் மூலங்களிலிருந்து a_1 ஐக் குறைத்து, மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தலைகீழ் (reciprocal) மதிப்புக்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை $f_1(y) = 0$ எனக் கொள்வோம்.

இப்போது, $f_1(y)=0$ இன் நேர் மூலம் a_2க்கும் a_2+1க்குமிடையே யிருப்பதாகக் கொள்வோம். அதன் சரியான மதிப்பு $a_2 + \frac{1}{z}$ என்ற அமைப்பிலிருக்கும். ஆகவே, $f_1(y) = 0$ இன் மூலங்களிலிருந்து a_2 ஐக் குறைத்து, மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தலைகீழ் மதிப்புக்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை $f_2(z)=0$ எனக் கொள்வோம்.

இப்போது, $f_2(z) = 0$ இன் நேர் மூலம் a_3க்கும் a_3+1க்குமிடையேயிருப்பதாகக் கொள்வோம். அதன் சரியான மதிப்பு $a_3 + \frac{1}{u}$ என்ற அமைப்பிலிருக்கும். ஆகவே, $f_2(z) = 0$ இன் மூலங்களிலிருந்து a_3 ஐக் குறைத்து, மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தலைகீழ் மதிப்புக்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை $f_3(u)=0$ எனக் கொள்வோம். இதன் நேர் மூலம் a_4க்கும் a_4+1க்குமிடையேயிருப்பதாகக் கொண்டால் அதன் சரியான மதிப்பு $a_4 + \frac{1}{v}$ என்ற அமைப்பிலிருக்கும். இவ்வாறு இம் முறையைத் தொடர்ந்து செய்துவர, $f(x) = 0$ இன் மூலம் $a_1 + \frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{a_4+}$ ... ... என்ற தொடர் பின்ன வடிவில் கிடைக்கும்.

மாதிரி 34

$x^3 - 6x - 13 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் நேர் மூலத்தை இலக்ராஞ்சியின் முறைப்படிக் கணக்கிடுக.

இங்கு, $f(x) \equiv x^3 - 6x - 13 = 0$

$$f(3) = 27 - 18 - 13 = -4 < 0$$
$$f(4) = 64 - 24 - 13 = 27 > 0$$

$f(x) = 0$ இன் ஒரு மூலம் 3க்கும் 4க்குமிடையேயுள்ளது. ஆகவே, $a_1 = 3$ எனக் கொண்டு $f(x) = 0$ இன் மூலங்களிலிருந்து 3ஐக் குறைக்கவும்.

3	1	0	−6	−13
		3	9	9
		3	3	−4
		3	18	
		6	21	
		3		
		9		
	1			

மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு : $x^3+9x^2+21x-4=0$

இதன் மூலங்களைத் தலைகீழாக மாற்ற $x=\frac{1}{y}$ என்று பிரதியிட வேண்டும். இப்பொழுது மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு :

$$\frac{1}{y^3}+9\cdot\frac{1}{y^2}+21\cdot\frac{1}{y}-4=0$$

அதாவது, $1+9y+21y^2-4y^3=0$

அல்லது, $f_1(y)\equiv 4y^3-21y^2-9y-1=0$

$f_1(5)=500-525-45-1=-71<0$

$f_1(6)=864-756-54-1=53>0$

$f_1(y)=0$ இன்மூலம் 5க்கும் 6க்குமிடையேயுள்ளது. ஆகவே, $a_2=5$ எனக்கொண்டு, $f_1(y)=0$ இன் மூலங்களிலிருந்து 5ஐக் குறைக்கவும்.

5	4	−21	−9	−1
		20	−5	−70
		−1	−14	−71
		20	95	
		19	81	
		20		
		39		
	4			

மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு : $4y^3+39y^2+81y-71=0$

இதன் மூலங்களைத் தலைகீழாக மாற்ற $y=\frac{1}{z}$ என்று பிரதியிடவும்.

இப்பொழுது மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு :

$$\frac{4}{z^3}+\frac{39}{z^2}+\frac{81}{z}-71=0$$

அதாவது, $f_2(z) \equiv 71z^3 - 81z^2 - 39z - 4 = 0$

$$f_2(1) = 71 - 81 - 39 - 4 < 0$$
$$f_2(2) = 568 - 322 - 78 - 4 > 0$$

$f_2(z) = 0$ இன் மூலம் 1க்கும் 2க்குமிடையேயுள்ளது. $\therefore a_3 = 1$.
ஆகவே $f_2(z) = 0$ இன் மூலங்களிலிருந்து 1ஐக் குறைக்கவும்.

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 71 & -81 & -39 & -4 \\
 & & 71 & -10 & -49 \\ \hline
 & & -10 & -49 & -53 \\
 & & 71 & 61 & \\ \hline
 & & 61 & 12 & \\
 & & 71 & & \\ \hline
 & & 132 & & \\ \hline
 & 71 & & &
\end{array}$$

மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு: $71z^3 + 132z^2 + 12z - 53 = 0$

இதன் மூலங்களைத் தலைகீழாக மாற்ற $z = \frac{1}{u}$ எனப் பிரதியிடவும்.

இப்பொழுது மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு:

$$\frac{71}{u^3} + \frac{132}{u^2} + \frac{12}{u} - 53 = 0$$

அதாவது, $71 + 132u + 12u^2 - 53u^3 = 0$

அதாவது, $f_3(u) \equiv 53u^3 - 12u^2 - 132u - 71 = 0$

$$f_3(1) = 53 - 12 - 132 - 71 < 0$$
$$f_3(2) = 424 - 48 - 264 - 71 > 0$$

ஆகவே, $f_3(u)$ இன் மூலம் 1க்கும் 2க்குமிடையேயுள்ளது. $\therefore a_4 = 1$

ஆகவே, $f(x) = 0$ இன் மூலம் $= a_1 + \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_4}$

$$= 3 + \frac{1}{5+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1}$$
$$= 3 + \frac{1}{5+}\ \frac{1}{1+1}$$
$$= 3 + \frac{1}{5+\frac{1}{2}}$$
$$= 3 + \frac{1}{\frac{11}{2}}$$

$$=3+\frac{2}{11}$$

$$=\frac{35}{11}$$

$$=3{\cdot}1818.$$

பயிற்சி 8

இலக்ராஞ்சியின் முறையைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் நேர் மூலங்களைத் தொடர் பின்னங்களாகக் காண்க.

1. $x^3+2x^2-23x-70=0$
2. $x^3-2x-5=0$
3. $x^3-25=0$
4. $x^3-30=0.$

2.13 காடனின் முறை (Cardan's method)

முப்படிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க காடனின் முறையைப் பயன்படுத்தலாம். $f(x)\equiv x^3+ax^2+bx+c=0$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள முப்படிச் சமன்பாடு எனக் கொள்வோம். இச் சமன்பாட்டை x^2 உறுப்பு இல்லாத சமன்பாடாக $t^3-qt-r=0$ என்ற அமைப்பில் மாற்றலாம். இதில், $t=y+z$ என்று பிரதியிட,

$$(y+z)^3-q(y+z)-r=0,$$

அதாவது, $y^3+z^3+3yz(y+z)-q(y+z)-r=0,$

அதாவது, $y^3+z^3-r+(y+z)(3yz-q)=0$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

இப்பொழுது, $3yz-q=0$ எனக் கொள்வோமானால்,

$$yz=\frac{q}{3},\quad \text{அல்லது,}\quad z^3=\frac{q^3}{27y^3}$$ என்று கிடைக்கும்.

எனவே, அச்சமன்பாடு $y^3+z^3-r=0$ என்று மாறுகிறது.

அதாவது, $y^3+\frac{q^3}{27y^3}-r=0$

அல்லது $(y^3)^2-ry^3+\frac{q^3}{27}=0$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும்.

இப்பொழுது $y^3=u$ என்று பிரதியிடவும்.

ஆகவே, $u^2-ru+\frac{q^3}{27}=0$

$$\therefore \ y^3 = u = \frac{r}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{r^2 - \frac{4q^3}{27}}$$ (நேர் மதிப்பு மட்டும்)

ஆகவே, $z^3 = r - y^3$

$$= \frac{r}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{r^2 - \frac{4q^3}{27}}$$

இவைகளிலிருந்து y, z ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பெறலாம். ஆகவே $t = y + z$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து t-யின் மதிப்பைப் பெற்று, அதிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்களைப் பெறலாம்.

மேற்கண்ட முறைக்குக் காடனின் முறை (Cardan's method) என்று பெயர். ஆனால் இது முப்பாகுபாடு முறை (Trisection method) என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

மாதிரி 35

காடனின் முறையைப் பயன்படுத்தி $x^3 + 3x^2 + 5x - 27 = 0$ இன் மெய் மூலத்தை மூன்று தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

(சென்னை '68 ஏப்., செப்.)

$$f(x) \equiv x^3 + 3x^2 + 5x - 27 = 0.$$

இச்சமன்பாட்டை x^2 உறுப்பு இல்லாத சமன்பாடாக மாற்ற அதன் மூலங்களிலிருந்து $h = -\frac{3}{3} = -1$ ஐக் குறைக்க வேண்டும்.

−1	1	3	5	−27
		−1	−2	−3
		2	3	−30
		−1	−1	
		1	2	
		−1		
		0		
	1			

மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு: $t^3 + 2t - 30 = 0$

இங்கு $q = -2, \ r = 30$

இப்பொழுது, $t = y + z$ என்று பிரதியிட்டு, $3yz = q$ எனக் கொண்டால்,

$$y^3 = \frac{r}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{r^2 - \frac{4q^3}{27}}$$

$$= \frac{30}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{900 + \frac{32}{27}}$$
$$= 15 + \tfrac{1}{2}\sqrt{901{\cdot}185185}$$
$$= 15 + \tfrac{1}{2}\,(30{\cdot}01974)$$
$$= 15 + 15{\cdot}00987$$
$$= 30{\cdot}00987$$
$$\therefore\ y = (30{\cdot}00987)^{1/3} = 3{\cdot}1075$$
$$z^3 = \frac{r}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{r^2 - \frac{4\,q^3}{27}}$$
$$= 15 - 15{\cdot}00987$$
$$= -0{\cdot}00987$$
$$\therefore\ z = (-0{\cdot}00987)^{1/3} = -0{\cdot}21449$$

ஆகவே, $t = y + z = 3{\cdot}1075 - 0{\cdot}21449 = 2{\cdot}89301$ இதனுடன் -1ஐக் கூட்ட $f(x) = 0$ இன் மூலம் கிடைக்கும்.

ஆகவே, $f(x) = 0$ இன் மெய் மூலம் $= -1 + 2{\cdot}89301$
$= 1{\cdot}89301$

2·14 திரிகோணமிதி முறை (Trigonometric method)

$f(x) \equiv x^3 - qx - r = 0$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுக. இச் சமன்பாட்டில் $27r^2 \leq 4q^3$ ஆகயிருந்தால் எல்லா மூலங்களும் மெய்யாகயிருக்கும். கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங் களும் மெய்யாகயிருந்தால் மட்டுமே திரிகோணமிதி முறையைப் பயன்படுத்த முடியும். ஆகவே இம் முறையைப் பயன்படுத்து முன்

$$\triangle \equiv 27r^2 - 4q^3 \leq 0$$

என்ற நிபந்தனை பூர்த்தியாகிறதா என்பதைத் தெரிந்து கொள்ள வேண்டும்.

இப்பொழுது, $f(x) \equiv x^3 - qx - r = 0,$
$f(\theta) \equiv 4\cos^3\theta - 3\cos\theta - \cos 3\theta = 0$

என்ற இரு சமன்பாடுகளைக் கருதுக. இவ்விரு சமன்பாடுகளின் ஒத்த உறுப்புக்கள் ஒரே விகித சமமாக யிருக்குமாறு θ — இன் மதிப்பைக் காண்க.

அதாவது, $$\frac{x^3}{4\cos^3\theta} = \frac{qx}{3\cos\theta} = \frac{r}{\cos 3\theta}$$

$$\therefore\quad x^2 = \frac{4}{3}\,q\cos^2\theta, \qquad r = \frac{qx\cos 3\theta}{3\cos\theta}$$

$$\therefore\ x = 2\sqrt{\frac{q}{3}}\ \cos\theta, \quad \cos 3\theta = \frac{3r\cos\theta}{qx}$$

$$= \frac{3r\cos\theta}{q\cdot 2\sqrt{\frac{q}{3}}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}\ r}{2q\sqrt{q}} = \lambda$$ எனக் கொள்க.

q, r ஆகியவற்றின் மதிப்புக்கள் தெரியுமாதலால், λ-இன் மதிப்பைக் காண்பது எளிது. ஆகவே,

$\cos 3\theta = \lambda$-இலிருந்து θ-இன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

$\theta = \alpha$ என்பது θ-இன் மிகச் சிறிய மதிப்பு என்ருல்,

$$\theta = \alpha,\ \alpha + \frac{2\pi}{3},\ \alpha + \frac{4\pi}{3}$$

என்பன θ-இன் மூன்று மதிப்புக்களாகும். இம் மூன்று மதிப்புக் களையும் $x = 2\sqrt{\frac{q}{3}}\ \cos\theta$-இல் பிரதியிட்டால், $f(x) = 0$ இன் மூன்று மூலங்களும் கிடைக்கும்.

மாதிரி 36

திரிகோணமிதி முறையைப் பயன்படுத்தி $x^3 - 3x - 1 = 0$ இன் மூன்று மூலங்களையும் காண்க. (சென்னை' 68 ஏப்.)

$f(x) \equiv x^3 - 3x - 1 = 0$ எனக் கொள்க.

இங்கு, $q = 3$, $r = 1$ ஆகவே $\triangle = 27r^2 - 4q^3 = 27 - 108 < 0$.
ஆகவே, $f(x) = 0$ இன் மூன்று மூலங்களும் மெய் மூலங்களாகும் இப்பொழுது, $f(\theta) \equiv 4\cos^3\theta - 3\cos\theta - \cos 3\theta = 0$ என்ற சமன் பாட்டை $f(x) = 0$-வுடன் ஒப்பிடுக.

$$\frac{x^3}{4\cos 3\theta} = \frac{3x}{3\cos\theta} = \frac{1}{\cos 3\theta}$$

$$\therefore\ x^2 = 4\cos^2\theta \ \text{ அல்லது } \ x = 2\cos\theta.$$

மேலும், $\cos 3\theta = \frac{\cos\theta}{x} = \frac{\cos\theta}{2\cos\theta} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$$\therefore\ 3\theta = \frac{\pi}{3} \ \text{ அல்லது } \ \theta = \frac{\pi}{9}.$$

ஆகவே, θ இன் மூன்று மதிப்புக்கள் :

$$\theta_1 = \frac{\pi}{9},\ \theta_2 = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{9},\ \theta_3 = \frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{13\pi}{9}.$$

$f(x) = 0$ இன் மூலங்களை $x = 2\cos\theta$ என்ற தொடர்பிலிருந்து பெறலாம்.

அதாவது $x_1 = 2\cos\frac{\pi}{9} = 2\cos 20^\circ = 1{\cdot}87938,$

$$x_2 = 2\cos\frac{7\pi}{9} = 2\cos 140^\circ = 1{\cdot}53208,$$

$$x_3 = 2\cos\frac{13\pi}{9} = 2\cos 260^\circ = -0{\cdot}34730$$

என்பன $f(x) = 0$ இன் மூன்று மூலங்களாகும்.

பயிற்சி 9

1. காடனின் முறையைப் பயன்படுத்தி $x^3-7x+6 = 0$ இன் மூலங்களைக் காண்க.

2. $x^3-7x+1 = 0$ இன் மிகப் பெரிய மெய் மூலம் $2{\cdot}57$ என்று காட்டுக.

3. $x^3+3x^2+15x+25 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மெய் மூலத்தைக் காடனின் முறையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

4. $x^3-12x-8\sqrt{2} = 0$ இன் மூலங்கள் $4\cos\frac{\pi}{12}$, $4\cos\frac{3\pi}{12}$, $4\cos\frac{17\pi}{12}$ என்று காட்டுக.

5. $x^3-3x+1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $2\cos\frac{2\pi}{9}$, $2\cos\frac{8\pi}{9}$, $2\cos\frac{14\pi}{9}$ என்று காட்டுக.

6. திரிகோணமிதி முறையைப் பயன்படுத்தி $x^3-7x-7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

7. ஒரு மூன்றும் படிச் சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களையும் காணப் பயன்படும் திரிகோண மிதி முறையை விளக்குக. இம் முறையைப் பயன்படுத்தி $x^3-27x-17 = 0$ இன் மூலங்களைக் காண்க.

(சென்னை '67 ஏப்.)

2·15 வரைபட முறை (Graphical method)

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களை, வரைபடத் தாளில் $y = f(x)$ இன் வளைவை வரைந்து அவ் வளைவு x-அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளின் x-அச்சுத் தூரங்களிலிருந்து காணலாம் என்பதை முதல் அத்தியாயத்தில் கண்டோம். ஆனால் மூன்றும் அதற்கு

மேற்பட்ட படிகளைப் பெற்ற சமன்பாடுகளைக் கீழ்க்கண்ட வரைபட முறைகளில் தீர்க்கலாம்.

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டை $f(x) \equiv f_1(x) - f_2(x) = 0$ அல்லது $f_1(x) = f_2(x)$ என்ற அமைப்பில் $f_1(x)$, $f_2(x)$ என்ற இரு தனிச் சார்புகளைக் கொண்டு அமைக்கவும். பின்னர், $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ என்ற சமன்பாடுகளின் வளைவுகளை ஒரே வரைபடத் தாளில் வரையவும். இவ்விரு வளைவுகளும் வெட்டும் புள்ளிகளின் x-அச்சுத்தூரங்கள் நிச்சயமாக $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்யுமாகையால் அவை $f(x) = 0$ இன் மூலங்களாகின்றன. இம் முறையில், $f(x) = 0$ இன் எல்லா மூலங்களும் கிடைக்கப் பெரு விடில், கிடைக்கப் பெற்ற மூலங்களுக்குரிய காரணிகளால் $f(x)$ ஐ வகுத்த பின் கிடைக்கப் பெறும் சமன்பாட்டை வேறு முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்த்து எஞ்சிய மூலங்களைக் காணலாம்.

மாதிரி 37

$x^3 - 6x - 13 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் நேர் மூலத்தை வரைபட முறையில் காண்க.

$$f(x) \equiv x^3 - 6x - 13 = 0 \text{ எனக் கொள்க.}$$

இதை, $f(x) \equiv x^3 - (6x + 13) = 0$ என்று எழுதலாம்.

ஆகவே, $f_1(x) \equiv x^3$, $f_2(x) \equiv 6x + 13$ எனக் கொள்க.

இப்பொழுது, $y = x^3$, $y = 6x + 13$ என்ற சமன்பாடுகளின் வரை படங்களை ஒரே வரைபடத் தாளில் வரையவேண்டும்.

முதலில், $f(x) \equiv x^3 - 6x - 13 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுக.

$$f(3) = 27 - 18 - 13 = -4 < 0$$

$$f(4) = 64 - 24 - 13 = 27 > 0.$$

ஆகவே, $f(x) = 0$ இன் ஒரு மூலம் 3க்கும் 4க்குமிடையேயுள்ளது. அந்த மூலத்தைப் பட்டறி முறையில் (trial and error method) ஒரு தசம இடத்திற்குக் காண்க.

$$f(3.1) = 29.791 - 18.6 - 13 = -1.809 < 0$$

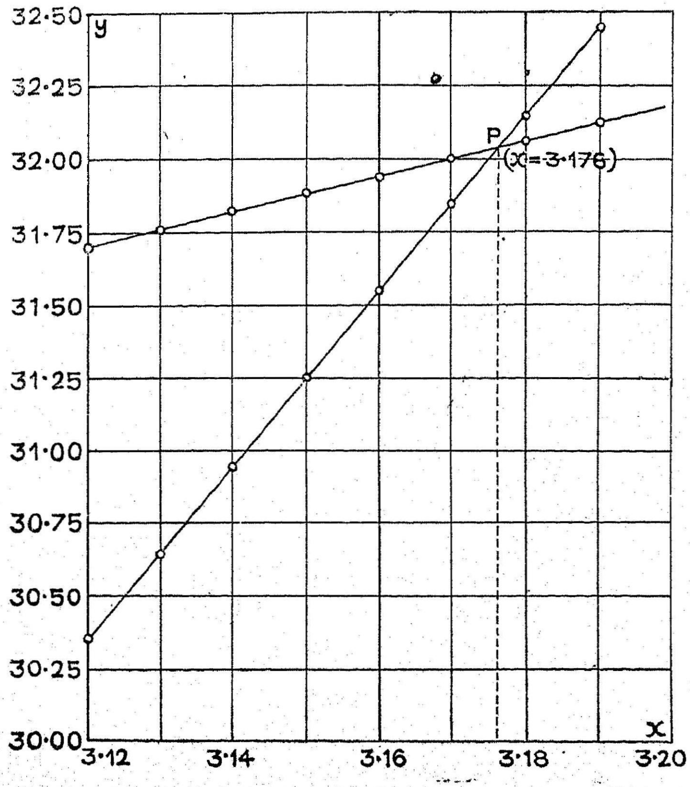
$$f(3.2) = 32.768 - 19.2 - 13 = 0.568 > 0$$

ஆகவே, அம் மூலம் 3·1க்கும் 3·2க்குமிடையே யுள்ளது.

இப்பொழுது 3·1க்கும் 3·2க்குமிடையேயுள்ள x இன் மதிப்புக் களுக்குரிய $f_1(x)$, $f_2(x)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் கீழ்க்கண்ட வாறு பட்டியல் படுத்தினால் $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ என்பனவற்றின் வரைபடங்களை வரைய உதவியாயிருக்கும்.

x	$f_1(x)$ $y = x^3$	$f_2(x)$ $y = 6x + 13$	$f_1(x) - f_2(x)$ $x^3 - (6x + 13)$
3·12	30·27	31·72	−
3·13	30·66	31·78	−
3·14	30·96	31·84	−
3·15	31·26	31·90	−
3·16	31·55	31·96	−
3·17	31·86	32·02	−
3·18	32·16	32·08	+
3·19	32·46	32·14	+

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து $f(x) \equiv f_1(x) - f_2(x)$ என்ற சார்பு 3·17க்கும் 3·18க்குமிடையே தன் அடையாளத்தை மாற்று



படம் 5

வதைக் காணலாம். ஆகவே, $f(x) = 0$ இன் மூலம் 3·17க்கும் 3·18க்குமிடையே யிருப்பதை அறிகிறோம்.

இப்பொழுது $y = x^3$, $y = 6x + 13$ என்ற சார்புகளின் வரை படங்களை ஒரே வரைபடத்தாளில் வரையவேண்டும். x, y-அச்சுக் களில் பெரிய அளவைகளாக (large scales) எடுத்துக் கொண்டால் இரு வரைபடங்களும் வெட்டும் புள்ளியின் x-அச்சுத் தூரத்தை மிகத் தெளிவாகக் கணக்கிடலாம்.

படம் 5 இல் இவ்விரு வரைப்படங்களும் P என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. Pயின் x-அச்சுத்தூரம் = OQ = 3·176. ஆகவே, $x^3 - 6x - 13 = 0$ இன் நேர்மூலம் 3·176 ஆகும்.

மாதிரி 38

$x^3 - x^2 + 5x - 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் நேர் மூலத்தை வரைபட முறையில் காண்க. (சென்னை '61 செப்.)

இங்கு $f(x) \equiv x^3 - x^2 + 5x - 3 = 0.$

$$\equiv x^3 - (x^2 - 5x + 3) = 0$$

$$\equiv f_1(x) - f_2(x) = 0$$ எனக் கொள்க.

ஆகவே, $f_1(x) \equiv x^3$, $f_2(x) \equiv x^2 - 5x + 3$ ஆகும்.

இப்பொழுது, $f(0) = -3 < 0$

$f(1) = 2 > 0$

ஆகவே, $f(x) = 0$ இன் நேர் மூலம் 0க்கும் 1க்குமிடையேயுள்ளது.

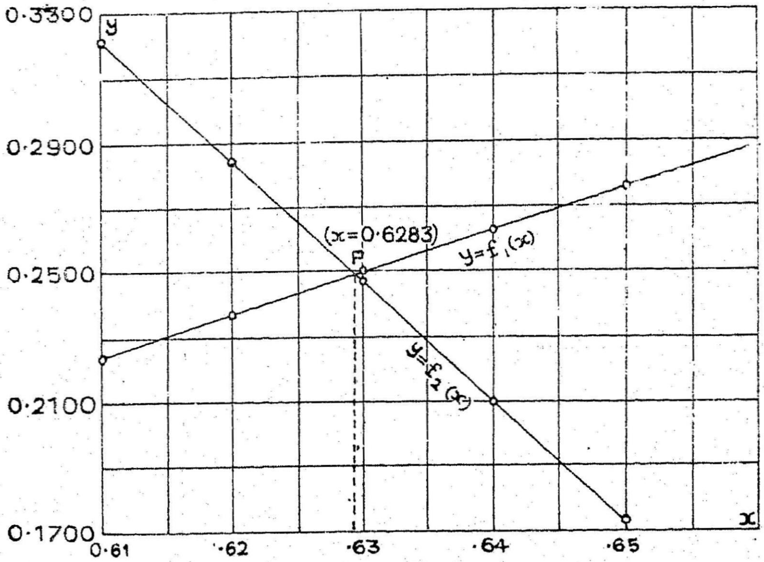
மேலும் $f(0{\cdot}6) = 0{\cdot}216 - 0{\cdot}36 + 3{\cdot}0 - 3 < 0$

$f(0{\cdot}7) = 0{\cdot}343 - 0{\cdot}49 + 3{\cdot}5 - 3 > 0$

ஆகவே, $f(x) = 0$ இன் நேர் மூலம் 0·6க்கும் 0·7க்குமிடையே யுள்ளது. ஆகவே, 0·6க்கும் 0·7க்குமிடையேயுள்ள x இன் சில மதிப்புக்களுக்குரிய $f_1(x)$, $f_2(x)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் கீழ்க் கண்டவாறு பட்டியல் படுத்தவும்.

x	$f_1(x) = x^3$	$f_2(x) = (x^2 - 5x + 3)$	$f_1(x) - f_2(x)$ (அடையாளம் மட்டும்)
0·61	0·2269	0·3221	−
0·62	0·2383	0·2844	−
0·63	0·2500	0·2469	+
0·64	0·2621	0·2096	+
0·65	0·2746	0·1725	+

தகுந்த அளவு கோல்களின் உதவியால் x அச்சில் x-இன் மதிப்புக்களையும், y-அச்சில் $f_1(x)$, $f_2(x)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக் களையும் குறித்து $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ ஆகியவற்றின் வரை படங்களை வரைந்து அவை வெட்டும் புள்ளியின் x-அச்சுத் தூரத் தைக் கணக்கிடவும்.



படம் 6

படம் 6 இல் $y \equiv f_1(x) = x^3$, $y \equiv f_2(x) = x^2 - 5x + 3$ ஆகிய வற்றின் வரைபடங்கள் P என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. Pயின் x-அச்சுத்தூரம் 0·6293. ஆகவே $f(x) = 0$ இன் நேர் மூலம் 0·6293 ஆகும்.

குறிப்பு : $f(x) \equiv x^3 - x^2 + 5x - 3 = 0$ இன் மூலங்களிலிருந்து 1/3யைக் குறைத்தால் கிடைக்கப்பெறும் சமன்பாட்டில் x^2 உறுப்பு இருக்காது. ஆகவே, மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு மாதிரி 30 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் அமைப்பிலிருக்கும். ஆகவே மாதிரி 30 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள முறைப்படி சமன்பாட்டின் மெய் மூலத்தைக் காணலாம்.

மாதிரி 39

$x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ இன் எல்லா மூலங்களையும் வரைபட முறையில் காண்க.

$$\begin{aligned} \text{இங்கு} \quad f(x) &\equiv x^3 + 3x^2 - 3 = 0 \\ &\equiv x^3 - (3 - 3x^2) = 0 \\ &\equiv f_1(x) - f_2(x) = 0 \end{aligned}$$

ஆகவே, $f_1(x) \equiv x^3$, $f_2(x) \equiv 3 - 3x^2$ ஆகும்.

இப்பொழுது, $f(0) = -3 < 0$

$f(1) = \quad 1 > 0$

ஆகவே, $f(x) = 0$ இன் ஒரு மூலம் 0க்கும் 1க்குமிடையே யுள்ளது.

மேலும், $f(0{\cdot}8) = 0{\cdot}512 + 1{\cdot}92 - 3 = 2{\cdot}432 - 3 < 0$

$f(0{\cdot}9) = 0{\cdot}729 + 2{\cdot}43 - 3 = 3{\cdot}159 - 3 > 0$

ஆகவே, அந்த மூலம் 0·8 க்கும் 0·9 க்குமிடையே யுள்ளது. இப்பொழுது, 0·8 க்கும் 0·9க்கு மிடையேயுள்ள x இன் சில மதிப்புக் களுக்குரிய $f_1(x)$, $f_2(x)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் கீழ்க்கண்ட வாறு பட்டியல் படுத்தவும்.

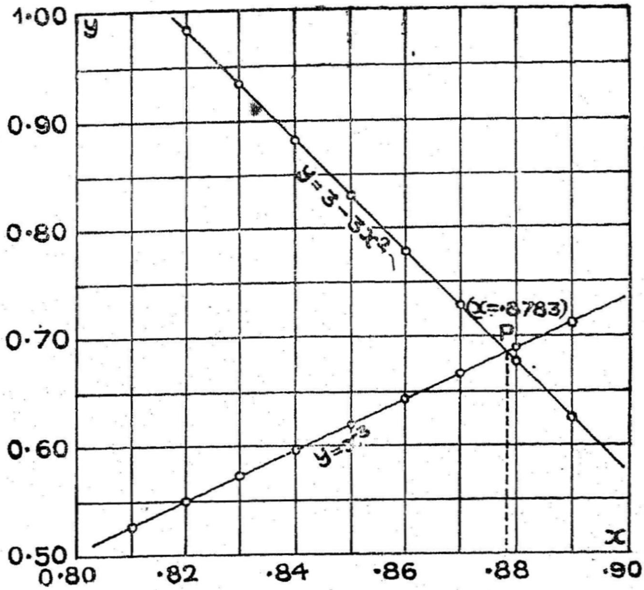
x	$f_1(x) = x^3$	$f_2(x) = 3-3x^2$	$f_1(x) - f_2(x)$
0·81	0·5314	1·0317	−
0·82	0·5514	0·9828	−
0·83	0·5718	0·9333	−
0·84	0·5927	0·8832	−
0·85	0·6141	0·8325	−
0·86	0·6361	0·7812	−
0·87	0·6585	0·7293	−
0·88	0·6815	0·6768	+
0·89	0·7049	0·6237	+

இவ் விவரங்களைக் கொண்டு $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ ஆகிய வற்றின் வரைபடங்களை ஒரே வரைபடத்தாளில் வரைந்து அவை வெட்டும் புள்ளியின் x அச்சுத்தூரத்தைக் கணக்கிடவும்.

படம் 7 இலிருந்து $y = x^3$, $y = 3 - 3x^2$ ஆகியவற்றின் வரை படங்கள் வெட்டும் புள்ளியாகிய P-யின் x-அச்சுத்தூரம் 0·8793 என்று காண்கிறோம். ஆகவே, $f(x) = 0$ இன் ஒரு மூலம் 0·8793 ஆகும்.

$x = 0{\cdot}8793$க்குரிய $f(x) = 0$ இன் காரணி $x - 0{\cdot}8793$ ஆகும். ஆகவே, $f(x)$ஐ $x - 0{\cdot}8793$ ஆல் வகுத்துக் கிடைக்கும் ஈவைப்

பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்திக் கிடைக்கும் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து மற்ற மூலங்களைக் கணக்கிடலாம்.



படம் 7

$$x-0{\cdot}8793)\ x^3+3x^2 \quad +0 \quad -3\ (x^2+3{\cdot}8793x+3{\cdot}4104$$

$$\underline{x^3-0{\cdot}8793x^2}$$

$$3{\cdot}8793\,x^2+0$$

$$\underline{3{\cdot}8793\,x^2-3{\cdot}4104\,x}$$

$$3{\cdot}4104\,x-3$$

$$\underline{3{\cdot}4104\,x-2{\cdot}9992}$$

$$-0{\cdot}0008$$

மீதி மிகக் குறைவாகயிருப்பதால் புறக்கணித்து விடலாம். ஆகவே, மற்ற இரு மூலங்களையும்

$$x^2+3{\cdot}8793x+3{\cdot}4104=0$$

என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து காணலாம்.

$$x=\frac{-3{\cdot}8793\pm\sqrt{(3{\cdot}8793)^2-4(3{\cdot}4104)}}{2}$$

$$= \frac{-3{\cdot}8793 \pm \sqrt{15{\cdot}0450 - 13{\cdot}6416}}{2}$$

$$= \frac{-3{\cdot}8793 \pm \sqrt{1{\cdot}4034}}{2}$$

$$= \frac{-3{\cdot}8793 \pm 1{\cdot}1844}{2}$$

$$= -2{\cdot}5318, \ -1{\cdot}3474$$

ஆகவே, $f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் வருமாறு :

$$-2{\cdot}5318, \ -1{\cdot}3474, \ 0{\cdot}8793.$$

மாதிரி 40

ஒரே வரைபடத் தாளில் $y = x^2 - 2x$, $y = \frac{27}{x+6}$ என்ற வளைவுகளை வரைந்து $x^3 + 4x^2 - 12x - 27 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும். (சென்னை '68 ஏப்.)

$$y \equiv f_1(x) = x^2 - 2x$$

$$y \equiv f_2(x) = \frac{27}{x+6} \text{ எனக் கொள்க.}$$

$$\therefore \ f(x) \equiv f_1(x) - f_2(x) = 0$$

$$\equiv (x^2 - 2x) - \frac{27}{x+6} = 0$$

$$\equiv (x+6)(x^2 - 2x) - 27 = 0$$

$$\equiv x^3 + 4x^2 - 12x - 27 = 0$$

இப்பொழுது, $f(3) = 27 + 36 - 36 - 27 = 0$

$\therefore$ $x = 3$ என்பது $f(x) = 0$ இன் ஒரு மூலமாகும்.

மேலும், $f(-1) = -1 + 4 + 12 - 27 = -12 < 0$

$f(-2) = -8 + 16 + 24 - 27 = 5 > 0.$

ஆகவே, இன்னொரு மூலம் -1க்கும் -2க்குமிடையேயுள்ளது.

மேலும், $f(-1{\cdot}6) = -4{\cdot}096 + 10{\cdot}24 + 19{\cdot}2 - 27$

$= -31{\cdot}096 + 29{\cdot}44 < 0$

$f(-1{\cdot}7) = -4{\cdot}913 + 11{\cdot}56 + 20{\cdot}4 - 27$

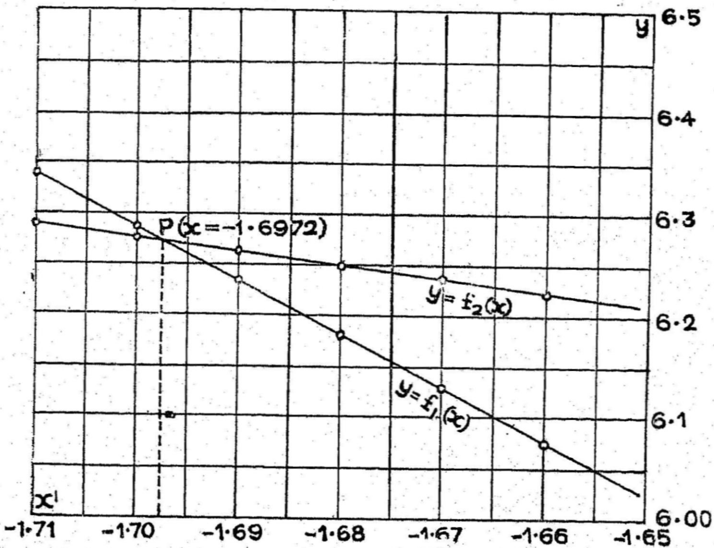
$= -31{\cdot}913 + 31{\cdot}96 > 0$

ஆகவே அந்த மூலம் $-1{\cdot}6$-க்கும் $-1{\cdot}7$-க்குமிடையேயுள்ளது. $-1{\cdot}66$க்கும் $-1{\cdot}71$க்கும் இடையேயுள்ள x-இன் மதிப்புக்களுக்குரிய

$f_1(x)$, $f_2(x)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்கள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

x	$f_1(x)=x^2-2x$	$f_2(x)=\frac{27}{x+6}$	$f_1(x)-f_2(x)$
-1.66	6.0756	6.2211	$-$
-1.67	6.1289	6.2356	$-$
-1.68	6.1824	6.2499	$-$
-1.69	6.2361	6.2646	$-$
-1.70	6.2900	6.2791	$+$
-1.71	6.3441	6.2937	$+$

இவ்விவரங்களைக் கொண்டு $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ ஆகியவற்றின் வரை படங்களை வரைந்து, அவை வெட்டும் புள்ளியின் x—அச்சுத் தூரத்தை -1.6972 என்று (படம் 8ஐப் பார்க்க) அறிகிறோம்.



படம் 8

$x=-1.6972$ என்ற மூலத்திற்குரிய $f(x)=0$ இன் காரணி $x+1.6972$ ஆகும். ஆகவே, $f(x)$ஐ $x+1.6972$-ஆல் வகுத்து, கிடைக்கும் ஈவைத் தீர்த்து மற்ற மூலங்களைக் காணவேண்டும்.

$$x+1.6972)\ x^3+4x^2\quad -12x\quad -27\ (x^2+2.3028x-15.9084$$
$$\begin{array}{l} x^3+1.6972x^2 \\ \hline \quad 2.3028x^2-12x \\ \quad 2.3028x^2+3.9084x \\ \hline \qquad\quad -15.9084x-27 \\ \qquad\quad -15.9084x-27.002 \\ \hline \qquad\qquad\qquad 0.002 \end{array}$$

மீதி 0·002 மிகவும் சிறியதாகையால் தள்ளிவிடத் தக்கது. மற்ற இரு மூலங்களையும்

$$x^2+2.3028x-15.9084=0$$

என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்த்துக் காணலாம்.

$$\therefore x=\frac{-2.3028\pm\sqrt{(2.3028)^2-4\,(-15.9084)}}{2}$$
$$=\frac{-2.3028\pm\sqrt{5.3039+63.6336}}{2}$$
$$=\frac{-2.3028\pm\sqrt{68.9375}}{2}$$
$$=\frac{-2.3028\pm 8.3023}{2}$$
$$=-5.3026,\ 2.9998.$$

ஆகவே, $f(x)=0$ இன் மூலங்கள் பின்வருமாறு:

$$1.6972,\quad 2.9998,\quad -5.3026.$$

இவற்றுள் 2·9998 என்பது $x=3$ என்ற மூலத்தின் தோராய மதிப்பாகும். ஆகவே, $f(x)=0$ இன் மூலங்கள்

$$1.6972,\quad 3,\quad -5.3026.$$

மாதிரி 41

$2\,e^x=27x$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு நேர் மூலம்தான் உண்டு என்று காட்டுக. அம்மூலத்தின் மதிப்பை ஏதாவது ஒரு பொருத்தமான முறையில் பெறுக. (சென்னை '68 ஏப்.)

$$f(x)\equiv 2\,e^x-27x=0$$

x-இன் மெய் மதிப்புக்களுக்கு e^x-இன் மதிப்புக்களை e^x-இன் பட்டியலிலிருந்து பெறலாம். x-இன் மதிப்பு எதிரெண்ணுகயிருக்கும் போது e^x-இன் மதிப்பு எப்போதும் 1க்கும் குறைவாகவேயிருக்கும்; மேலும் $-27x$ நேரெண்ணுகயிருக்குமாதலால் x-இன் எந்த எதிரெண் மதிப்புக்கும் $f(x)$ இன் மதிப்புப் பூச்சியமாகாது. ஆகவே $f(x)=0$க்கு எதிர் மூலம் கிடையாது.

இப்பொழுது, $f(3) = 2e^3 - 81 = 40{\cdot}171 - 81 < 0$

$f(4) = 2e^4 - 108 = 109{\cdot}1964 - 108 > 0$

ஆகவே $f(x) = 0$ இன் ஒரு மூலம் 3க்கும் 4க்குமிடையேயுள்ளது. இது தவிர, x-இன் வேறு எந்த நேர் மதிப்புக்கும் $f(x)$ இன் அடையாளம் மாருததாகையால் $f(x) = 0$க்கு ஒரே ஒரு நேர் மூலம் தான் உண்டு. அம்மூலம் 3க்கும் 4க்குமிடையேயுள்ளது.

மேலும், $f(3{\cdot}9) = 2e^{3{\cdot}9} - 27(3{\cdot}9)$

$= 2(49{\cdot}4024) - 105{\cdot}3$

$= 98{\cdot}8048 - 105{\cdot}3 < 0$

$f(4) = 2e^4 - 27(4)$

$= 2(54{\cdot}5982) - 108$

$= 109{\cdot}1964 - 108 > 0$

ஆகவே, அந்த மூலம் 3·9க்கும் 4க்குமிடையேயுள்ளது. இப்பொழுது $f(x) \equiv 2e^x - 27x \equiv f_1(x) - f_2(x) = 0$ எனக் கொள்க. ஆகவே, $f_1(x) = 2e^x$, $f_2(x) = 27x$.

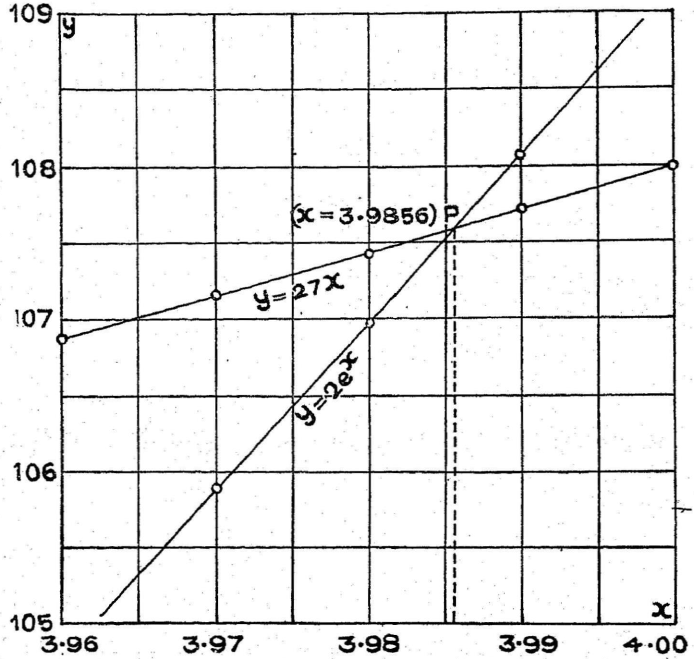
3·9க்கும் 4க்குமிடையேயுள்ள x-இன் சில மதிப்புக்களுக்குரிய $f_1(x)$, $f_2(x)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்கள் கீழே பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

x	e^x	$f_1(x) = 2e^x$	$f_2(x) = 27x$	$f_1(x) - f_2(x)$
3·96	52·456	104·912	106·92	−
3·97	52·990	105·980	107·19	−
3·98	53·517	107·034	107·46	−
3·99	54·074	108·148	107·73	+
4·00	54·598	109·196	108·00	+

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ ஆகியவற்றின் வரைபடங்களை ஒரே வரைபடத் தாளில் வரைந்து அவை வெட்டும் புள்ளியின் x—அச்சுத் தூரத்தைக் காண்க.

படம் 9-இலிருந்து $y \equiv f_1(x) = 2e^x$, $y \equiv f_2(x) = 27x$ ஆகியவற்றின் வரைபடங்கள் வெட்டும் புள்ளியின் x—அச்சுத் தூரம்

3·9856 ஒன்று அறிகிறோம். ஆகவே, $2\,e^{x}=27x$ இன் நேர் மூலம் 3·9856 ஆகும்.



படம் 9

2.15.1 நான்காம்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$f(x) \equiv x^4+a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d=0$ என்ற நான்காம்படிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க வேண்டுமெனக் கொள்வோம்.

$$(x^4+a\,x^3)+b\,x^2+c\,x+d=0$$

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)^2-\frac{a^2}{4}x^2+b\,x^2+c\,x+d=0$$

$$\left(x^2+\frac{a}{2}\,x\right)^2+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)x^2+cx+d=0$$

இப்பொழுது, $y = x^2 + \frac{a}{2}\,x$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\quad y^2+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)x^2+cx+d=0$$

அதாவது, $x^2 + y^2 + \left(b - \frac{a^2}{4} - 1\right) x^2 + cx + d = 0$

$$x^2 + y^2 + \left(b - \frac{a^2}{4} - 1\right)\left(y - \frac{a}{2}\right) x + cx + d = 0$$

$$x^2 + y^2 + \left(b - \frac{a^2}{4} - 1\right) y - \frac{a}{2}\left(b - \frac{a^2}{4} - 1\right) x + cx + d = 0$$

அதாவது, $x^2 + y^2 - \left\{\frac{a}{2}\left(b - \frac{a^2}{4} - 1\right) - c\right\} x$

$$+ \left(b - \frac{a^2}{4} - 1\right) y + d = 0$$

இச் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கிறது. $y = x^2 + \frac{a}{2} x$ என்ற சமன்பாடு ஒரு பரவளையத்தைக் (Parabola) குறிக்கிறது. இவ்விரு வளைவுகளையும் ஒரே வரைபடத்தில் வரைந்து, அவை வெட்டும் புள்ளிகளின் x-அச்சுத் தூரங்களிலிருந்து $f(x) = 0$ இன் மெய் மூலங்களைப் பெறலாம்.

மாதிரி 42

$x^4 + 4x^3 - x^2 - 14x + 6 = 0$ இன் மெய் மூலங்களை வரைபட முறையில் காண்க. (சென்னை '65 செப்.)

$$(x^4 + 4x^3) - x^2 - 14x + 6 = 0$$
$$(x^2 + 2x)^2 - 4x^2 - x^2 - 14x + 6 = 0$$
$$(x^2 + 2x)^2 - 5x^2 - 14x + 6 = 0$$

இப்பொழுது, $y = x^2 + 2x$ எனக் கொள்க. $\therefore\ x^2 = y - 2x$

ஆகவே, $y^2 - 5x^2 - 14x + 6 = 0$

அதாவது, $x^2 + y^2 - 6x^2 - 14x + 6 = 0$

$$x^2 + y^2 - 6(y - 2x) - 14x + 6 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 6y + 12x - 14x + 6 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$

இப்பொழுது, $y = x^2 + 2x$ என்பது ஒரு பரவளையம்.

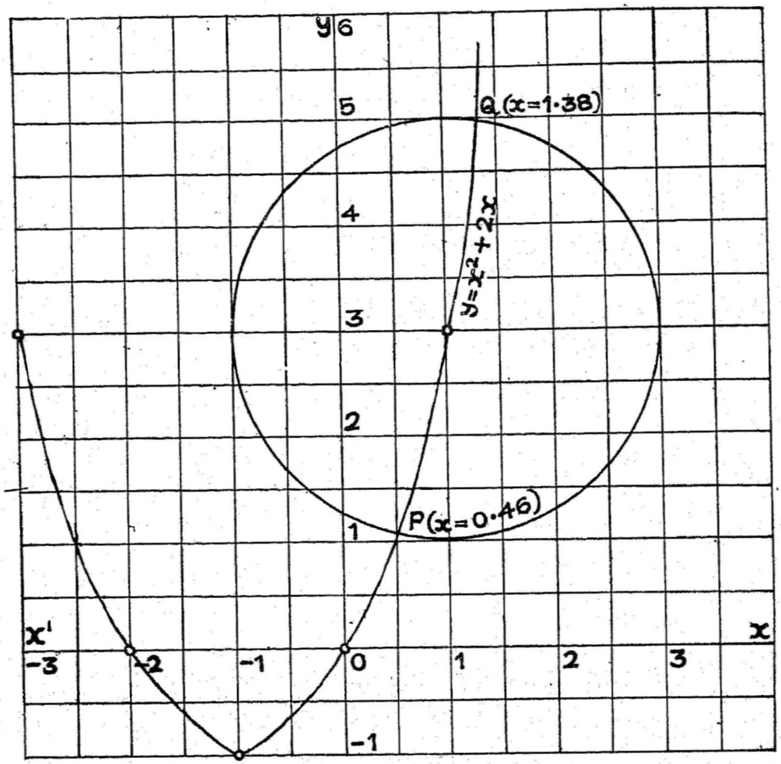
$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ என்பது ஒரு வட்டம்.

இந்த வட்டத்தின் மையம் $= (1, 3)$.

ஆரம் $= \sqrt{1 + 9 - 6} = 2$

ஆகவே, ஒரே வரைபடத்தாளில் பரவளையத்தையும் வட்டத்தையும் வரையவேண்டும்.

படம் 10 இலிருந்து பரவளையமும், வட்டமும் வெட்டும் புள்ளி களின் x-அச்சுத் தூரங்கள் 0·46, 1·38 என்று காணலாம். ஆகவே,



படம் 10

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் மெய் மூலங்கள் 0·46, 1·38 ஆகும்.

பயிற்சி 10

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் மெய் மூலங்களை வரைபட முறையில் காண்க :

1. $x^3 - 7x + 7 = 0$ **(சென்னை '63 செப்.)**
2. $x^3 + 2x - 20 = 0$ **(சென்னை '64 ஏப்.)**
3. $x^3 + 3x - 35 = 0$ **(சென்னை '65 ஏப்.)**
4. $x^3 - x - 4 = 0$
5. $x^3 + x - 34{\cdot}16 = 0$ **(சென்னை '66 ஏப்.)**

6. $x^3 - x^2 - 1 = 0$ (சென்னை '64 செப்.)

7. $x^4 - 12x + 7 = 0$ (சென்னை '62 ஏப்.)

8. $x^4 + 6x^3 + 10x^2 - 2x - 8 = 0$ (சென்னை '55 செப்.)

9. $x^4 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$

2·16 மடக்கைப் படங்களின் மூலம் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் (Solutions of Equations by Logarithmic Graphs)

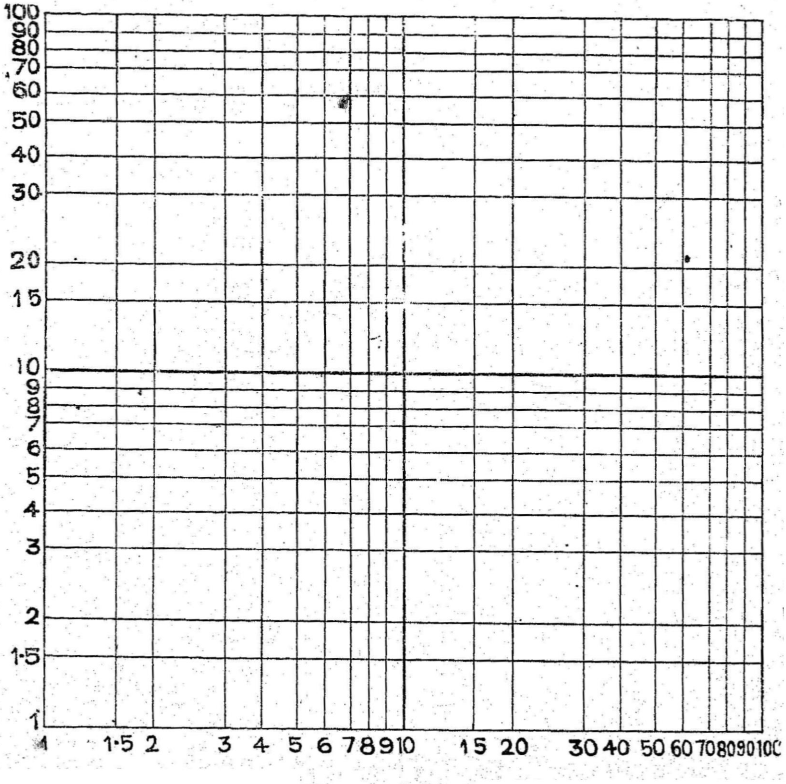
2·16·1 மடக்கைத்தாள் வரைதல் (Construction of logarithmic graphs)

x, y-அச்சுக்களில் 1 முதல் 100 அலகுகளைக் கொண்ட ஒரு மடக்கைத் தாள் வரைய வேண்டுமெனக் கொள்வோம். முதலில் 1 முதல் 100 வரையுள்ள சில குறிப்பிட்ட எண்களின் மடக்கை மதிப்புக்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதிக் கொள்ளவேண்டும்.

எண்		மடக்கை மதிப்பு
1	..	0·00
1·5	..	0·18
2	..	0·30
3	..	0·48
4	..	0·60
5	..	0·70
6	..	0·78
7	..	0·85
8	..	0·90
9	..	0·95
10	..	1·00
20	..	1·30
30	..	1·48
40	..	1·60
50	..	1·70
60	..	1·78
70	..	1·85
80	..	1·90
90	..	1·95
100	..	2·00

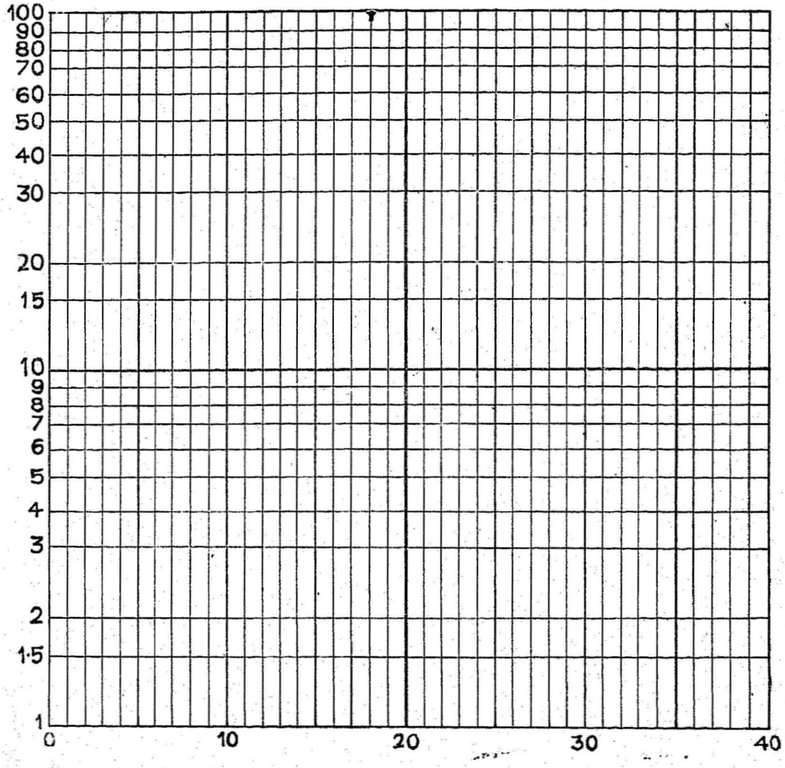
இப்பொழுது, x-அச்சில் 2 அலகு தூரத்தைக் குறித்துக் கொண்டு, ஆதியிலிருந்து 0·18 அலகு தூரத்தில் 1·5 என்றும், 0·30

அலகு தூரத்தில் 2 என்றும், 0·48 அலகு தூரத்தில் 3 என்றும், இதுபோல் மேற்கண்ட மடக்கை மதிப்பு அலகு தூரங்களில் அவற்றிற்குரிய எண்களின் மதிப்புக்களைக் குறிக்க வேண்டும். இவ்வாறு அளவுக் குறியிடப்பட்ட x-அச்சை மடக்கை அளவுகோல் (logarithmic scale) என்று சொல்லுகிறோம். இதுபோல் y-அச்சிலும் மேற்கூறப்பட்ட முறையில் மடக்கை யளவுக் குறிகளைக் குறிக்க வேண்டும். எண் 1-இன் மடக்கை மதிப்பு 0 ஆகையால் x, y-ஆகிய இரு அச்சுக்களிலும் ஆதியானது 1-ஐக் குறிக்கும். அதாவது, இரு அச்சுக்களிலும் அளவுக் குறிகள் 1-இலிருந்து தொடங்கும். இப்பொழுது x-அச்சிலுள்ள மடக்கை அளவுக் குறிகளிலிருந்து y-அச்சுக்கு இணையாக நேர்கோடுகள் வரையவேண்டும். இதுபோல், y-அச்சிலுள்ள மடக்கை அளவுக் குறிகளிலிருந்து x-அச்சுக்கு இணையாக நேர் கோடுகள் வரையவேண்டும். இவ்வாறு கிடைக்கப் பெற்ற வரை படத்தாளுக்கு இருசார் மடக்கைத்தாள்



படம் 11

(Double—logarithmic paper) என்று பெயர். இதற்கு மாறாக, x - அச்சில் 1, 2, 3, . . . ஆகிய அலகு தூரங்களில் எண்கள் கூட்டுத் தொடர் (Arithmetic series) அமைப்பில் குறிப்பிடப்பட்டு, y-அச்சில் மடக்கை அளவுகளும் குறிப்பிடப்பட்டிருந்தால் அத்தகைய வரை படத்தாளுக்கு ஒருசார் மடக்கைத்தாள் (Semi-logarithmic paper) என்று பெயர்.



படம் 12

2·16·2 மடக்கைப் படங்களின் மூலம் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் (Solutions of Equations by Logarithmic Graphs)

$$y = ax^n$$

என்ற சமன்பாட்டினைக் கருதுக. இச் சமன்பாட்டில் a, n ஆகியவை மாறிலிகள் ஆகும். x-இன் சில மதிப்புக்களும் அம் மதிப்புக்

களுக்குரிய y-இன் மதிப்புக்களும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன என்று கொள்வோம். இம் மதிப்புக்களிலிருந்து a, n ஆகிய மாறிலி களின் மதிப்புக்களைக் கீழ்க்காணும் மடக்கைப் பட முறையில் காணலாம்.

$$y = ax^n.$$

$$\therefore \quad \log y = \log a + n \log x$$

இப்பொழுது, $\log y = Y$ என்றும், $\log x = X$ என்றும், $\log a = A$ என்றும் கொண்டால்,

$$Y = A + n X,$$

அதாவது, $Y = n X + A$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

இச் சமன்பாடு ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிப்பதாலும், X, Y, A என்பன மடக்கை மதிப்புக்களைக் குறிப்பதாலும் இச் சமன்பாட்டின் வரைபடத்தை ஒரு மடக்கைத் தாளில் வரைந்தால் ஒரு நேர்கோடு கிடைக்கும். இந்த நேர்கோடு y-அச்சில் வெட்டுகின்ற வெட்டுத் துண்டு (intercept) $A = \log a$ யைக் குறிக்கும். இந்த நேர்கோட்டின் மேல் தொடக்கத்திலும் இறுதியிலும் அமைந்துள்ள புள்ளிகளின் X, Y மதிப்புக்களை $Y = n X + A$ என்ற சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டுக் கிடைக்கும் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து a, n ஆகியவற்றின் மதிப்புக் களைப் பெறலாம். கீழ்க்காணும் மாதிரிக் கணக்குகளின் மூலம் இம் முறை நன்கு விளக்கப்பட்டுள்ளது.

மாதிரி 43

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணை மதிப்புக்களிலிருந்து $y = ax^n$ என்ற சூத்திரத்தை அமைக்கவும்.

x ..	10	20	30	40	50	60	70	80
y ..	1·06	1·33	1·52	1·68	1·81	1·91	2·01	2·11

$$y = ax^n$$

$$\therefore \quad \log y = \log a + n \log x$$

இப்பொழுது, $\log x = X$, $\log y = Y$, $\log a = A$ என்று கொண்டால்,

$$Y = A + n x$$

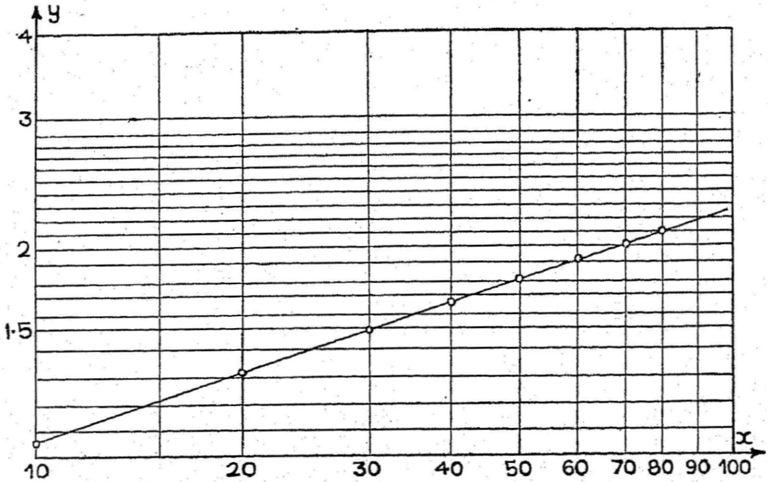
என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது. ஆகவே, மடக்கைப் படத்தாளில் (10, 1·06), (20, 1·33), (30, 1·52),........., (80, 2·11) என்ற புள்ளி

களைக் குறித்தால், அப்புள்ளிகள் யாவும் ஒரு நேர்கோட்டின் மேல் அமைவதைக் காணலாம்.

இப்பொழுது முதல் புள்ளியாகிய (10, 1·06) இன் அச்சுத் தூரங்களாகிய (log 10, log 1·06) ஆகியவற்றையும், இறுதிப் புள்ளியாகிய (80, 2·11) இன் அச்சுத்தூரங்களாகிய (log 80, log 2·11) ஆகியவற்றையும்

$$\log y = \log a + n \log x$$

என்ற சமன்பாட்டில் பிரதியிடவும்.



படம் 13

$$\therefore \quad \log 1{\cdot}06 = \log a + n \log 10 = \log a + n,$$

$$\log 2{\cdot}11 = \log a + n \log 80$$

அதாவது,

$$\log a + n = 0{\cdot}02531$$

$$\log a + 1{\cdot}90309\, n = 0{\cdot}32428$$

என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன, இச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து a, n ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பெறலாம்.

$$\log a + 1{\cdot}90309\, n = 0{\cdot}32428$$
$$\log a + n = 0{\cdot}02531$$
$$0{\cdot}90309\, n = 0{\cdot}29897$$
$$n = \frac{0{\cdot}29897}{0{\cdot}90309} = 0{\cdot}33105$$

மேலும், $\log a = 0{\cdot}02531 - n$
$= 0{\cdot}02531 - 0{\cdot}33105$
$= \bar{1}{\cdot}69426.$

$\therefore\ a = 0{\cdot}49454$

ஆகவே, $y = 0{\cdot}49454\, x^{0{\cdot}33105}$ என்பதுதான் தேவையான சூத்திரமாகும்.

மாதிரி 44

கீழ்க்காணும் அட்டவணை மதிப்புக்களுக்குப் பொருத்தமாக $y = k\, e^{mx}$ என்ற அமைப்பில் ஒரு சூத்திரத்தை அமைக்கவும்

x ...	1	2	3	4	5	6	7	8
y ...	15·3	20·5	27·4	36·6	49·1	65·6	87·8	117·6

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணை மதிப்புக்களுக்குப் பொருத்தமான சூத்திரம் $y = k\, e^{mx}$ எனக் கொள்வோம். இச் சூத்திரத்திலுள்ள k, m ஆகிய மாறிலிகளின் மதிப்புக்களைப் பெறவேண்டும். இரு பக்கமும் மடக்கை மதிப்புக் காண்க.

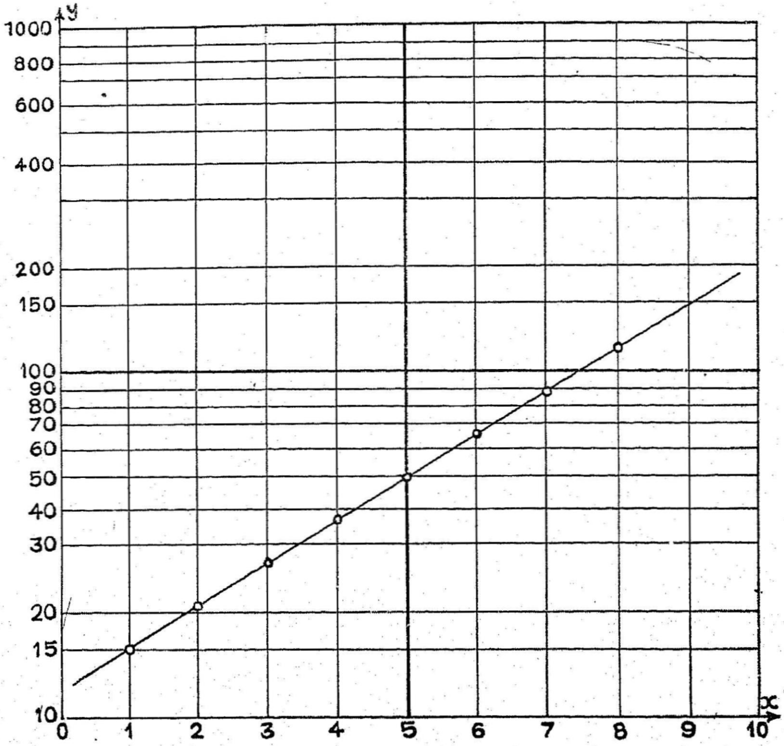
$$\therefore\ \log y = \log k + (m \log e)\, x$$

இப்பொழுது, $\log y = Y$, $m \log e = M$, $\log k = C$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$Y = C + Mx$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும். இச் சமன்பாடு ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடாகும். இதில் M, C என்பன மாறிலிகளாகும். Y என்பது y இன் மடக்கை மதிப்பைக் குறிக்கிறது. இச் சமன்பாட்டிலுள்ள x, Y ஆகிய மாறிகளுள், Y மட்டுமே மடக்கை மதிப்புக்களைக் குறிப்பதால் இச் சமன்பாட்டின் வரைபடத்தை y-அச்சை மட்டும் மடக்கை யளவு கோலாகக் கொண்ட ஒரு சார் மடக்கைத் தாளில் (Semi-logarithmic paper) வரைய வேண்டும். இவ்வாறு வரையப் படும் வரைபடம் ஒரு நேர்கோடாக இருப்பதைக் காணலாம்.

வரைபடத்திலிருந்து, $Y = Mx + C$யைக் குறிக்கும் நேர்கோடு (0·4, 13), (8·6, 140) ஆகிய புள்ளிகள் வழியே செல்லுவதைக் காணலாம். ஆகவே, இம் மதிப்புக்களை மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் பிரதியிடவும்.



படம் 14

$$\therefore \quad 13 = M(0{\cdot}4) + C$$
$$140 = M(8{\cdot}6) + C$$

ஆனால் $Y = \log y$, $C = \log k$, $M = m \log_{10} e = (0{\cdot}43429)\, m.$

$\therefore$ $Y = 13$ என்பது $\log 13$ ஆகும்.

$Y = 140$ என்பது $\log 140$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \log 13 = (0{\cdot}43429)\, m\, (0{\cdot}4) + \log k$$
$$= 0{\cdot}1737\, m + \log k \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\log 140 = (0{\cdot}43429)\, m\, (8{\cdot}6) + \log k$$
$$= 3{\cdot}7349\, m + \log k \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்கவும்.

$$\therefore \quad \log 140 - \log 13 = 3{\cdot}5612\, m$$
$$2{\cdot}14613 - 1{\cdot}11394 = 3{\cdot}5612\, m$$
$$1{\cdot}03219 = 3{\cdot}5612\, m$$
$$\therefore m = \frac{1{\cdot}03219}{3{\cdot}5612}$$
$$= 0{\cdot}2898$$

சமன்பாடு (1) - இலிருந்து,

$$\log k = \log 13 - 0{\cdot}1737\, m$$
$$= 1{\cdot}11394 - 0{\cdot}1737\, (0{\cdot}2898)$$
$$= 1{\cdot}11394 - 0{\cdot}05034$$
$$= 1{\cdot}06360$$
$$\therefore \quad k = 11{\cdot}577$$

ஆகவே, $y = 11{\cdot}577 \cdot e^{0{\cdot}2898}$ என்பதுதான் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணை மதிப்புக்களுக்குப் பொருத்தமான சமன்பாடாகும்.

2·17 ஏகபரிமாணமல்லாத சூத்திரங்கள் (Non-Linear Formulas)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பைக் குறிக்கின்ற சூத்திரம் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்டு அமைந்திருக்கலாம். இத்தகைய சூத்திரங்களிலுள்ள மாறிகளுக்கிடையே ஒரு தொடர்பு இருப்பதைக் காணலாம். ஆனல் எல்லாச் சூத்திரங்களிலும் மாறிகளுக்கிடையே யுள்ள தொடர்பு நேர்கோட்டுக்குரிய தொடர்பாக (linear relation) இருக்குமென்று கூறமுடியாது. உதாரணமாக, t என்பது நீராவியின் வெப்பநிலை (temperature)யையும், p என்பது நீராவியின் அமுத்தத்தை (pressure)யும் குறிப்பிட்டால், p, t ஆகிய மாறிகள்

$$p = a(10)^{bt/(c+t)}$$

என்ற சூத்திரத்தின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளதாக அறிகிறோம். இச் சூத்திரத்தில் a, b, c என்பன மாறிலிகளாகும். இந்த மாறிலிகளுக்கிடையே நேர்கோட்டுக்குரிய தொடர்பு இல்லை யென்பதைக் காணலாம். மேலும், இச் சூத்திரத்தை எப்படி மாற்றினலும் a, b, c என்ற மாறிலிகளை நேர்கோட்டுக்குரிய தொடர்பிலிருக்குமாறு செய்ய முடியாது. ஆகவே, a, b, c ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைச் சாதாரண வரைபட முறையிலோ, அல்லது ஒருசார் மடக்கைப் பட முறையிலோ,

அல்லது இருசார் மடக்கைப் பட முறையிலோ பெறமுடியாது. இத்தகைய சூத்திரங்களிலுள்ள மாறிலிகளின் மதிப்புக்களைக் கீழ்க்காணும் முறையைப் பயன்படுத்தி மதிப்பிடலாம்.

a, b, c என்ற மூன்று மாறிலிகளைக் கொண்ட x, y என்ற இரு மாறிகளின் தொடர்பைக் குறிக்கும் சூத்திரத்தை

$$y = f(x, a, b, c) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்று கொள்வோம். முதலில் இச் சார்பின் வரைபடத்தை வரைந்து அல்லது வேறு ஏதாவது ஒரு முறையில் a, b, c ஆகியவற்றின் தோராய மதிப்புக்களைப் பெறவேண்டும். இவ்வாறு பெறப்பட்ட தோராய மதிப்புக்களை a_0, b_0, c_0 எனக் கொள்க. α, β, γ என்பன இத் தோராய மதிப்புக்களின் திருத்தங்கள் எனக் கொள்க.

$$\therefore \left.\begin{aligned} a &= a_0 + \alpha \\ b &= b_0 + \beta \\ c &= c_0 + \gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

ஆகவே, $y' = f(x, a_0, b_0, c_0)$-இன் வரைபடம் $y = f(x, a, b, c)$-இன் வரைபடத்தை நெருங்கியிருக்கும். எனவே, $y' = f(x, a_0, b_0, c_0)$ என்ற சார்பை $y = f(x, a, b, c)$ என்ற சார்பின் தோராயமான சார்பு எனக் கொள்ளலாம். இத்தோராயமான சார்பிலிருந்து $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ஆகிய x-இன் மதிப்புக்களுக்குரிய சார்பலன்களை

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f(x_1, a_0, b_0, c_0), \\ y_2' &= f(x_2, a_0, b_0, c_0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' &= f(x_n, a_0, b_0, c_0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

என்று பெறலாம். இப்பொழுது, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ என்பன $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற x-இன் மதிப்புக்களுக்குரிய y-இன் கண்டறியப்பட்ட மதிப்புக்கள் (Observed values) என்று கொள்க. ஆனல், $y = f(x, a, b, c)$ என்ற சூத்திரத்தில் $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற மதிப்புக்களைப் பிரதியிடுவதால் கிடைக்கப்படும் y-இன் மதிப்புக்கள் முறையே $f(x_1, a, b, c)$, $f(x_2, a, b, c), \ldots$, $f(x_n, a, b, c)$ ஆகும். x-இன் மதிப்பிற்குரிய y-இன் சூத்திர மதிப்பிற்கும், கண்டறியப்பட்ட மதிப்பிற்குமுள்ள வித்தியாசம் எச்சம் (Residual) எனப்படும்.

அதாவது, $f(x_1, a, b, c) - y_1$

என்பது x_1க்குரிய எச்சமாகும். இவ்வாறு, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ஆகிய x-இன் மதிப்புக்களுக்குரிய எச்சங்களை $v_1, v_2, \ldots, v_n$ எனக் குறிப்பிடுக.

$$\therefore \left.\begin{aligned} v_1 &= f\,(x_1, a, b, c) - y_1 \\ v_2 &= f\,(x_2, a, b, c) - y_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= f\,(x_n, a, b, c) - y_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

சமன்பாடுகள் (2)-இலிருந்து a, b, c ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைச் சமன்பாடுகள் (4)-இல் பிரதியிடவும்.

ஆகவே, $v_1 = f\,(x_1, a_0+\alpha, b_0+\beta, c_0+\gamma) - y_1$

அல்லது, $v_1 + y_1 = f\,(x_1, a_0+\alpha, b_0+\beta, c_0+\gamma)$ .. .. (5)

சமன்பாடு (5)-இன் வலப்பக்கச் சார்பை a, b, c என்பனவற்றின் சார்பாகக் கருதி, டெயிலரின் தேற்றத்தின்படி விரித்தெழுதவும்.

$$\therefore \; v_1 + y_1 = f\,(x_1, a_0, b_0, c_0) + \alpha \left(\frac{\partial f_1}{\partial a}\right)_0 + \beta \left(\frac{\partial f_1}{\partial b}\right)_0 + \gamma \left(\frac{\partial f_1}{\partial c}\right)_0$$

$+\alpha, \beta, \gamma$-இன் உயர்படிகளையும் பெருக்கற் பலன்களையும் கொண்ட உறுப்புக்கள் .. .. (6)

இங்கு, $\left(\frac{\partial f_1}{\partial a}\right)_0$ என்பது $\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_{\substack{x=x_1\\ a=a_0\\ b=b_0\\ c=c_0}}$ -ஐயும்,

$\left(\frac{\partial f_1}{\partial b}\right)_0$ என்பது $\left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)_{\substack{x=x_1\\ a=a_0\\ b=b_0\\ c=c_0}}$ -ஐயும்,

$\left(\frac{\partial f_1}{\partial c}\right)_0$ என்பது $\left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)_{\substack{x=x_1\\ a=a_0\\ b=b_0\\ c=c_0}}$ -ஐயும்

குறிக்கின்றன.

சமன்பாடு (3)-இலிருந்து $y_1' = f\,(x_1, a_0, b_0, c_0)$ என்ற மதிப்பைச் சமன்பாடு (6)-இல் பிரதியிடவும்.

$$\therefore \; v_1 + y_1 = y_1' + \alpha \left(\frac{\partial f_1}{\partial a}\right)_0 + \beta \left(\frac{\partial f_1}{\partial b}\right)_0 + \gamma \left(\frac{\partial f_1}{\partial c}\right)_0 + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

இப்பொழுது, α, β, γ-இன் உயர்படிகளையும் பெருக்கற் பலன்களையும் புறக்கணித்துவிட்டால்,

$$v_1=\alpha\left(\frac{\partial f_1}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_1}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_1}{\partial c}\right)_0+y_1'-y_1,$$

இதுபோல், $$v_2=\alpha\left(\frac{\partial f_2}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_2}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_2}{\partial c}\right)_0+y_2'-y_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n=\alpha\left(\frac{\partial f_n}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_n}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_n}{\partial c}\right)_0+y_n'-y_n$$

இப்பொழுது,

$$r_1=y_1'-y_1,\ r_2'=y_2'-y_2,\ \ldots\ldots\ldots,\ r_n'=y_n'-y_n$$

என்று எழுதினால் கீழ்க்கண்ட எச்சச் சமன்பாடுகளைப் (Residual equations) பெறுகிறோம்.

$$\left.\begin{aligned}
v_1&=\alpha\left(\frac{\partial f_1}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_1}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_1}{\partial c}\right)_0+r_1,\\
v_2&=\alpha\left(\frac{\partial f_2}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_2}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_2}{\partial c}\right)_0+r_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
v_n&=\alpha\left(\frac{\partial f_n}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_n}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_n}{\partial c}\right)_0+r_n
\end{aligned}\right\}\ \ldots(7)$$

இவ்வாறு கிடைக்கப்பெற்ற எச்சச் சமன்பாடுகள் α, β, γ என்பனவற்றின் ஒன்றும் படிகளைக் கொண்டமைந்த நேர்கோட்டுக்குரிய (linear) சமன்பாடுகளாகும். ஆகவே, இந்த எச்சச் சமன்பாடுகளிலிருந்து α, β, γ என்ற திருத்த மதிப்புக்களைப் பின்வரும் மீச்சிறுபடி முறை (Method of Least Squares)யில் பெறலாம்.

மீச்சிறுபடி முறையின்படி, α, β, γ ஆகியவற்றின் மிகச் சிறந்த மதிப்புக்கள் எச்சங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையாகிய

$$\Sigma v^2=v_1^2+v_2^2+\ldots+v_n^2\quad\text{-ஐ}$$

மீச்சிறிதாக்கக் (minimum) கூடிய மதிப்புக்களாகும்.

இப்பொழுது,

$$\begin{aligned}
\Sigma v^2=&\left\{\alpha\left(\frac{\partial f_1}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_1}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_1}{\partial c}\right)_0+r_1\right\}^2\\
&+\left\{\alpha\left(\frac{\partial f_2}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_2}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_2}{\partial c}\right)_0+r_2\right\}^2\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\left\{\alpha\left(\frac{\partial f_n}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_n}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_n}{\partial c}\right)_0+r_n\right\}^2
\end{aligned}$$

ஆகவே, Σv^2 என்பது மீச்சிறு மதிப்பைப் பெற வேண்டுமானால்

$$\frac{\partial(\Sigma v^2)}{\partial \alpha}=0,\quad \frac{\partial(\Sigma v^2)}{\partial \beta}=0,\quad \frac{\partial(\Sigma v^2)}{\partial \gamma}=0$$

ஆகவேண்டும்.

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\partial(\Sigma v^2)}{\partial \alpha} \equiv\; & 2\left\{\alpha\left(\frac{\partial f_1}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_1}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_1}{\partial c}\right)_0+r_1\right\}\left(\frac{\partial f_1}{\partial a}\right)_0 \\ & +2\left\{\alpha\left(\frac{\partial f_2}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_2}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_2}{\partial c}\right)_0+r_2\right\}\left(\frac{\partial f_2}{\partial a}\right)_0 \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +2\left\{\alpha\left(\frac{\partial f_n}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_n}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_n}{\partial c}\right)_0+r_n\right\}\left(\frac{\partial f_n}{\partial a}\right)_0 \\ & =0\end{aligned}$$

அதாவது,

$$\begin{aligned}&\left\{\alpha\left(\frac{\partial f_1}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_1}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_1}{\partial c}\right)_0+r_1\right\}\left(\frac{\partial f_1}{\partial a}\right)_0 \\ &+\left\{\alpha\left(\frac{\partial f_2}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_2}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_2}{\partial c}\right)_0+r_2\right\}\left(\frac{\partial f_2}{\partial a}\right)_0 \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\left\{\alpha\left(\frac{\partial f_n}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_n}{\partial b}\right)+\gamma\left(\frac{\partial f_n}{\partial c}\right)+r_n\right\}\left(\frac{\partial f_n}{\partial a}\right)_0=0 \quad \ldots(8)\end{aligned}$$

இதுபோல் $\frac{\partial(\Sigma v^2)}{\partial \beta}=0$, $\frac{\partial(\Sigma v^2)}{\partial \gamma}=0$ ஆகியவற்றிலிருந்து கீழ்க் கண்ட சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$\begin{aligned}&\left\{\alpha\left(\frac{\partial f_1}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_1}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_1}{\partial c}\right)_0+r_1\right\}\left(\frac{\partial f_1}{\partial b}\right) \\ &+\left\{\alpha\left(\frac{\partial f_2}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_2}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_2}{\partial c}\right)_0+r_2\right\}\left(\frac{\partial f_2}{\partial b}\right) \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\left\{\alpha\left(\frac{\partial f_n}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_n}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_n}{\partial c}\right)_0+r_n\right\}\left(\frac{\partial f_n}{\partial b}\right)=0 \quad \ldots(9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left\{\alpha\left(\frac{\partial f_1}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_1}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_1}{\partial c}\right)_0+r_1\right\}\left(\frac{\partial f_1}{\partial c}\right) \\ &+\left\{\alpha\left(\frac{\partial f_2}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_2}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_2}{\partial c}\right)_0+r_2\right\}\left(\frac{\partial f_2}{\partial c}\right) \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\left\{\alpha\left(\frac{\partial f_n}{\partial a}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial f_n}{\partial b}\right)_0+\gamma\left(\frac{\partial f_n}{\partial c}\right)_0+r_n\right\}\left(\frac{\partial f_n}{\partial c}\right)=0 \quad \ldots(10)\end{aligned}$$

(8), (9), (10) ஆகிய சமன்பாடுகளுக்கு மீச்சிறுபடி வழிச் சமன் பாடுகள் (Normal Equations) என்று பெயர். இம் மூன்று மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாடுகளையும் சாதாரண முறையில் தீர்த்து α, β, γ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பெறலாம். பின்னர், a, b, c ஆகியவற்றின் திருத்த மதிப்புக்களை

$$a = a_0 + \alpha,$$
$$b = b_0 + \beta,$$
$$c = c_0 + \gamma$$

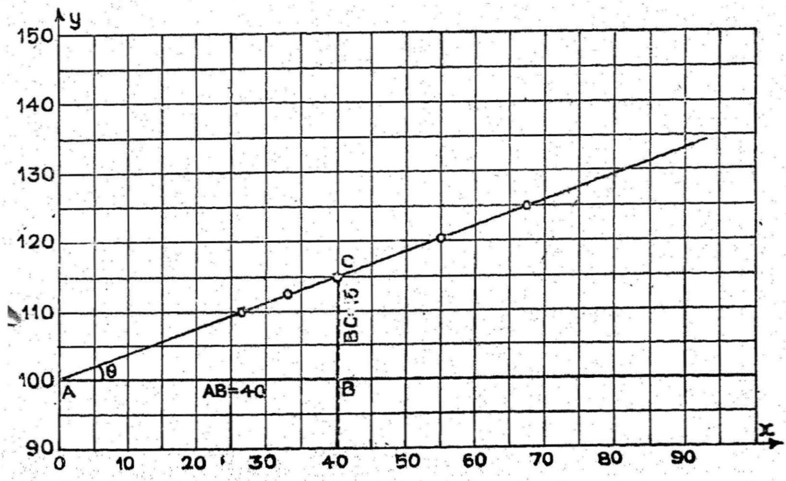
என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து பெறலாம்.

மாதிரி 45

கீழ்க்காணும் அட்டவணை மதிப்புக்களுக்குப் பொருத்தமான $y = mx + b$ என்ற சூத்திரத்தைப் பெறுக.

x ...	27	33	40	45	68
y ...	109·9	112·0	114·7	120·1	125·0

முதலில் அட்டவணை மதிப்புக்களுக்குரிய புள்ளிகளை ஒரு சாதாரண வரைபடத்தில் குறிக்கவும். இவ்வாறு குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் யாவும் ஏறக்குறைய ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்திருப்பதைக் காணலாம். இப்பொழுது $y = mx + b$ என்பது ஒரு நேர் கோட்டைக் குறிக்கும் சமன்பாடாகும். எனவே, m என்பது அந்த நேர்கோட்டின் சாய்வு விகிதம் (Slope) ஆகும்; b என்பது அந்த நேர்கோடு y-அச்சில் வெட்டுகின்ற வெட்டுத் துண்டு (intercept) ஆகும். ஆகவே, வரைபடத்திலிருந்து அந்த நேர்கோட்டின் சாய்வு விகிதத்தையும், y-அச்சின் வெட்டுத் துண்டையும் கணக்கிடுக.



படம் 15

$$m = \text{சாய்வு விகிதம்} = \tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{15}{40} = 0{\cdot}37 = m_o$$

$$b = \text{y-அச்சின் வெட்டுத்துண்டு} = 99{\cdot}7 = b_0$$

$m_0 = 0{\cdot}37$, $b_0 = 99{\cdot}7$ என்பன m, b ஆகியவற்றின் தோராய மதிப்புக்களாகும். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணை மதிப்புக்களுக்குரிய தோராயச் சமன்பாடு

$$y' = 0{\cdot}37x + 99{\cdot}7$$

ஆகும். இச் சமன்பாட்டில் x இன் கண்டறியப்பட்ட மதிப்புக்களாகிய $x_1 = 27$, $x_2 = 33$, $x_3 = 40$, $x_4 = 55$, $x_5 = 68$ ஆகியவற்றைப் பிரதியிட்டு அவற்றிற்குரிய y-இன் மதிப்புக்களாகிய y_1', y_2', y_3', y_4', y_5' ஆகியவற்றைக் கணக்கிடவும்.

$$y_1' = 0{\cdot}37\ (27) + 99{\cdot}7 = 9{\cdot}99 + 99{\cdot}7 = 109{\cdot}69$$
$$y_2' = 0{\cdot}37\ (33) + 99{\cdot}7 = 12{\cdot}21 + 99{\cdot}7 = 111{\cdot}91$$
$$y_3' = 0{\cdot}37\ (40) + 99{\cdot}7 = 14{\cdot}80 + 99{\cdot}7 = 114{\cdot}50$$
$$y_4' = 0{\cdot}37\ (55) + 99{\cdot}7 = 20{\cdot}35 + 99{\cdot}7 = 120{\cdot}05$$
$$y_5' = 0{\cdot}37\ (68) + 99{\cdot}7 = 25{\cdot}16 + 99{\cdot}7 = 124{\cdot}86$$

ஆனால், y-இன் கண்டறியப்பட்ட மதிப்புக்கள்

$y_1 = 109{\cdot}9$, $y_2 = 112{\cdot}0$, $y_3 = 114{\cdot}7$, $y_4 = 120{\cdot}1$, $y_5 = 125{\cdot}0$ ஆகும்.

ஆகவே,

$$r_1 = y_1' - y_1 = 109{\cdot}69 - 109{\cdot}9 = -0{\cdot}21$$
$$r_2 = y_2' - y_2 = 111{\cdot}91 - 112{\cdot}0 = -0{\cdot}09$$
$$r_3 = y_3' - y_3 = 114{\cdot}50 - 114{\cdot}7 = -0{\cdot}20$$
$$r_4 = y_4' - y_4 = 120{\cdot}05 - 120{\cdot}1 = -0{\cdot}05$$
$$r_5 = y_5' - y_5 = 124{\cdot}86 - 125{\cdot}0 = -0{\cdot}14$$

இப்பொழுது, $f(x, m, b) = mx + b$.

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial m} = x\ ;\ \frac{\partial f}{\partial b} = 1$$

$$\therefore \left(\frac{\partial f_1}{\partial m}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial m}\right)_{\substack{x = x_1 = 27\\ m = m_0 = 0{\cdot}37\\ b = b_0 = 99{\cdot}7}} = \left(x\right)_{\substack{x = 27\\ m = 0{\cdot}37\\ b = 99{\cdot}7}} = 27$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial m}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial m}\right)_{\substack{x = x_2 = 33\\ m = m_0 = 0{\cdot}37\\ b = b_0 = 99{\cdot}7}} = \left(x\right)_{\substack{x = 27\\ m = 0{\cdot}37\\ b = 99{\cdot}7}} = 33$$

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial m}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial m}\right)_{\substack{x=x_3=40\\ m=m_0=0\cdot37\\ b=b_0=99\cdot7}} = \left(x\right)_{\substack{x=40\\ m=0\cdot37\\ b=99\cdot7}} = 40$$

இதுபோல், $\left(\frac{\partial f_4}{\partial m}\right)_0 = x_4 = 55,$

$$\left(\frac{\partial f_5}{\partial m}\right)_0 = x_5 = 68.$$

மேலும், $\left(\frac{\partial f_1}{\partial b}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)_{\substack{x=x_1=27\\ m=m_0=0\cdot37\\ b=b_0=99\cdot7}} = \left(1\right)_{\substack{x=27\\ m=0\cdot37\\ b=99\cdot7}} = 1$

இதுபோல், $\left(\frac{\partial f_2}{\partial b}\right)_0 = \left(\frac{\partial f_3}{\partial b}\right)_0 = \left(\frac{\partial f_4}{\partial b}\right)_0 = \left(\frac{\partial f_5}{\partial b}\right)_0 = 1.$

ஆகவே, $m = m_0 + \alpha$, $b = b_0 + \beta$

ஆகியவற்றை m, b ஆகியவற்றின் திருத்த மதிப்புக்களாகக் கொண்டால் கீழ்க்கண்ட எச்சச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$v_1 = \alpha\left(\frac{\partial f_1}{\partial m}\right)_0 + \beta\left(\frac{\partial f_1}{\partial b}\right)_0 + r_1$$

அதாவது, $v_1 = 27\alpha + \beta - 0\cdot21$

இதுபோல், $v_2 = 33\alpha + \beta - 0\cdot09$

$$v_3 = 40\alpha + \beta - 0\cdot20$$
$$v_4 = 55\alpha + \beta - 0\cdot05$$
$$v_5 = 68\alpha + \beta - 0\cdot14$$

இச் சமன்பாடுகளிலிருந்து மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாடுகளைக் கீழ்க் கண்டவாறு பெறலாம்.

$$27v_1+33v_2+40v_3+55v_4+68v_5=0.$$

அதாவது, $(27^2+33^2+40^2+55^2+68^2)\,\alpha+(27+33+40+55+68)\,\beta$
$-(27\times\cdot21+33\times\cdot09+40\times\cdot20+55\times\cdot05+68\times\cdot14)=0$

அதாவது,

$$11067\,\alpha + 223\,\beta - 28\cdot91 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

மேலும்,

$$(27+33+40+55+68)\,\alpha + (1+1+1+1+1)\,\beta$$
$$-(\cdot21+\cdot09+\cdot20+\cdot05+\cdot14) = 0$$

அதாவது, $223\,\alpha + 5\,\beta \;\; -0\cdot69 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

சமன்பாடு (1) ஐ 223 ஆல் வகுக்கவும்.

$$49{\cdot}6278\,\alpha + \beta = 0{\cdot}1296$$

சமன்பாடு (2) ஐ 5 ஆல் வகுக்கவும்.

$$\begin{aligned} 44{\cdot}6000\,\alpha + \beta &= 0{\cdot}1380 \\ \hline 5{\cdot}0278\,\alpha &= -0{\cdot}0084 \\ \alpha &= -\frac{0{\cdot}0084}{5{\cdot}0278} = -0{\cdot}0016 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ 44{\cdot}6\,(-0{\cdot}0016) + \beta &= 0{\cdot}1380 \\ -0{\cdot}07136 + \beta &= 0{\cdot}1380 \\ \beta &= 0{\cdot}1380 + 0{\cdot}07136 \\ &= 0{\cdot}20936 \\ \therefore\ m = m_0 + \alpha &= 0{\cdot}37 - 0{\cdot}0016 = 0{\cdot}3684 \\ b = b_0 + \beta &= 99{\cdot}7 + 0{\cdot}20936 = 99{\cdot}90936 \end{aligned}$$

ஆகவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களுக்குப் பொருத்தமான சூத்திரம்

$$y = 0{\cdot}3684\,x + 99{\cdot}90936$$ ஆகும்.

பயிற்சி 11

1. கீழ்க்காணும் பட்டியல் மதிப்புக்களை ஒரு மடக்கைத் தாளில் குறித்து அவற்றிற்குப் பொருத்தமாக $y = ax^n$ என்ற அமைப்பில் ஒரு சூத்திரம் அமைக்கவும்.

x ...	280	295	312	330	355	370
y ...	32·3	37·6	44·9	53·3	67·2	76·1

2. கீழ்க்காணும் பட்டியல் மதிப்புக்களுக்குப் பொருத்தமாக $y = ax^n$ என்ற சூத்திரம் அமைக்கவும்.

x ...	55	25	14	7	4	3	2
y ...	6·7	15·6	28·9	60·4	110	149	230

3. கீழ்க்காணும் பட்டியல் மதிப்புக்களை ஒருசார் மடக்கைத் தாளில் குறித்து, அவற்றிற்குப் பொருத்தமாக $y = ae^{bx}$ என்ற சூத்திரத்தைப் பெறுக.

x ...	2·5	5·0	7·5	10·0	12·5	15·0
y ...	76	52	35	24	16	11

3. குறியீட்டுச் செயலிகள்
(Symbolic Operators)

3·1 சார்பின்மாறிகளும் சார்பலன்களும் (Arguments and Entries)

x, y என்ற இரு மாறிகள் $y = x^2$ என்ற கணிதத் தொடர்பின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்வோம். இச் சமன்பாட்டிலிருந்து, x எடுத்துக் கொள்ளும் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் yக்கு ஒரு மதிப்பு உண்டு என்று தெரிகிறது. உதாரணமாக,

$x = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \ldots\ldots\ldots\ldots$ என்றால்

$y = x^2 = 1, \quad 4, \quad 9, \ 16, \ 25, \ldots\ldots\ldots\ldots$ ஆகும்.

இந்த இரு மாறிகளுள் சார்பற்ற மாறி (independent vairable) யாகிய x இன் மதிப்பு "சார்பின் மாறி" (argument) என்றும், அதற்குரிய y இன் மதிப்பு "சார்பலன்" (entry) என்றும் வழங்கப்படுகின்றன.

3·2 வேறுபாடுகளின் இடைவெளி (Interval of Differencing)

பொதுவாக x, y என்பவை $y = f(x)$ என்ற கணிதத் தொடர்பின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்வோம். x இன் மதிப்புக்கள் $a, a+h, a+2h, a+3h, \ldots\ldots$ என்ற கூட்டுத் தொடரில் (Arithmetic Progression) இருப்பதாகக் கொள்வோம். அவற்றிற்குரிய y இன் மதிப்புக்கள் $f(a), f(a+h), f(a+2h), f(a+3h), \ldots\ldots$ ஆகும். $y = f(x)$ என்று குறிப்பிடுவதற்குப் பதில் $y = u_x$ என்று குறிப்பிடுவோமேயானால் y இன் மதிப்புக்கள் $u_a, u_{a+h}, u_{a+2h}, u_{a+3h} \ldots\ldots$ என்று குறிப்பிடப்படும். இவ்வாறு கிடைக்கப்பெற்ற சார்பின் மாறிகளையும் அவற்றிற்குரிய சார்பலன்களையும் கீழ்க்கண்டவாறு ஒரு பட்டியலில் எழுதலாம்.

சார்பின் மாறி x	சார்பலன் y = f(x) அல்லது	y = U_x
a	f(a)	U_a
a+h	f(a+h)	U_{a+h}
a+2h	f(a+2h)	U_{a+2h}
..	..	..
..	..	..
a+nh	f(a+nh)	U_{a+nh}

இப்பட்டியலில் x இன் இரண்டு அடுத்தடுத்த மதிப்புக்களின் வித்தியாசங்கள் சமமாக யிருப்பதால் இப்பட்டியல் "சம இடை வெளிப் பட்டியல்" (table of equal interval) என்று அழைக்கப் படுகிறது. அச் சம இடைவெளியாகிய h என்பது "இடைவெளி அலகு" (unit of interval) அல்லது "வேறுபாடுகளின் இடைவெளி" (interval of differencing) அல்லது "பட்டியல் இடைவெளி" (table interval) என்று வழங்கப்படுகிறது. இந்த இடைவெளி $\triangle x$ என்று குறிக்கப்படுகிறது.

3·3 முன்வேக வேறுபாடுகளும் குறியீட்டுச் செயலிகளும் (Forward differences and Symbolic operators)

மேலே பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பலன்களிலிருந்து f(a+h) − f(a), f(a+2h) − f(a+h), f(a+3h) − f(a+2h)...... என்ற வேறுபாடுகளைக் கணக்கிடலாம். இவ்வாறு அடுத்தடுத்த இரண்டு சார்பலன்களின் வேறுபாடு $\triangle$ என்ற செயலி (operator) யால் குறிக்கப்படுகிறது. ஆகவே,

$$\triangle f(a) = f(a+h) - f(a)$$
$$\triangle f(a+h) = f(a+2h) - f(a+h)$$
$$\triangle f(a+2h) = f(a+3h) - f(a+2h)$$

....

....

பொதுவாக, $\triangle f(x) = f(x+h) - f(x)$ ஆகும்.

சார்பலன்களை f(x)க்குப் பதிலாக U_x எனக் கொண்டால் மேற்கண்ட வேறுபாடுகளை

$$\triangle U_a = U_{a+h} - U_a$$
$$\triangle U_{a+h} = U_{a+2h} - U_{a+h}$$
$$\triangle U_{a+2h} = U_{a+3h} - U_{a+2h}$$

....

....

$$\triangle U_x = U_{x+h} - U_x$$

என்று எழுதலாம். இவ் வேறுபாடுகள் யாவும் முதல் நிலை வேறுபாடுகள் (First order differences) என அழைக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு கிடைக்கப் பெற்ற முதல்நிலை வேறுபாடுகளின் தொடராகிய

$\triangle f(a)$, $\triangle f(a+h)$, $\triangle f(a+2h)$, ..., $\triangle f(a+\overline{n-1}h)$, $\triangle f(a+nh)$ அல்லது, $\triangle U_a$, $\triangle U_{a+h}$, $\triangle U_{a+2h}$, ... , $\triangle U_{a+\overline{n-1}h}$, $\triangle U_{a+nh}$ இலிருந்து இரண்டு அடுத்தடுத்த முதல் நிலை வேறுபாடுகளின் வேறுபாடுகள் இரண்டாம்நிலை வேறுபாடுகள் (Second order differences) என அழைக்கப்படுகின்றன. இவ்விரண்டாம்நிலை வேறுபாடுகள் $\triangle^2$ என்ற செயலியால் குறிக்கப்படுகின்றன. ஆகவே,

$$\triangle^2 f(a) = \triangle f(a+h) - \triangle f(a),$$
$$\triangle^2 f(a+h) = \triangle f(a+2h) - \triangle f(a+h),$$
$$\triangle^2 f(a+2h) = \triangle f(a+3h) - \triangle f(a+2h),$$

....

....

அல்லது,
$$\triangle^2 U_a = \triangle U_{a+h} - \triangle U_a$$
$$\triangle^2 U_{a+h} = \triangle U_{a+2h} - \triangle U_{a+2h}$$
$$\triangle^2 U_{a+2h} = \triangle U_{a+3h} - \triangle U_{a+2h}$$

....

....

பொதுவாக,
$$\triangle^2 f(x) = \triangle f(x+h) - \triangle f(x)$$
$$\triangle^2 U_x = \triangle U_{x+h} - \triangle U_x$$

இதேபோல், இரண்டாம்நிலை வேறுபாடுகளின் வேறுபாடுகள் மூன்றாம்நிலை வேறுபாடுகள் என அழைக்கப்படுகின்றன. அவை $\triangle^3$ என்ற செயலியால் குறிக்கப்படுகின்றன. ஆகவே,

$$\triangle^3 U_x = \triangle^2 U_{x+h} - \triangle^2 U_x$$

இதேபோல்,
$$\triangle^4 U_x = \triangle^3 U_{x+h} - \triangle^3 U_x$$
$$\triangle^5 U_x = \triangle^4 U_{x+h} - \triangle^4 U_x$$

....

....

பொதுவாக,
$$\triangle^n U_x = \triangle^{n-1} U_{x+h} - \triangle^{n-1} U_x.$$

$\triangle f(x)$, $\triangle^2 f(x)$, $\triangle^3 f(x)$,........., $\triangle^n f(x)$ ஆகிய வேறுபாடுகளும் $\triangle U_x$, $\triangle^2 U_x$, $\triangle^3 U_x$,........., $\triangle^n U_x$ ஆகிய வேறுபாடுகளும் முறையே $f(x)$, U_x ஆகிய சார்புகளின் முதல், இரண்டாம், மூன்றாம், ..., n-ஆம் நிலை முன்வேக வேறுபாடுகள் (Forward differences) என அழைக்கப்படுகின்றன.

3·4 வேறுபாடுகளின் பட்டியல் (Table of Differences)

$a,\ a+h,\ a+2h,\ a+3h, \ldots\ldots$ ஆகியவற்றைச் சார்பின் மாறிகளாகக் கொண்ட $y=f(x)$ இன் சார்பலன்களின் முதல், இரண்டாம், மூன்றும், ……… நிலை முன்வேக வேறுபாடுகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு ஒரு பட்டியலில் எழுதலாம்.

சார்பின் மாறி x	சார்பலன் $y = f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$
a	$f(a)$			
		$\triangle f(a)$		
$a+h$	$f(a+h)$		$\triangle^2 f(a)$	
		$\triangle f(a+h)$		$\triangle^3 f(a)$
$a+2h$	$f(a+2h)$		$\triangle^2 f(a+h)$	
		$\triangle f(a+2h)$		$\triangle^3 f(a+h)$
$a+3h$	$f(a+3h)$		$\triangle^2 f(a+h)$	
		$\triangle f(a+3h)$		
$a+4h$	$f(a+4h)$			

இப்பட்டியலுக்கு "முன்வேக வேறுபாடுகளின் பட்டியல்" (Table of Forward Differences) என்று பெயர். இதை முன்வேக வேறுபாட்டுப் பட்டியல் என்றே அழைக்கலாம். இதில் $f(a)$ என்பது முன்னணி உறுப்பு (leading term) என்றும், $\triangle f(a)$, $\triangle^2 f(a)$, $\triangle^3 f(a)$, ….என்பன முன்னணி வேறுபாடுகள் (leading differences) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன.

இம்மாதிரி, 0, 1, 2, 3, 4 என்ற மதிப்புக்களைச் சார்பின் மாறிகளாகக் கொண்ட $y=u_x$ என்ற சார்பலன்களின் முன்வேக வேறுபாட்டுப் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

சார்பின் மாறி x	சார்பலன் $y = U_x$	$\triangle U_x$	$\triangle^2 U_x$	$\triangle^3 U_x$
0	U_0			
		$\triangle U_0$		
1	U_1		$\triangle^2 U_0$	
		$\triangle U_1$		$\triangle^3 U_0$
2	U_2		$\triangle^2 U_1$	
		$\triangle U_2$		$\triangle^3 U_1$
3	U_3		$\triangle^2 U_2$	
		$\triangle U_3$		
4	U_4			

இப்பட்டியலில் U_0 என்பது முன்னணி உறுப்பாகும். $\triangle U_0$, $\triangle^2 U_0$, $\triangle^3 U_0$,…… என்பன முன்னணி வேறுபாடுகளாகும்.

மாதிரி 46

$y=x^2$ என்ற சார்பின் முன்வேக வேறுபாட்டுப் பட்டியலை அமைக்கவும்.

x	$y=x^2$	$\triangle y$	$\triangle^2 y$	$\triangle^3 y$
0	0			
		1		
1	1		2	
		3		0
2	4		2	
		5		0
3	9		2	
		7		0
4	16		2	
		9		
5	25			

ஆகவே, முன்னணி உறுப்பு $y=0$ ஆகும். $\triangle y_0=1$, $\triangle^2 y_0=2$, $\triangle^3 y_0=0$ ஆகியவை முன்னணி வேறுபாடுகளாகும். மேலும், இரண்டாம் நிலை வேறுபாடுகள் யாவும் 2 என்ற மாறிலி (constant) யாகவும், மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் யாவும் பூச்சியமாகவுமிருப் பதைக் கவனிக்கவும்.

3.5 பின்முக வேறுபாடுகள் (Backward Differences)

$a, a+h, a+2h, \ldots\ldots$ என்ற சார்பின் மாறிகளைக் கொண்ட $y=f(x)$ இன் முன்வேக வேறுபாடுகளை

$$\triangle f(x)=f(x+h)-f(x)$$

என்ற சூத்திரத்தின் உதவியால் கணக்கிடுகிறோம். அதாவது, $f(x)$ இன் முன்வேக வேறுபாடு காண, $f(x)$க்கு வலப்பக்கமுள்ள $f(x+h)$ இலிருந்து $f(x)$ஐக் கழிக்கிறோம். இதேபோல் $f(x)$இலிருந்து அதற்கு இடப்பக்கமுள்ள $f(x-h)$ஐக் கழித்தும் வேறுபாடு காண லாம். இவ்வேறுபாடு "பின்முக வேறுபாடு" (Backward difference) என்று அழைக்கப்படுகிறது. இத்தகைய பின்முக வேறுபாட்டைக் குறிக்க ∇ என்ற குறியீட்டுச் செயலியைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

ஆகவே, $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$

அதாவது,

$$\nabla f(a+h) = f(a+h) - f(a) = \triangle f(a)$$

$$\nabla f(a+2h) = f(a+2h) - f(a+h) = \triangle f(a+h)$$

$$\nabla f(a+3h) = f(a+3h) - f(a+2h) = \triangle f(a+2h)$$

....

....

$$\nabla f(a+nh) = f(a+nh) - f(a+\overline{n-1}h) = f(a+\overline{n-1}h)$$

முன்வேக வேறுபாடுகளைப் போலவே, பின்முக வேறுபாடுகளின் முதல், இரண்டாம், மூன்றும்,......, n-ஆம் நிலைகள் முறையே $\nabla, \nabla^2, \nabla^3, \ldots\ldots, \nabla^n$ என்று குறிக்கப்படுகின்றன. ஆகவே,

$$\nabla^2 f(x) = \nabla f(x) - \nabla f(x-h)$$
$$\nabla^3 f(x) = \nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(x-h)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\nabla^n f(x) = \nabla^{n-1} f(x) - \nabla^{n-1} f(x-h)$$

மேலும்,
$$\begin{aligned}\nabla^2 f(a+2h) &= \nabla f(a+2h) - \nabla f(a+h)\\ &= \Delta f(a+h) - \Delta f(a)\\ &= \Delta^2 f(a)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\nabla^3 f(a+3h) &= \nabla^2 f(a+3h) - \nabla^2 f(a+2h)\\ &= [\nabla f(a+3h) - \nabla f(a+2h)] - \Delta^2 f(a)\\ &= \Delta f(a+2h) - \Delta f(a+h) - \Delta^2 f(a)\\ &= \Delta^2 f(a+h) - \Delta^2 f(a)\\ &= \Delta^3 f(a)\end{aligned}$$

இதுபோலவே,
$$\nabla^4 f(a+4h) = \Delta^4 f(a)$$
$$\nabla^5 f(a+5h) = \Delta^5 f(a)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\nabla^n f(a+nh) = \Delta^n f(a)$$

பொதுவாக, $\nabla^n f(x+nh) = \Delta^n f(x)$

அல்லது, $\nabla^n f(x) = \Delta^n f(x-nh)$ என்பது n-ஆம் நிலை பின்முக வேறுபாட்டிற்கும், n-ஆம் நிலை முன்வேக வேறுபாட்டிற்குமுள்ள தொடர்பினைக் காட்டுகிறது.

3.6 செயலி-E (Operator-E)

a, a+h, a+2h,...... என்ற சார்பின் மாறிகளைக் கொண்ட y=f (x) இன் சார்பலன்கள் f (a), f (a+h), f (a+2h),...... ஆகும். இவற்றுள் ஏதாவது ஒரு சார்பலனிலிருந்து அதற்கு அடுத்த சார்பலனைக் காண E என்ற செயலி பயன்படுத்தப்படுகிறது.

உதாரணமாக,
$$E f(a) = f(a+h),$$
$$E f(a+h) = f(a+2h),$$
$$E f(a+2h) = f(a+3h),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

பொதுவாக, $E\,f(x) = f(x+h)$

மேலும், $E^2 f(x) = E\,[E\,f(x)] = E\,[f(x+h)] = f(x+2h)$

$E^3 f(x) = E\,[E^2 f(x)] = E\,[f(x+2h)] = f(x+3h)$

இதுபோல், $E^4 f(x) = f(x+4h)$

$E^5 f(x) = f(x+5h)$

....

....

பொதுவாக, $E^n f(x) = f(x+nh)$.

3.6.1 △க்கும் Eக்குமிடையேயுள்ள தொடர்பு :

வரையறைப்படி, $\triangle f(x) = f(x+h) - f(x)$

ஆனால், $E\,f(x) = f(x+h)$

ஆகவே, $\triangle f(x) = E\,f(x) - f(x)$

$\therefore\ E\,f(x) = \triangle f(x) + f(x)$

$= (\triangle + 1)\,f(x)$

இருபக்கமும் $f(x)$ஐ நீக்கிவிட, $E = \triangle + 1$ என்ற குறியீட்டுத் தொடர்பு (Symbolic relation) அல்லது செயலிச் சமன்பாடு (Operator equation) கிடைக்கிறது.

அதாவது, $\triangle = E - 1$

△, E என்ற செயலிகளுக்குத் தனியே எந்தவிதமான பொருளும் கிடையாது. அவை ஏதாவது சார்பினைச் சார்ந்து செயல்படும் போதுதான் அவற்றின் சரியான பொருள் விளங்கும்.

இதுபோல், $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$

$= E\,f(x-h) - f(x-h)$

$= (E-1)\,f(x-h)$ ஆகும்.

3.6.2 △, E என்ற செயலிகள் இயற்கணிதத்தின் மூன்று அடிப்படை விதிகளையும் பின்பற்றுகின்றன.

(i) பங்கீட்டு விதி (Distributive Law)

$$\triangle[f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots\ldots] = \triangle f_1(x) + \triangle f_2(x) + \triangle f_3(x) + \ldots\ldots$$

$$E\,[f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots\ldots] = E\,f_1(x) + E\,f_2(x) + E\,f_3(x) + \ldots\ldots$$

நிரூபணம் :—

$$\triangle[f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots] = [f_1(x+h) + f_2(x+h) + f_3(x+h) + \ldots] - [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots\ldots]$$

$$= [f_1(x+h) - f_1(x)] + [f_2(x+h) - f_2(x)] + [f_3(x+h) - f_3(x)] + \ldots$$

$$= \triangle f_1(x) + \triangle f_2(x) + \triangle f_3(x) + \ldots\ldots$$

இதுபோல்,

$$E\,[f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots]=f_1(x+h)+f_2(x+h)+f_3(x+h)+\ldots$$
$$=E\,f_1(x)+E\,f_2(x)+E\,f_3(x)+\ldots$$

(ii) பரிமாற்று விதி (மாறிலியைப் பொறுத்த மட்டும்)
(Commutative Law)

c என்பது மாறிலியானால்,

$$\triangle[c\,f(x)]=c\,\triangle f(x)\,;$$
$$E\,[c\,f(x)]=c\,E\,f(x).$$

நிரூபணம் :—

$$\triangle[c\,f(x)]=c\,f(x+h)-c\,f(x)$$
$$=c\,[f\,x+h)-f(x)]$$
$$=c\,\triangle f(x)$$
$$E\,[c\,f(x)]=c\,f(x+h)$$
$$=c\,E\,f(x)$$

(iii) அடுக்குகளின் விதி (Index Law)

m, n என்பன நேரெண்ணுனல்,

$$\triangle^m.\,\triangle^n f(x)=\triangle^{m+n} f(x)\,;$$
$$E^m.\,E^n f(x)=E^{m+n} f(x).$$

நிரூபணம் :—

$$\triangle^m.\,\triangle^n f(x)=[\triangle.\triangle.\triangle\ldots m \text{ தடவைகள்}][\triangle.\triangle.\triangle\ldots. n \text{ தடவைகள்}]\,f(x)$$
$$=[\triangle.\triangle.\triangle\ldots(m+n) \text{ தடவைகள்}]\,f(x)$$
$$=\triangle^{m+n} f(x).$$

இதுபோலவே, $E^m.\,E^n f(x)=E^{m+n} f(x)$ என்று காட்டலாம்.

குறிப்பு 1. m என்பது ஒரு நேரெண்ணுனல்,

$$\triangle^{-m}.\,\triangle^m f(x)=f(x)\,;$$
$$E^{-m}.\,E^m f(x)=f(x).$$

குறிப்பு 2. $E\,f(x-h)=f(x)$

$$\therefore f(x-h)=E^{-1} f(x).$$

குறிப்பு 3. $\nabla f(x) = (E-1) f(x-h)$ என்று நாம் அறிவோம்.

$$\therefore \nabla f(x) = (E-1) E^{-1} f(x)$$
$$= (EE^{-1} - E^{-1}) f(x)$$
$$\therefore \nabla = 1 - E^{-1}$$

குறிப்பு 4. $E^{-1} \triangle f(x) = E^{-1} [f(x+h) - f(x)]$

$$= E^{-1} f(x+h) - E^{-1} f(x)$$
$$= f(x) - f(x-h)$$

மேலும், $\triangle E^{-1} f(x) = \triangle [f(x-h)]$

$$= f(x) - f(x-h)$$
$$\therefore E^{-1} \triangle f(x) = \triangle E^{-1} f(x)$$
$$\therefore E^{-1} \triangle = \triangle E^{-1}$$

அல்லது, $\dfrac{\triangle}{E} = \triangle E^{-1} = E^{-1} \triangle.$

3.6.3 n-ஆம் நிலை வேறுபாட்டைச் சார்பலன்களின் கோவையாக மாற்றுதல்

$\triangle = E - 1$ என்று அறிவோம்.

$$\therefore \triangle f(x) = (E-1) f(x).$$

இப்பொழுது, $\triangle^2 f(x) = \triangle f(x+h) - \triangle f(x)$

$$= f(x+2h) - f(x+h) - \{f(x+h) - f(x)\}$$
$$= f(x+2h) - 2 f(x+h) + f(x)$$
$$= E^2 f(x) - 2 E f(x) + f(x)$$
$$= (E^2 - 2E + 1) f(x)$$
$$= (E-1)^2 f(x)$$
$$\triangle^3 f(x) = \triangle . \triangle^2 f(x)$$
$$= (E-1)(E-1)^2 f(x)$$
$$= (E-1)^3 f(x).$$

இதுபோல், $\triangle^4 f(x) = (E-1)^4 f(x), \ldots\ldots\ldots$

பொதுவாக,

$$\triangle^n f(x) = (E-1)^n f(x)$$
$$= [E^n - {}^nC_1 E^{n-1} + {}^nC_2 E^{n-2} - \dots\dots\dots + (-1)^n] f(x)$$
$$= E^n f(x) - {}^nC_1 E^{n-1} f(x) + {}^nC_2 E^{n-2} f(x) - \dots + (-1)^n f(x)$$
$$= f(x+nh) - {}^nC_1 f(x+\overline{n-1}h) + {}^nC_2 f(x+\overline{n-2}h) - \dots\dots\dots + (-1)^n f(x)$$

குறிப்பு :

$$\triangle^n U_0 = (E-1)^n U_0$$
$$= E^n U_0 - {}^nC_1 E^{n-1} U_0 + {}^nC_2 E^{n-2} U_0 - \dots\dots + (-1)^n U_0$$
$$= U_n - {}^nC_1 U_{n-1} + {}^nC_2 U_{n-2} - \dots\dots\dots + (-1)^n U_0$$

தேற்றம்

ஒரு n-ஆம்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் n-ஆம் நிலை வேறுபாடுகள் மாறிலியாகவும், (n+1)-ஆம் நிலை வேறுபாடுகள் பூச்சியமாகவும் இருக்கும்.

நிரூபணம் :

$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots + a_n$ என்ற n-ஆம்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கருதுக.

$$\therefore \triangle f(x) = f(x+h) - f(x)$$
$$= [a_0 (x+h)^n + a_1 (x+h)^{n-1} + \dots\dots + a_n] - [a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots\dots + a_n]$$
$$= \{a_0 (x^n + n x^{n-1} h + \dots\dots) + a_1 [x^{n-1} + (n-1) x^{n-2} h + \dots] + \dots\dots + a_n\} - [a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n]$$
$$= a_0 n h x^{n-1} + [a_0 {}^nC_2 h^2 + a_1 ({}^{n-1}) C_1 h] x^{n-2} + \dots\dots + [a_0 h^n + a_1 h^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1} h]$$
$$= b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots\dots + b_n$$ எனக் கொள்க.

$\therefore b_1 = a_0 nh,\ b_2 = a_0 {}^nC_2 h^2 + a_1{}^{n-1} C_1 h, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

ஆகவே, $\triangle f(x)$ என்பது ஒரு (n−1)-ஆம்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையென்பதைக் காண்கிறோம். இதுபோல்,

$$\triangle^2 f(x) = \triangle f(x+h) - \triangle f(x)$$
$$= [b_1 (x+h)^{n-1} + b_2 (x+h)^{n-2} + \dots\dots + b_n] - [b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots\dots + b_n]$$

$$=b_1\,(x^{n-1}+{}^{n-1}C_1\,x^{n-2}\,h+\ldots\ldots+h^{n-1})$$
$$+b_2\,(x^{n-2}+{}^{n-2}C_1\,x^{n-3}\,h+\ldots\ldots+h^{n-2})$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+b_n$$
$$-(b_1\,x^{n-1}+b_2\,x^{n-2}+\ldots\ldots+b_n)$$
$$=b_1\cdot{}^{n-1}C_1\,x^{n-2}\,h+[b_1\cdot{}^{n-1}C_2\,h^2+b_2\cdot{}^{n-2}C_1\,h]\,x^{n-3}$$
$$+\ldots\ldots\ldots+[b_1\,h^{n-1}+b_2\,h^{n-2}+\ldots+b_{n-1}\,h]$$
$$=C_2\,x^{n-2}+C_3\,x^{n-3}+\ldots\ldots+C_n$$ எனக் கொள்க.

$\therefore C_2=b_1\cdot{}^{n-1}C_1\,h=a_0\,nh\,(n-1)\,h=a_0\,n\,(n-1)\,h^2$. ஆகவே, $\triangle^2 f(x)$ என்பது ஒரு $(n-2)$-ஆம்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை யென்பதைக் காண்கிருேம்.

இவ்வாறு மீண்டும் மீண்டும் தொடர்ந்து செய்தால், $f(x)$ இன் n-ஆம் நிலை வேறுபாடாகிய $\triangle^n f(x)$ என்பது ஒரு $(n-n)=0$ படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையென்பதைக் காணலாம். அதாவது, $f(x)$ இன் n-ஆம் நிலை வேறுபாடுகள் ஒரு மாறிலி யென்பதைக் காணலாம்.

மேலும், $\triangle^n f(x)=a_0\,n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots2.1.\,h^n$

$$=a_0\,n!\,h^n.$$

மற்றும் n-ஆம் நிலை வேறுபாடுகள் யாவும் மாறிலியாகயிருப்பதால், அதற்கடுத்த $(n+1)$-ஆம் நிலை வேறுபாடுகள் யாவும் பூச்சியமாகவும்.

அதாவது, $\triangle^{n+1} f(x)=0.$

குறிப்பாக, $f(x)=x^n$, $h=1$ எனக் கொண்டால்,

$\triangle^n x^n=n!$ ஆகும்.

மாதிரி 47

வேறுபாட்டு இடைவெளி h என்ருல் $U_x\equiv x^2+2x+3$ இன் இரண்டாம் நிலை வேறுபாட்டைக் காண்க.

$$U_x=x^2+2x+3.$$
$$\triangle U_x=U_{x+h}-U_x$$
$$=(x+h)^2+2\,(x+h)+3-(x^2+2x+3)$$
$$=x^2+2hx+h^2+2x+2h+3-x^2-2x-3$$
$$=2hx+h^2+2h$$
$$\triangle^2 U_x=\triangle U_{x+h}-\triangle U_x$$
$$=2h\,(x+h)+h^2+2h-(2hx+h^2+2h)$$
$$=2h^2.$$

மாதிரி 48

வேறுபாட்டு இடைவெளி 1 ஆனால், $U_x = x(x-1)(x-2)(x-3)$ இன் நான்காம் நிலை வேறுபாட்டைக் காண்க.

$$U_x = x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\begin{aligned}\triangle U_x &= U_{x+1} - U_x \\ &= (x+1)x(x-1)(x-2) - x(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= x(x-1)(x-2)[x+1-x+3] \\ &= 4x(x-1)(x-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle^2 U_x &= \triangle U_{x+1} - \triangle U_x \\ &= 4(x+1)x(x-1) - 4x(x-1)(x-2) \\ &= 4x(x-1)[x+1-x+2] \\ &= 12x(x-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle^3 U_x &= \triangle^2 U_{x+1} - \triangle^2 U_x \\ &= 12(x+1)x - 12x(x-1) \\ &= 12x[x+1-x+1] \\ &= 24x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle^4 U_x &= \triangle^3 U_{x+1} - \triangle^3 U_x \\ &= 24(x+1) - 24x \\ &= 24.\end{aligned}$$

மாதிரி 49

வேறுபாட்டு இடைவெளி 2 ஆனால் $U_x = 2x^3 - 7x^2 + x - 1$ இன் மூன்றும் நிலை வேறுபாட்டைக் காண்க.

$$U_x = 2x^3 - 7x^2 + x - 1$$

$$\begin{aligned}\triangle U_x &= U_{x+2} - U_x \\ &= 2(x+2)^3 - 7(x+2)^2 + (x+2) - 1 - (2x^3 - 7x^2 + x - 1) \\ &= (2x^3 + 5x^2 - 3x - 11) - (2x^3 - 7x^2 + x - 1) \\ &= 12x^2 - 4x - 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle^2 U_x &= \triangle U_{x+2} - \triangle U_x \\ &= 12(x+2)^2 - 4(x+2) - 10 - (12x^2 - 4x - 10) \\ &= (12x^2 + 44x + 30) - (12x^2 - 4x - 10) \\ &= 48x + 40\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle^3 U_x &= \triangle^2 U_{x+2} - \triangle^2 U_x \\ &= 48(x+2) + 40 - (48x + 40) \\ &= 96\end{aligned}$$

மாதிரி 50

$\triangle f(x)\, g(x) = f(x) \triangle g(x) + g(x+h) \triangle f(x)$ என்று நிரூபிக்கவும். (சென்னை 61 செப்.)

$$\begin{aligned}\triangle f(x)\, g(x) &= f(x+h)\, g(x+h) - f(x)\, g(x)\\ &= g(x+h)\,[f(x+h) - f(x) + f(x)] - f(x)\, g(x)\\ &= g(x+h)\,[f(x+h) - f(x)] + g(x+h)\, f(x) - \\ &\qquad\qquad f(x)\, g(x)\\ &= g(x+h) \triangle f(x) + f(x)\,[g(x+h) - g(x)]\\ &= g(x+h) \triangle f(x) + f(x) \triangle g(x)\end{aligned}$$

மாதிரி 51

$\triangle e^x = e^{x+1} - e^x$ என்றால் $\triangle^x e^x$-ஐக் காண்க.

(சென்னை 69 செப்.)

இப்பொழுது, $\triangle e^x = e^{x+1} - e^x$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \triangle^2 e^x &= \triangle e^{x+1} - \triangle e^x\\ &= (e^{x+2} - e^{x+1}) - (e^{x+1} - e^x)\\ &= e^{x+2} - 2\,e^{x+1} + e^x\\ &= e^x\,(e^2 - 2e + 1)\\ &= e^x\,(e-1)^2\\ \triangle^3 e^x &= \triangle^2 e^{x+1} - \triangle^2 e^x\\ &= e^{x+1}\,(e-1)^2 - e^x\,(e-1)^2\\ &= e^x\,(e-1)^2\,(e-1)\\ &= e^x\,(e-1)^3\end{aligned}$$

இதுபோல் $\triangle^4 e^x = e^x\,(e-1)^4$

$\triangle^5 e^x = e^x\,(e-1)^5$

....

பொதுவாக, $\triangle^x e^x = e^x\,(e-1)^x.$

மாதிரி 52

$\left(\frac{\triangle^2}{E}\right) U_x$, $\frac{\triangle^2 U_x}{EU_x}$ ஆகிய இரண்டுக்குமுள்ள வித்தியாசத்தை விளக்குக. $U_x = x^3$ ஆனால், அவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

(சென்னை '60 ஏப்.)

$\left(\frac{\triangle^2}{E}\right) U_x$-இல் U_x என்ற சார்பலனில் $\frac{\triangle^2}{E}$ என்ற செயலியைச் செயல் படுத்துகிறோம். ஆனால் $\frac{\triangle^2 U_x}{E\, U_x}$ - இல் U_x என்ற சார்பலனில்

Δ^2, E என்ற செயலிகளைத் தனித் தனியே செயல்படுத்திக் கிடைக்கும் மதிப்புக்களின் விகிதத்தைக் காண்கிறோம்.

இப்பொழுது $\left(\frac{\Delta^2}{E}\right) U_x = (\Delta^2 E^{-1})\ U_x$

ஆனால் $\Delta = E - 1$.

$$\therefore \quad \left(\frac{\Delta^2}{E}\right) U_x = (E-1)^2 E^{-1} .\ U_x$$

$$= (E^2 - 2E + 1)\ E^{-1}\ U_x$$

$$= (E - 2 + E^{-1})\ U_x$$

$$= E\ U_x - 2\ U_x + E^{-1}\ U_x$$

$$= U_{x+1} - 2\ U_x + U_{x-1}$$

ஆனால், $\frac{\Delta^2 U_x}{EU_x} = \frac{U_{x+2} - 2\ U_{x+1} + U_x}{U_{x+1}}$

ஆகவே, $\left(\frac{\Delta^2}{E}\right) U_x$, $\frac{\Delta^2 U_x}{E\ U_x}$ ஆகிய இரண்டும் சமனற்றவை என்று காண்கிறோம்.

இப்பொழுது $U_x = x^3$ ஆனால், $\left(\frac{\Delta^2}{E}\right) U_x = U_{x+1} - 2\ U_x + U_{x-1}$

$$\therefore \quad \left(\frac{\Delta^2}{E}\right) x^3 = (x+1)^3 - 2x^3 + (x-1)^3$$

$$= 6x$$

$$\frac{\Delta^2 U_x}{EU_x} = \frac{U_{x+2} - 2\ U_{x+1} + U_x}{U_{x+1}}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta^2 x^3}{Ex^3} = \frac{(x+2)^3 - 2(x+1)^3 + x^3}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{6\ (x+1)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{6}{(x+1)^2}$$

ஆகவே, $\left(\frac{\Delta^2}{E}\right) U_x \neq \frac{\Delta^2 U_x}{E\ U_x}$ என்று காண்கிறோம்.

மாதிரி 53

$U_0 + {}^xC_1 \triangle U_1 + {}^xC_2 \triangle^2 U_2 + \ldots\ldots = U_x + {}^xC_1 \triangle^2 U_{x-1} + {}^xC_2 \triangle^4 U_{x-2} + \ldots\ldots$ என்று நிரூபிக்க.

(சென்னை '66 ஏப்., '69 ஏப்.)

$$\begin{aligned}
\text{இடப்பக்கம்} &= U_0 + {}^xC_1 \triangle E\, U_0 + {}^xC_2 \triangle^2 E^2 U_0 + \ldots\ldots \\
&= [1 + {}^xC_1 \triangle E + {}^xC_2 (\triangle E)^2 + \ldots]\, U_0 \\
&= (1 + \triangle E)^x U_0 \\
&= (1 + \triangle E)^x E^{-x} U_x \\
&= \frac{(1 + \triangle E)^x}{E^x} U_x \\
&= \left(\frac{1 + \triangle E}{E}\right)^x U_x \\
&= \left[\frac{1 + \triangle (1 + \triangle)}{E}\right]^x U_x \\
&= \left[\frac{(1 + \triangle) + \triangle^2}{E}\right]^x U_x \\
&= \left(\frac{E + \triangle^2}{E}\right)^x U_x \\
&= \left(1 + \frac{\triangle^2}{E}\right)^x U_x \\
&= (1 + \triangle^2 E^{-1})^x U_x \\
&= (1 + {}^xC_1 \triangle^2 E^{-1} + {}^xC_2 \triangle^4 E^{-2} + \ldots)\, U_x \\
&= U_x + {}^xC_1 \triangle^2 E^{-1} U_x + {}^xC_2 \triangle^4 E^{-2} U_x + \ldots\ldots \\
&= U_x + {}^xC_1 \triangle^2 U_{x-1} + {}^xC_2 \triangle^4 U_{x-2} + \ldots\ldots
\end{aligned}$$

மாதிரி 54

$$U_x - \frac{1}{8}\triangle^2 U_{x-1} + \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{16} \triangle^4 U_{x-2} - \ldots\ldots = U_{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\triangle U_{x+\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\triangle^2 U_{x+\frac{1}{2}} - \ldots\ldots$$ என்று நிரூபிக்க.

(சென்னை '67 ஏப்., '69 ஏப்.)

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் (Binomial theorem) படி,

$$(1+y)^{-p/q} = 1+\left(\frac{-p}{q}\right)y+\frac{1}{2!}\left(\frac{-p}{q}\right)\left(\frac{-p}{q}-1\right)y^2$$

$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{-p}{q}\right)\left(\frac{-p}{q}-1\right)\left(\frac{-p}{q}-2\right)y^3+\ldots\ldots$$

$$= 1-\frac{p}{q}y+\frac{1}{2!}\frac{p(p+q)}{q^2}y^2-\frac{1}{3!}\frac{p(p+q)(p+2q)}{q^3}y^3+\ldots\ldots$$

$$= 1-\frac{p}{1!}\left(\frac{y}{q}\right)+\frac{p(p+q)}{2!}\left(\frac{y}{q}\right)^2-\frac{p(p+q)(p+2q)}{3!}\left(\frac{y}{q}\right)^3$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

இப்பொழுது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் இடப்பக்கம்

$$=U_x-\frac{1}{8}\Delta^2U_{x-1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{16}\Delta^4U_{x-2}-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=U_x-\frac{1}{8}\Delta^2E^{-1}U_x+\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{16}\cdot\Delta^4E^{-2}U_x-\ldots\ldots\ldots$$

$$=\left[1-\frac{1}{1!}\left(\frac{\Delta^2E^{-1}}{8}\right)+\frac{1\cdot3}{2!}\left(\frac{\Delta^2E^{-1}}{8}\right)^2-\ldots\ldots\ldots\right]U_x \quad \ldots(2)$$

இதில் அடைப்புக்குள்ளிருக்கும் தொடரை சமன்பாடு (1) உடன் ஒப்பிட,

$p=1,\ q=2,\ \dfrac{y}{q}=\dfrac{\Delta^2E^{-1}}{8}$ என்று காணலாம்.

$$\therefore\ \frac{y}{2}=\frac{\Delta^2E^{-1}}{8}$$

அல்லது $y=\dfrac{\Delta^2E^{-1}}{4}=\dfrac{\Delta^2}{4E}$

மேலும், $\dfrac{p}{q}=\dfrac{1}{2}$.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் இடப்பக்கம்

$$=(1+y)^{-p/q}$$

$$=\left(1+\frac{\Delta^2}{4E}\right)^{-1/2}U_x$$

$$=\left(\frac{4E+\Delta^2}{4E}\right)^{-1/2}U_x$$

$$= \left[\frac{4(1+\Delta)+\Delta^2}{4E} \right]^{-1/2} U_x$$

$$= \left[\left(\frac{2+\Delta}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{E} \right]^{-1/2} U_x$$

$$= \left(\frac{2+\Delta}{2}\right)^{-1} E^{\frac{1}{2}} U_x$$

$$= \left(1+\frac{\Delta}{2}\right)^{-1} E^{\frac{1}{2}} U_x$$

$$= \left(1-\frac{\Delta}{2}+\frac{\Delta^2}{4}-\frac{\Delta^3}{8}+\ldots\ldots\right) \cdot U_{x+1/2}$$

$$= 1-\frac{1}{2}\Delta U_{x+1/2}+\frac{1}{4}\Delta^2 U_{x+1/2}-\frac{1}{8}\Delta^3 U_{x+1/2}+\ldots\ldots$$

மாதிரி (55)

$$2(U_x - U_{x+1} + U_{x+2} - U_{x+3} + \ldots\ldots\ldots)$$

$$= U_{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}\Delta^2 U_{x-\frac{3}{2}} + \frac{1\cdot 3}{2!}\cdot\frac{1}{8^2}\Delta^4 U_{x-\frac{5}{2}}$$

$-\ldots\ldots\ldots$ என்று காட்டுக (சென்னை '68 ஏப்.)

வலப்பக்கம் $= U_{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}\Delta^2 U_{x-\frac{3}{2}} + \frac{1\cdot 3}{2!}\cdot\frac{1}{8^2}\Delta^4 U_{x-\frac{5}{2}} - \ldots\ldots\ldots$

$$= E^{-1/2} U_x - \frac{1}{1!}\frac{\Delta^2}{8}\cdot E^{-3/2} U_x + \frac{1\cdot 3}{2!}\frac{\Delta^4}{8^2} E^{-5/2} U_x - \ldots$$

$$= E^{-1/2} U_x \left[1 - \frac{1}{1!}\left(\frac{\Delta^2}{8E}\right) + \frac{1\cdot 3}{2!}\left(\frac{\Delta^2}{8E}\right)^2 - \ldots\ldots\ldots \right]$$

$$= E^{-1/2} U_x \left(1+\frac{\Delta^2}{4E}\right)^{-1/2}$$ (மாதிரி 44 இலிருந்து)

$$= E^{-1/2} U_x \left(\frac{4E+\Delta^2}{4E}\right)^{-1/2}$$

$$= E^{-1/2} U_x \left[\frac{4E+(E-1)^2}{4E}\right]^{-1/2}$$

$$= E^{-1/2} U_x \left[(E+1)^2 \cdot 4^{-1} E^{-1} \right]^{-1/2}$$

$$= E^{-1/2} U_x (E+1)^{-1} \cdot 4^{1/2} E^{1/2}$$

$$= 2(1+E)^{-1} U_x$$

$$= 2(1-E+E^2-E^3+\ldots\ldots\ldots)U_x$$
$$= 2(U_x-E\,U_x+E^2\,U_x-E^3\,U_x+\ldots\ldots\ldots)$$
$$= 2(U_x-U_{x+1}+U_{x+2}-U_{x+3}+\ldots\ldots\ldots).$$

மாதிரி 56

$\triangle \operatorname{Sin} x = \operatorname{Sin}(x+1) - \operatorname{Sin} x$ என்றால் $\triangle^n \operatorname{Sin} x$ ஐக் காண்க.
(சென்னை '69 ஏப்.)

$$\triangle \operatorname{Sin} x = \operatorname{Sin}(x+1) - \operatorname{Sin} x$$
$$= 2\cos\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\cdot \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}$$
$$= 2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\cdot \operatorname{Sin}\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\triangle^2 \operatorname{Sin} x = \triangle \operatorname{Sin}(x+1) - \triangle \operatorname{Sin} x$$
$$= 2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\left[\operatorname{Sin}\left(x+1+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{Sin}\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= 2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\left[2\cos\left(x+1+\frac{\pi}{2}\right)\cdot \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\right]$$
$$= \left(2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\right)^2\cdot \operatorname{Sin}\left(x+1+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \left(2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\right)^2\cdot \operatorname{Sin}\left\{x+2\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

இதுபோல், $\triangle^3 \operatorname{Sin} x = \left(2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\right)^3 \operatorname{Sin}\left\{x+3\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$$\triangle^4 \operatorname{Sin} x = \left(2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\right)^4 \operatorname{Sin}\left\{x+4\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

....

$$\triangle^n \operatorname{Sin} x = \left(2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\right)^n \operatorname{Sin}\left\{x+n\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

மாதிரி 57

$U_0=2$, $U_1=7$, $U_2=27$, $U_3=49$, $U_4=32$, $U_5=0$ என்றால் $\triangle^5 U_0$ ஐக் காண்க.

இங்கு x-இன் மதிப்புக்கள் 0, 1, 2, 3, 4, 5 ஆகும். எனவே $h=1$.

$$\begin{aligned}\triangle^5 U_0 &= (E-1)^5 U_0\\ &= (E^5 - {}^5C_1 E^4 + {}^5C_2 E^3 - {}^5C_3 E^2 + {}^5C_4 E - 1)\, U_0\\ &= (E^5 - 5E^4 + 10E^3 - 10E^2 + 5E - 1)\, U_0\\ &= E^5 U_0 - 5E^4 U_0 + 10E^3 U_0 - 10E^2 U_0 + 5E U_0 - U_0\\ &= U_5 - 5U_4 + 10U_3 - 10U_2 + 5U_1 - U_0\\ &= 0 - 5(32) + 10(49) - 10(27) + 5(7) - 2\\ &= 0 - 160 + 490 - 270 + 35 - 2\\ &= 93.\end{aligned}$$

மாதிரி 58

$U_1=2, U_3=4, U_4=10, U_5=22$ என்றால் U_2 இன் மதிப்பென்ன?

மொத்தம் நான்கு மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஆகவே, U_x ஐ மூன்றும் படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாக வைத்துக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore\ \triangle^4 U_x = 0$$

$$\therefore\ \triangle^4 U_1 = 0$$

அதாவது $(E-1)^4 U_1 = 0$

$$(E^4 - 4E^3 + 6E^2 - 4E + 1)\, U_1 = 0$$

$$E^4 U_1 - 4E^3 U_1 + 6E^2 U_1 - 4E U_1 + U_1 = 0$$

அதாவது, $U_5 - 4U_4 + 6U_3 - 4U_2 + U_1 = 0$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களை இதில் பிரதியிடவும்.

$$22 - 4(10) + 6(4) - 4U_2 + 2 = 0$$

$$8 - 4U_2 = 0$$

$$\therefore\quad U_2 = 2.$$

மாதிரி 59

$U_0+U_8=x, U_1+U_7=y, U_2+U_6=z, U_3+U_5=t$ என்றால் U_4 ஐக் காண்க. (சென்னை '64 ஏப்.)

U_x ஐ ஒரு ஏழாம் படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையெனக் கொள்க.

$$\therefore\ \triangle^8 U_0 = 0.$$

அதாவது, $(E-1)^8\,U_0=0$

$$(E^8-{}^8C_1E^7+{}^8C_2E^6-{}^8C_3E^5+{}^8C_4E^4-{}^8C_5E^3+{}^8C_6E^2-{}^8C_7E+1)U_0=0$$

$$E^8U_0-8\,E^7U_0+28\,E^6U_0-56\,E^5U_0+70\,E^4U_0-56\,E^3U_0+28\,E^2U_0-8\,E\,U_0+U_0=0$$

அதாவது, $U_8-8\,U_7+28\,U_6-56\,U_5+70\,U_4-56\,U_3+28U_2-8\,U_1+U_0=0$

$$(U_0+U_8)-8(U_1+U_7)+28(U_2+U_6)-56(U_3+U_5)+70U_4=0$$

இப்பொழுது, கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புக்களைப் பிரதியிடவும்.

$$x-8\,y+28\,z-56\,t+70\,U_4=0$$

$$\therefore\ U_4=\frac{56\,t-28\,z+8\,y-x}{70}$$

பயிற்சி 12

1. $U_x=\dfrac{1}{x\,(x+1)\,(x+2)}$ என்றால் $\triangle U_x$-ஐக் காண்க.

2. கீழ்க்கண்ட சார்புகளின் முதல் நிலை வேறுபாடுகளைக் காண்க:

   (i) e^x (ii) $\cos nx$ (iii) $x\,(x-1)\,3^x$

3. $\triangle \log U_x=\log\left(1+\dfrac{\triangle U_x}{U_x}\right)$ என்று காட்டுக.

4. $\triangle\left[\dfrac{f\,(x)}{g\,(x)}\right]=\dfrac{g\,(x)\,\triangle f\,(x)-f\,(x)\,\triangle g\,(x)}{g\,(x)\,g\,(x+1)}$

5. $\left(\dfrac{\triangle^2}{E}\right)e^x.\ \dfrac{E\,(e^x)}{\triangle^2 e^x}=e^x$ என்று நிரூபிக்கவும்.

6. $U_0=-4,\ U_1=-2,\ U_4=220,\ U_5=546,\ U_6=1148$ என்றால் $U_2,\ U_3$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

   ($\triangle^5 U_0=0,\ \triangle^5 U_1=0$ என்ற சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.)

7. $\triangle^r \operatorname{Sin}(ax+b)=\left(2\operatorname{Sin}\dfrac{a}{2}\right)^r \operatorname{Sin}\left[ax+b+\dfrac{r}{2}(a+\pi)\right]$ என்று காட்டுக

   (சென்னை '65 ஏப்.)

8. $\triangle^2\left[\dfrac{a^{2x}+a^{4x}}{(a^2-1)^2}\right]$ இன் மதிப்பைக் காண்க. (சென்னை '61 ஏப்., '63 செப்.)

9. $U_1x+U_2x^2+U_3x^3+\ldots\ldots=\dfrac{x}{1-x}U_1+\dfrac{x^2}{(1-x)^2}\triangle U_1+\dfrac{x^3}{(1-x)^3}\triangle^2 U_1+\ldots\ldots\ldots$ என்று காட்டுக. (சென்னை '69 செப்.)

10. $a_0x-a_1x^2+a_2x^3-a_3x^4+\ldots\ldots=\frac{a_0x}{1+x}-\Delta a_0\frac{x^2}{(1+x)^2}+\Delta^2a_0\frac{x^3}{(1+x)^3}$ —.......... என்று காட்டுக. (சென்னை '70 ஏப்.)

11. $e^x\left\{U_0+x\Delta U_0+\frac{x^2}{2!}\Delta^2 U_0+\ldots\ldots\right\}=U_0+U_1x+U_2\frac{x^2}{2!}+\ldots\ldots\ldots\ldots$ என்று காட்டுக. (சென்னை '69 செப்.)

12. f (x) என்பது x-இல் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையென்றால்,

$$\sum_{r=0}^{\infty} f(r)\frac{x^r}{r!}=e^x\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}\Delta^r f(0)$$ என்று காட்டுக.

(சென்னை எம்.எஸ்ஸி. '69 ஏப்.)

3.7 பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகள் (Differences of Zero)

x^p என்ற சார்பில் $x=0, 1, 2,\ldots\ldots$ என்று பிரதியிட $0^p, 1^p, 2^p,\ldots\ldots$ என்ற சார்பலன்கள் கிடைக்கின்றன. இச்சார்பலன்களின் வேறுபாட்டுப் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x	x^p	Δx^p	Δ^2x^p	Δ^3x^p
0	0^p			
		$1^p-0^p=\Delta 0^p$		
1	1^p		$\Delta 1^p-\Delta 0^p=\Delta^2 0^p$	
		$2^p-1^p=\Delta 1^p$		$\Delta^2 1^p-\Delta^2 0^p=\Delta^3 0^p$
2	2^p		$\Delta 2^p-\Delta 1^p=\Delta^2 1^p$	
		$3^p-2^p=\Delta 2^p$		$\Delta^2 2^p-\Delta^2 1^p=\Delta^3 1^p$
3	3^p		$\Delta 3^p-\Delta 2^p=\Delta^2 2^p$	
		$4^p-3^p=\Delta 3^p$		
4	4^p			

மேற்கண்ட பட்டியலில் காணப்படும் $\Delta 0^p$, $\Delta^2 0^p$, $\Delta^3 0^p,\ldots\ldots$ என்ற முன்வேக வேறுபாடுகள் யாவும் பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகள் (differences of zero) என்று அழைக்கப்படுகின்றன. n ஒரு முழு

எண்ணுகயிருப்பின் $\Delta^n 0^p$ இன் பல்வேறு மதிப்புக்களைக் காணப் பயன்படும் வாய்பாடு கீழ்க்கண்டவாறு பெறப்படுகிறது.

$$\Delta^n x^p = (E-1)^n x^p$$
$$= E^n x^p - {}^nC_1 E^{n-1} x^p + {}^nC_2 E^{n-2} x^p - \ldots\ldots + (-1)^n x^p$$

வேறுபாட்டு இடைவெளியை 1 எனக் கொண்டால்,

$$\Delta^p x^p = (x+n)^p - {}^nC_1(x+n-1)^p + {}^nC_2(x+n-2)^p - \ldots\ldots + (-1)^n x^p$$

இப்பொழுது x=0 என்று பிரதியிட,

$$\Delta^n 0^p = n^p - {}^nC_1(n-1)^p + {}^nC_2(n-2)^p - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\,{}^nC_{n-1}(1)^p + (-1)^n 0^p$$
$$= n^p - {}^nC_1(n-1)^p + {}^nC_2(n-2)^p - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\, n\, 1^p$$

இவ்வாய்பாட்டில் n=1, 2, 3,...... என்று பிரதியிட பூச்சியத்தின் பல்வேறு நிலை வேறுபாடுகளும் கிடைக்கின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, n=4, p=5 என்று கொண்டால்,

$$\Delta^4 0^p = 4^5 - {}^4C_1\, 3^5 + {}^4C_2\, 2^5 - {}^4C_3\, 1^5$$
$$= 1024 - 972 + 192 - 4$$
$$= 240$$

குறிப்பு: n-இன் எல்லா முழு எண் மதிப்புக்களுக்கும்

$\Delta^{n+1} x^n = 0$ ஆகையால் $n > p$ ஆகயிருப்பின் $\Delta^n 0^p = 0$ ஆகும். p=n ஆனல்,

$$\Delta^n 0^p = n^n - {}^nC_1(n-1)^n + {}^nC_2(n-2)^n - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} n.1^n$$

3.7.1 பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகளின் மடங்குத் தொடர்பு (Recurrence relation between differences of zero)

$$\Delta^n x^p = (x+n)^p - {}^nC_1(x+n-1)^p + {}^nC_2(x+n-2)^p - \ldots\ldots$$

இப்பொழுது n-ஐ (n−1) ஆகவும், p-ஐ (p−1) ஆகவும் மாற்றவும்.

$$\Delta^{n-1} x^{p-1} = (x+n-1)^{p-1} - {}^{n-1}C_1(x+n-2)^{p-1} + {}^{n-1}C_2\,(x+n-3)^{p-1} - \ldots\ldots$$

இச்சமன்பாட்டில் $x=1$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\triangle^{n-1} 1^{p-1} = n^{p-1} - {}^{n-1}C_1 (n-1)^{p-1} + {}^{n-1}C_2 (n-2)^{p-1} - \ldots\ldots$$

$$= n^{p-1} - (n-1)(n-1)^{p-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}(n-2)^{p-1} - \ldots$$

$$= n^{p-1} - (n-1)^p + \frac{(n-1)}{2!}(n-2)^p - \ldots\ldots$$

$$\therefore\ n\triangle^{n-1} 1^{p-1} = n^p - n(n-1)^p + \frac{n(n-1)}{2!}(n-2)^p - \ldots\ldots$$

$$= n^p - {}^nC_1 (n-1)^p + {}^nC_2 (n-2)^p - \ldots\ldots$$

$$= \triangle^n 0^p$$

$$\therefore\ \triangle^n 0^p = n\triangle^{n-1} 1^{p-1}$$

$$= n\triangle^{n-1} E\, 0^{p-1}$$

$$= n\triangle^{n-1}(1+\triangle)\, 0^{p-1}$$

$$= n(\triangle^{n-1} + \triangle^n)\, 0^{p-1}$$

அதாவது, $\triangle^n 0^p = n(\triangle^{n-1} 0^{p-1} + \triangle^n 0^{p-1})$

இம் மடங்குத் தொடர்பு "டீ மார்கனின் வாய்பாடு" (De' Morgan's formula) என்று வழக்கப்படுகிறது. இவ் வாய்பாட்டைக் கீழ்க்கண்ட அமைப்பிலும் மாற்றி எழுதலாம்.

$$\frac{\triangle^n 0^p}{n!} = \frac{n(\triangle^{n-1} 0^{p-1} + \triangle^n 0^{p-1})}{n!}$$

$$= \frac{\triangle^{n-1} 0^{p-1}}{(n-1)!} + \frac{n\,\triangle^n 0^{p-1}}{n!}$$

3.7.2 $\triangle^n 0^p$ இன் மதிப்புக்களின் பட்டியல்

$$\triangle^n 0^p = n^p - n(n-1)^p + \frac{n(n-1)}{2!}(n-2)^p - \ldots\ldots$$

$n=0$ ஆயின் p-யின் எல்லா முழு எண் மதிப்புக்களுக்கும்

$$\triangle^n 0^p = \triangle^0 0^p = 0 \text{ ஆகும்.}$$

மேலும், $\triangle x^n = (x+1)^p - x^p$ என்ற தொடர்பில் $x=0$ என்று பிரதியிட, p-யின் எல்லா முழு எண் மதிப்புக்களுக்கும்

$$\triangle 0^p = 1^p = 1 \text{ ஆகும்.}$$

மேலும், $n > p$ ஆனல் $\triangle^n x^p = 0$.

ஆகவே, $\triangle^2 0^1 = \triangle^3 0^2 = \triangle^4 0^3 = \ldots\ldots\ldots = 0$.

மேற்கண்ட மதிப்புக்களின் உதவியால், n, p ஆகியவற்றின் பல்வேறு மதிப்புக்களுக்குரிய $\triangle^n 0^p$-யின் மதிப்புக்களைப் பெறலாம்.

இப்பொழுது, $\triangle^n 0^p = n\,(\triangle^n 0^{p-1} + \triangle^{n-1} 1^{p-1})$ என்ற மடங்குத் தொடர்பைக் கருதுக.

$n=2,\ p=2$ ஆனல், $\triangle^2 0^2 = 2\,(\triangle^2 0^1 + \triangle 0^1)$
$= 2\,(0+1) = 2.$

$n=2,\ p=3$ ஆனல், $\triangle^2 0^3 = 2\,(\triangle^2 0^2 + \triangle\, 0^2)$
$= 2\,(2+1) = 6$

$n=3,\ p=2$ ஆனல், $\triangle^3 0^2 = 3\,(\triangle^3 0^1 + \triangle^2 0^1)$
$= 3\,(0+0) = 0$

$n=3,\ p=3$ ஆனல், $\triangle^3 0^3 = 3\,(\triangle^3 0^2 + \triangle^2 0^2)$
$= 3\,(0+2) = 6$

இவ்வாறு $\triangle^n 0^p$ இன் எல்லா மதிப்புக்களையும் பெறலாம். n, p ஆகியவற்றின் சில மதிப்புக்களுக்குரிய பூச்சியத்தின் வேறுபாடு களின் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

p	$\triangle 0^p$	$\triangle^2 0^p$	$\triangle^3 0^p$	$\triangle^4 0^p$	$\triangle^5 0^p$
1	1	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0
3	1	6	6	0	0
4	1	14	36	24	0
5	1	30	150	240	120
6	1	62	540	1560	1800
7	1	126	1806	8400	16800
8	1	254	5796	40824	126000

மேற்கண்ட பட்டியல் மதிப்புக்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம்.

$n=2$, $p=4$க்குரிய வேறுபாடு $\Delta^2 0^4$ ஆகும். இது 4வது நிரையில் (row) 3வது நிரலில் (column) உள்ளது. இதன் மதிப்பு 14 ஆகும். இம் மதிப்பைக் கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம். $\Delta^2 0^4$ இருக்கும் நிரைக்கு முந்திய 3வது நிரையில் இரண்டாம் மூன்றும் நிரல்களில் முறையே 1, 6 என்ற மதிப்புக்கள் இருக்கின்றன. இம் மதிப்புக்களின் மொத்தம் $1+6=7$ ஆகும். இந்த மொத்தமாகிய 7ஐ $n=2$ ஆல் பெருக்கினால் $\Delta^2 0^4$இன் மதிப்பு $7\times2=14$ என்று கிடைக்கும். இவ்வாறு,

$$\Delta^2 0^5 = 2\ (1+14)=30$$

$$\Delta^2 0^6 = 2\ (1+30)=62$$

$$\Delta^3 0^6 = 3\ (30+150)=540$$

$$\Delta^4 0^7 = 4\ (540+1560)=8400$$

$$\Delta^5 0^8 = 5\ (8400+16800)=126000.$$

இம் முறையைப் பின்பற்றி $\Delta^n 0^p$ இன் எல்லா மதிப்புக்களையும் பெறலாம்.

3.7.3. பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகளின் பயன்கள்

1. x^pஐப் பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகளைப் பயபடுத்தி 0^p இன் அடுத்தடுத்த வேறுபாடுகளைக் கொண்ட தொடராக எழுதலாம். எவ்வாறெனில்,

$$f(x+nh)=f(x)+{}^nC_1\ \Delta f(x)+{}^nC_2\ \Delta^2 f(x)+\ldots\ldots+\Delta^n f(x)$$

இச் சமன்பாட்டில் $x=0$, $h=1$ எனப் பிரதியிட்டு nஐ x ஆக மாற்ற,

$$f(x)=f(0)+{}^xC_1\ \Delta f(0)+{}^xC_2\ \Delta^2 f(0)+\ldots\ldots\ldots+\Delta^x f(0).$$

இப்பொழுது, $f(x)=x^p$ எனக் கொண்டால்,

$$x^p=0^p+{}^xC_1\ \Delta 0^p+{}^xC_2\ \Delta^2 0^p+\ldots\ldots+{}^xC_p\ \Delta^p 0^p,$$

ஏனெனில், $x=n>p$ ஆனால் $\Delta^{p+1} 0^p$, $\Delta^{p+2} 0^p$,......
எல்லாம் பூச்சியமாகையால் மற்ற உறுப்புக்கள் யாவும் மறைந்து விடுகின்றன.

2. பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகள் $n!$க்கு ஒரு வாய்ப்பாட்டை அளிக்கிறது.

எவ்வாறெனில்,

$$\Delta^n 0^n = n^n - {}^nC_1\ (n-1)^n + {}^nC_2\ (n-2)^n - \ldots + (-1)^{n-1}\ n\cdot 1^n \cdot$$

மேலும் $\triangle^n x^n = n!$ ஆகவே, $\triangle^n 0^n = n!$ ஆகவே,

$$n! = n^n - {}^nC_1 (n-1)^n + {}^nC_2 (n-2)^n - \ldots\ldots\ldots$$

3. சில முடிவுள்ள தொடர்கள் (finite series), முடிவிலாத் தொடர்கள் (infinite series) ஆகியவற்றின் கூட்டுத் தொகைகளைப் பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகளின் உதவியால் காணமுடியும்.

4. பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகளின் உதவியால் புள்ளியல் பரவல்களின் (Statistical distributions) விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் (moments) காண முடியும்.

எடுத்துக் காட்டாக, p, q என்பவற்றை முறையே வெற்றி, தோல்விகளின் நிகழ் தகவுகளாகக் (probabilities) கொண்ட

$$f(x) = {}^nC_x\, p^x\, q^{n-x}$$

என்ற ஈருறுப்புச் சேர்க்கைப் பரவலைக் (Binomial distribution) கருதுக. இங்கு $p+q=1$ ஆகும். இப்பரவலில் x இன் மதிப்புக்கள் 0, 1, 2, 3,……, n ஆகும். இதன் r-ஆம் நிலை விலக்கப் பெருக்குத் தொகை (r-th order moment) யைக் கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம்.

பூச்சியத்தை ஆதி (origin)யாகக் கொண்ட r-ஆம் நிலை விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$\mu'_r = \sum_0^n x^r f(x)$$

$$= 0^r f(0) + 1^r f(1) + 2^r f(2) + \ldots + n^r f(n)$$

$$= 0^r f(0) + E\,0^r f(1) + E^2 0^r f(2) + \ldots\ldots + E^n 0^r f(n)$$

$$= [f(0) + E f(1) + E^2 f(2) + \ldots\ldots + E^n f(n)]\, 0^r$$

$$= [q^n + E\,{}^nC_1 p^1 q^{n-1} + E^2\,{}^nC_2 (p^2 q^{n-2} + \ldots\ldots E^n p^n]\, 0^r$$

$$= [q^n + {}^nC_1 (Ep) q^{n-1} + {}^nC_2 (Ep)^2 q^{n-2} + \ldots\ldots (Ep)^n]\, 0^r$$

$$= (q+Ep)^n\, 0^r$$

$$= [q+(1+\triangle)p]^n\, 0^r$$

$$= (q+p+\triangle p)^n\, 0^r$$

$$= (1+p\triangle)^n\, 0^r$$, ஏனெனில் $q+p=1$.

இப்பொழுது r = 1 ஆனால்,

$$\mu'_1 = (1+p\triangle)^n 0$$
$$= (1+{}^nC_1 p^4\triangle+{}^nC_2 p^2 \triangle^2+\ldots.) 0$$
$$= 0+{}^nC_1 p\triangle 0+{}^nC_2 p^2 \triangle^2 0+\ldots.$$

ஆனால், $\triangle 0 = 1$; $\triangle^2 0=\triangle^3 0=\ldots.= 0.$

ஆகவே, $\mu'_1 = 0+{}^nC_1 p\cdot 1$

$$= np.$$

r=2 ஆனால்,

$$\mu'_2 = (1+p\triangle)^n 0^2$$
$$= (1+{}^nC_1 p\triangle+{}^nC_2 p^2\triangle^2+{}^nC_3 p^3 \triangle^3+\ldots.) 0^2$$
$$= 0^2+{}^nC_1 p \triangle 0^2 +{}^nC_2 p^2 \triangle^2 0^2 +{}^nC_3 p^3 \triangle^3 0^2 +\ldots\ldots$$

ஆனால் $\triangle 0^2 = 1$; $\triangle^2 0^2 =2$; $\triangle^3 0^2 =\triangle^4 0^2 =\ldots. = 0.$

ஆகவே, $\mu'_2 = 0+n p+ \frac{n(n-1)}{2!} p^2 \cdot 0$

$$= np+n (n-1) p^2$$

இவ்வாறு μ'_3, μ'_4, μ'_5 ,.... ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் காணலாம். அம் மதிப்புக்களிலிருந்து μ_2, μ_3, μ_4,...... முதலிய மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைப் (central moments) பெறலாம்.

மாதிரி 60

$$\triangle^m 0^n +{}^nC_1 \triangle^m 0^{n-1} +{}^nC_2 \triangle^m 0^{n-2} +\ldots\ldots+\frac{n!}{(n-m)!}$$
$$= \frac{\triangle^{m+1} 0^{n+1}}{m+1}$$ என்று நிரூபிக்கவும்.

இப்பொழுது $\triangle^m x^m = m!$

$$\therefore \quad \frac{n!}{(n-m)!}=\frac{n!\ m!}{m!(n-m)!}={}^nC_m \cdot m!={}^nC_m \cdot \triangle^m x^m.$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் இடப்பக்கம்

$$= [\triangle^m x^n +{}^nC_1 \triangle^m x^{n-1} +{}^nC_2 \triangle^m x^{n-2} +\ldots\ldots.. +{}^nC_m \triangle^m x^m],\ x=0.$$

$$= \triangle^m [x^n +{}^nC_1 x^{n-1} +{}^nC_2 x^{n-2} +\ldots.+{}^nC_m x^m],\ x=0.$$

ஆனால் m > p என்றால் $\triangle^m x^p =0$.

ஆகவே, $\triangle^m x^{m-1} = \triangle^m x^{m-2} = \ldots\ldots = \triangle^m x = \triangle^m 1 = 0$.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் இடப்பக்கம்

$$= \triangle^m [\, x^n + {}^nC_1 x^{n-1} + {}^nC_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + {}^nC_m x^m + {}^nC_{m+1} x^{n-m-1} + \ldots\ldots + 1 \,],\ x=0.$$

$$= \triangle^m (x+1)^n,\ x=0$$

$$= \triangle^m E x^n,\ x=0$$

$$= \triangle^m (1+\triangle) x^n,\ x=0$$

$$= \triangle^m x^n + \triangle^{m+1} x^n,\ x=0$$

$$= \triangle^m 0^n + \triangle^{m+1} 0^n$$

$$= \frac{(m+1)\,[\triangle^m 0^n + \triangle^{m+1} 0^n]}{m+1}$$

$$= \frac{\triangle^{m+1} 0^{n+1}}{m+1},\ \text{ஏனெனில்}\ \triangle^n 0^p = n\,(\triangle^n 0^{p-1} + \triangle^{n-1} 0^{p-1})$$

மாதிரி 61

பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகளைப் பயன்படுத்தி n க்கு முழு எண் மதிப்புக்களைக் கொண்ட $n^2 + {}^nC_1 (n-1)^2 + {}^nC_2 (n-2)^2 + \ldots\ldots$ என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரை x-க்குப் பூச்சிய மதிப்புக் கொண்ட கீழ்க்கண்ட தொடராக மாற்றி எழுதவும்.

$$(x+n)^2 + {}^nC_1 (x+n-1)^2 + {}^nC_2 (x+n-2)^2 + \ldots\ldots,\ x=0.$$

$$= E^n x^2 + {}^nC_1 E^{n-1} x^2 + {}^nC_2 E^{n-2} x^2 + \ldots\ldots$$

$$= (E^n + {}^nC_1 E^{n-1} + {}^nC_2 E^{n-2} + \ldots\ldots)\, x^2$$

$$= (E+1)^n x^2$$

$$= (1+\triangle+1)^n x^2$$

$$= (2+\triangle)^n x^2$$

$$= (2^n + {}^nC_1 2^{n-1} \triangle + {}^nC_2 2^{n-2} \triangle^2 + \ldots\ldots)\, x^2$$

$$= 2^n x^2 + {}^nC_1 2^{n-1} \triangle x^2 + {}^nC_2 2^{n-2} \triangle^2 x^2 + {}^nC_3 2^{n-3} \triangle^3 x^2 + \ldots\ldots$$

ஆனல் $x=0$ ஆகவே, $\triangle 0^2 = 1$; $\triangle^2 0^2 = 2$; $\triangle^3 0^2 = \triangle^4 0^2 = 0\ldots\ldots$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்

$$=0+{}^nC_1\,2^{n-1}.\,1+{}^nC_2\,2^{n-2}.\,2$$

$$=n.\,2^{n-1}+\frac{n\,(n-1)}{2}.\,2^{n-2}.\,2$$

$$=2^{n-2}\,[2\,n+n\,(n-1)]$$

$$=2^{n-2}\,[n^2+n]$$

$$=n\,(n+1)\,2^{n-2}.$$

மாதிரி 62

நிருபிக்க: (i) $\triangle^n\,0^{n+1}=\frac{n\,(n+1)}{2}\triangle^n\,0^n$

(ii) $\triangle^n\,0^n=\frac{2}{n+1}(\triangle^{n-1}\,0^n+\triangle^n\,0^n)$ (சென்னை '68 செப்.)

(i) $\triangle^n\,0^p=n\,(\triangle^n\,0^{p-1}+\triangle^{n-1}\,0^{p-1})$ என்ற மடங்குத் தொடரைக் கருதுக.

$$\therefore\ \triangle^n\,0^{n+1}=n\,(\triangle^n\,0^n+\triangle^{n-1}\,0^n)$$

ஆனால் $\triangle^n\,0^n=n!$

$$\therefore\ \triangle^n\,0^{n+1}=n\,(n!+\triangle^{n-1}\,0^n)$$

$$=n.n!+n.\triangle^{n-1}\,0^n$$

$$=n.n!+n\,(n-1)\,[\triangle^{n-1}\,0^{n-1}+\triangle^{n-2}\,0^{n-1}]$$

$$=n.n!+n\,(n-1)\,[(n-1)!+\triangle^{n-2}\,0^{n-1}]$$

$$=n.n!+n\,(n-1)\,(n-1)!+n\,(n-1)\,\triangle^{n-2}\,0^{n-1}$$

$$=n.n!+n\,(n-1)\,(n-1)!+ n\,(n-1)\,(n-2)[\triangle^{n-2}\,0^{n-2}+\triangle^{n-3}\,0^{n-2}]$$

$$=n.n!+n\,(n-1)\,(n-1)!+n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-2)! +n\,(n-1)\,(n-2)\,\triangle^{n-3}\,0^{n-2}$$

$$=n.n!+n\,(n-1)\,(n-1)!+n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-2)! +\ldots\ldots+n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots2.2!+n!$$

$$=n!\,[n+(n-1)+(n-2)+\ldots\ldots+2+1]$$

$$=n!\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$=n!\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\triangle^n 0^n\,\frac{n(n+1)}{2}$$

(ii) $\triangle^n 0^{n+1}=n\,[\triangle^n 0^n+\triangle^{n-1} 0^n]$

ஆனல் (i) இலிருந்து $\triangle^n 0^{n+1}=\dfrac{n(n+1)}{2}\triangle^n 0^n$.

ஆகவே, $\dfrac{n(n+1)}{2}\triangle^n 0^n=n\triangle^n 0^n+n\,\triangle^{n-1} 0^n$

$$\therefore\ \frac{n+1}{2}\triangle^n 0^n=\triangle^n 0^n+\triangle^{n-1} 0^n$$

$$\therefore\ \triangle^n 0^n=\frac{2}{n+1}\,[\triangle^n 0^n+\triangle^{n-1} 0^n]$$

3.8 காரணீயப் பெருக்கற் பல்லுறுப்புக் கோவை (Factorial Polynomial)

$$x\,(x-h)\,(x-2h)\ldots\ldots\ldots[x-(p-1)\,h]$$

என்ற தொடர் பெருக்கற் பலனைக் கருதுக. இதில் p காரணிகள் உள்ளன. இந்த p காரணிகளும் h வித்தியாசத்தில் ஒரே சீராக (uniformly) குறைந்துகொண்டே செல்லுகின்றன. இப் பெருக்கற் பலனை விரித்தெழுத p-படி பெற்ற ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை கிடைக்கும். இத்தகைய ஒரு கோவை p-படி பெற்ற காரணீயப் பெருக்கற் பல்லுறுப்புக் கோவை (Factorial polynomial of degree n) என்று அழைக்கப்படுகிறது. குறிப்பாக $h=1$ எனக் கொண்டால்,

$$x\,(x-1)\,(x-2)\ldots\ldots\ldots[x-(p-1)]$$

என்ற காரணீயப் பெருக்கற் பலன் கிடைக்கிறது. p காரணிகளைக் கொண்ட இப் பெருக்கற் பலன் $[x]^p$ அல்லது $x^{(p)}$ என்று குறிக்கப் படுகிறது. இவற்றுள் $[x]^p$ என்ற குறியீட்டையே நாம் இங்கு பயன் படுத்துகிறோம். ஆகவே,

$$[x]^p=x\,(x-1)\,(x-2)\ldots\ldots\ldots(x-p+1)$$

குறிப்பாக $p=0$ எனில், $[x]^0=1$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. மேற் கூறப்பட்ட காரணீயப் பெருக்கத்தின் காரணிகள் குறைந்து

கொண்டே செல்வதால் அது " இறங்குகின்ற காரணீயப் பெருக்கம் " (descending factorial) என்று அழைக்கப்படுகிறது. இதைபோல்,

$$x\,(x+1)\,(x+2)\ldots\ldots\ldots(x+p-1)$$

என்ற காரணீயப் பெருக்கம் " ஏறுகின்ற காரணீயப் பெருக்கம் " (ascending factorial) என்று அழைக்கப்படுகிறது. x-இல் p-படி பெற்ற ஏறுகின்ற காரணீயப் பெருக்கம் $|x|^{p}$ அல்லது $x^{|p|}$ என்று குறிக்கப்படுகிறது. ஆகவே,

$$|x|^{p}=x^{|p|}=x\,(x+1)\,(x+2)\ldots\ldots\ldots(x+p-1)$$

3.8.1 $[x]^{p}$-இன் வேறுபாடுகள்

வேறுபாட்டு இடைவெளியை 1 எனக் கொண்டால்,

$$\begin{aligned}\triangle[x]^{p}&=[x+1]^{p}-[x]^{p}\\&=[(x+1)\,(x)\,(x-1)\ldots\ldots\ldots(x-p+2)]-\\&\qquad[x\,(x-1)\,(x-2)\ldots\ldots\ldots(x-p+1)]\\&=x\,(x-1)\,(x-2)\ldots\ldots(x-p+2)\\&\qquad[(x+1)-(x-p+1)]\\&=x\,(x-1)\,(x-2)\ldots\ldots\ldots(x-p+2)\cdot p\\&=p\,[x]^{p-1}\end{aligned}$$

அதாவது, $\triangle[x]^{p}=p\,[x]^{p-1}$

ஆகவே, $\triangle^{2}\,[x]^{p}=p\,(p-1)\,[x]^{p-2}$

$$\triangle^{3}\,[x]^{p}=p\,(p-1)\,(p-2)\,[x]^{p-3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\triangle^{p}\,[x]^{p}=p\,(p-1)\,(p-2)\ldots\ldots\ldots3.2.1\,[x]^{0}=p\,(p-1)\,(p-2)\ldots\ldots\ldots3.2.1$$

$$\therefore\ \triangle^{p}\,[x]^{p}=p\,!$$

3.8.2 $[x]^{p}$-இன் வேறுபாடுகளின் மடங்குத் தொடர்பு

$$\triangle[x]^{p}=p\,[x]^{p-1}=\frac{p\,!}{(p-1)\,!}\,[x]^{p-1}$$

$$\therefore\ \frac{\triangle\,[x]^{p}}{p!}=\frac{[x]^{p-1}}{(p-1)!}$$

அதாவது, $\dfrac{[x+1]^{p}-[x]^{p}}{p!}=\dfrac{[x]^{p-1}}{(p-1)!}$

$$\therefore \frac{[x+1]^{p}}{p!}=\frac{[x]^{p}}{p!}+\frac{[x]^{p-1}}{(p-1)!}$$

3.8.3 தலைகீழ்க் காரணீயப் பெருக்கம் (Reciprocal Factorial)

$$[x]^{p}=x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-p+1)$$

என்ற காரணீயப் பெருக்கத்தைக் கருதுக.

$$\therefore [x]^{p}=x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-p+2)\cdot(x-p+1)$$

$$=[x]^{p-1}\cdot(x-p+1)$$

இதில் $p=0$ என்று பிரதியிட,

$$[x]^{0}=[x]^{-1}(x+1)$$

அதாவது, $1=[x]^{-1}(x+1)$

$$\therefore [x]^{-1}=\frac{1}{x+1}$$

$p=-1$ என்று பிரதியிட,

$$[x]^{-1}=[x]^{-2}\cdot(x+2)$$

அதாவது, $\dfrac{1}{x+1}=[x]^{-2}\cdot(x+2)$

$$\therefore [x]^{-2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

இதுபோல் $[x]^{-3}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

பொதுவாக, $[x]^{-p}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+p)}=\dfrac{1}{[x+1]^{p}}$

இவ்வாறு $[x]^{-p}$ என்பது $[x+1]^{p}$ என்ற காரணீயப் பெருக்கத்தின் தலைகீழ் விகிதமாகயிருப்பதால் இது தலைகீழ்க் காரணீயப் பெருக்கம் (reciprocal factorial) என்று அழைக்கப்படுகிறது. இதை எதிர்

காரணீயப் பெருக்கம் (negative factorial) என்றும் அழைப்பதுண்டு. தலைகீழ்க் காரணீயப் பெருக்கத்தின் வேறுபாடுகள் :—

$$\begin{aligned}\Delta[x]^{-p} &= [x+1]^{-p} - [x]^{-p}\\ &= \frac{1}{(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+p+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+p)}\\ &= \frac{(x+1)-(x+p+1)}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+p+1)}\\ &= \frac{-p}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+p+1)}\\ &= -p\,[x]^{-(p+1)} = -p\,[x]^{-p-1}\end{aligned}$$

இதுபோல், $\Delta^2 [x]^{-p} = -p(-p-1)[x]^{-p-2}$

$$\Delta^3 [x]^{-p} = -p(-p-1)(-p-2)[x]^{-p-3}$$

குறிப்பு : $\Delta^p [x]^{-p} = -p(-p-1)(-p-2)\ldots\ldots(-2p+1)[x]^{-2p}$

ஆகவே, $\Delta^n [x]^{-p}$ ஒரு மாறிலியல்ல என்பதைக் கவனிக்கவும்.

3.8.4 பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணீயப் பெருக்கமாக மாற்றுதல்

$[x]^p$ என்பது p-படி பெற்ற ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையென்று கண்டோம். ஆகவே, $[x]^{p-1}$, $[x]^{p-2}$,...... என்பன முறையே $(p-1)$, $(p-2)$,...... படிகளைப் பெற்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகளாகும். ஆகவே, n-படி பெற்ற f (x) என்ற ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை பல காரணீயப் பெருக்கங்களைக் கொண்டு அமையப் பெற்ற ஒரு கோவையாகக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$f(x) = a + b[x] + c[x]^2 + d[x]^3 + \ldots\ldots + k[x]^n \quad \ldots \quad (1)$$

எனக் கொள்க.

$$\begin{aligned}\therefore \Delta f(x) &= b + 2c[x] + 3d[x]^2 + \ldots\ldots + nk[x]^{n-1}\\ \Delta^2 f(x) &= 2c + 3\cdot 2d[x] + \ldots\ldots + n(n-1)k[x]^{n-2}\\ \Delta^3 f(x) &= 3\cdot 2d + \ldots\ldots + n(n-1)(n-2)k[x]^{n-3}\end{aligned}$$

. . . .

. . . .

$$\triangle^{n} f(x) = k\, n\, (n-1)\, (n-2) \ldots\ldots 3.2.1.\, [x]^{0}$$
$$= k.\, n!$$

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளில் $x = 0$ எனப் பிரதியிட,

$$f(0) = a$$
$$\triangle f(0) = b$$
$$\triangle^2 f(0) = 2!\, c \qquad \therefore\ c = \frac{\triangle^2 f(0)}{2!}$$
$$\triangle^3 f(0) = 3!\, d \qquad \therefore\ d = \frac{\triangle^3 f(0)}{3!}$$

.. ..

.. ..

$$\triangle^{n} f(0) = n!\, k \qquad \therefore\ k = \frac{\triangle^n f(0)}{n!}$$

இம் மதிப்புக்களைச் சமன்பாடு (1) இல் பிரதியிட $f(x)$ இன் கீழ்க் கண்ட காரணியப் பெருக்கற் கோவை கிடைக்கிறது.

$$f(x) = f(0) + \frac{\triangle f(0)}{1!}[x] + \frac{\triangle^2 f(0)}{2!}[x]^2 + \frac{\triangle^3 f(0)}{3!}[x]^3 + \ldots\ldots + \frac{\triangle^n f(0)}{n!}[x]^n.$$

மாதிரி 63

$10x^4 + 9x^3 + 5x^2 + 7x - 18$ என்ற கோவையையும் அதன் அடுத்தடுத்த வேறுபாடுகளையும் காரணியப் பெருக்கின் குறியீட்டில் எழுதுக. (சென்னை '65 ஏப்.)

$$f(x) = 10x^4 + 9x^3 + 5x^2 + 7x - 18.$$

$f(x)$ ஒரு நான்காம் படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகையால்,

$$f(x) = f(0) + \frac{\triangle f(0)}{1!}[x] + \frac{\triangle^2 f(0)}{2!}[x]^2 + \frac{\triangle^3 f(0)}{3!}[x]^3 + \frac{\triangle^4 f(0)}{4!}[x]^4$$

ஆகும். ஆகவே, $f(0)$, $\triangle f(0)$, $\triangle^2 f(0)$, $\triangle^3 f(0)$, $\triangle^4 f(0)$ ஆகிய முன்னணி வேறுபாடுகளின் மதிப்புக்களைப் பெறவேண்டும். இம் மதிப்புக்களை, $x = 0, 1, 2, 3, 4$ ஆகிய மதிப்புக்களுக்குரிய $f(x)$ இன்

மதிப்புக்களின் வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைத்துக் கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம்.

இப்பொழுது, $f(0) = -18$

$f(1) = 10+9+5+7-18 = 13$

$f(2) = 160+72+20+14-18 = 248$

$f(3) = 810+243+45+21-18 = 1101$

$f(4) = 2560+576+80+28-18 = 3226.$

x	f (x)	△ f (x)	△² f (x)	△³ f (x)	△⁴ f (x)
0	−18				
		31			
1	13		204		
		235		414	
2	248		618		240
		853		654	
3	1101		1272		
		2125			
4	3226				

ஆகவே, $f(0) = 18$, $\triangle f(0) = 31$, $\triangle^2 f(0) = 204$, $\triangle^3 f(0) = 414$, $\triangle^4 f(0) = 240$.

$$\therefore \quad f(x) = f(0) + \frac{\triangle f(0)}{1!}[x] + \frac{\triangle^2 f(0)}{2!}[x]^2 + \frac{\triangle^3 f(0)}{3!}[x]^3 + \frac{\triangle^4 f(0)}{4!}[x]^4.$$

$$= -18 + 31[x] + \frac{204}{2}[x]^2 + \frac{414}{6}[x]^3 + \frac{240}{24}[x]^4$$

$$= -18 + 31[x] + 102[x]^2 + 69[x]^3 + 10[x]^4.$$

அதாவது, $f(x) = 10[x]^4 + 69[x]^3 + 102[x]^2 + 31[x] - 18.$

இக் கோவையின் அடுத்தடுத்த வேறுபாடுகளை $\triangle[x]^p = p[x]^{p-1}$ என்ற வாய்பாட்டின் துணைகொண்டு கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம்.

$$\triangle f(x) = 40[x]^3 + 207[x]^2 + 204[x] + 31$$

$$\triangle^2 f(x) = 120[x]^2 + 414[x] + 204$$

$$\triangle^3 f(x) = 240[x] + 414$$

$$\triangle^4 f(x) = 240$$

$\triangle^5 f(x)$-அதற்கு மேற்பட்ட நிலை வேறுபாடுகளும் பூச்சியமாகின்றன.

மாற்று முறை :

$[x]^4$ இல் x, (x−1), (x−2), (x−3) என்ற காரணிகள் அடங்கியிருப்பதால் f (x) ஐ இக் காரணிகளால் அடுத்தடுத்து தொகுமுறையில் வகுத்தால் பல்வேறு காரணீயப் பெருக்கங்களின் குணகங்கள் கிடைக்கின்றன.

0	10	9	5	7	−18
		0	0	0	0
1	10	9	5	7	−18
		10	19	24	
2	10	19	24	31	
		20	78		
3	10	39	102		
		30			
	10	69			
	10				

மேற்கண்ட வகுத்தலில் கிடைக்கப் பெற்ற 10, 69, 102, 31, −18 என்பன முறையே $[x]^4$, $[x]^3$, $[x]^2$, $[x]^1$, $[x]^0$ ஆகியவற்றின் குணகங்களாகும். ஆகவே,

$$f(x) = 10\,[x]^4 + 69\,[x]^3 + 102\,[x]^2 + 31\,[x] - 18.$$

இம்முறை முந்திய முறையை விட எளிதான முறையாகும்.

மாதிரி 64

p(x) என்ற ஒரு மூன்றும் படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை (0, −1), (1, 1), (2, 1), (3, −2) என்ற புள்ளிகளின் வழியே செல்லுகிறது. p (1·2) இன் மதிப்பைக் காண்க. (சென்னை '69 ஏப்.)

x இன் மதிப்பு 0, 1, 2, 3 என்றால் p (x) இன் மதிப்புக்கள் முறையே −1, 1, 1, −2 என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே,

p(x) இன் வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைத்து அதன் உதவியால் p(x) ஐ ஒரு காரணீயப் பெருக்கற் கோவையாக எழுதலாம்.

x	p(x)	Δ p(x)	Δ^2 p(x)	Δ^3 p(x)
0	−1			
		2		
1	1		−2	
		0		−1
2	1		−3	
		−3		
3	−2			

p (x) ஒரு மூன்றாம் படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகையால்,

$$p(x) = p(0) + \frac{\Delta p(0)}{1!}[x] + \frac{\Delta^2 p(0)}{2!}[x]^2 + \frac{\Delta^2 p(0)}{3!}[x]^3.$$

$$= -1 + 2[x] + \frac{(-2)}{2}[x]^2 + \frac{(-1)}{6}[x]^3$$

$$= -1 + 2x - [x]^2 - \tfrac{1}{6}[x]^3.$$

$$p(1{\cdot}2) = -1 + 2\times(1{\cdot}2) - [1{\cdot}2]^2 - \tfrac{1}{6}[1{\cdot}2]^3$$
$$= -1 + 2{\cdot}4 - (1{\cdot}2)(1{\cdot}2-1) - \tfrac{1}{6}(1{\cdot}2)(1{\cdot}2-1)(1{\cdot}2-2)$$
$$= -1 + 2{\cdot}4 - (1{\cdot}2)(0{\cdot}2) - \tfrac{1}{6}(1{\cdot}2)(0{\cdot}2)(-0{\cdot}8)$$
$$= -1 + 2{\cdot}4 - 0{\cdot}24 + 0{\cdot}032$$
$$= 1{\cdot}192$$

மாதிரி 65

$9x^2 - 13x + 1$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் முதல் நிலை வேறுபாடு என்றால் அக் கோவையைக் காண்க.

முதலில் $9x^2 - 13x + 1$ ஐ காரணீயப் பெருக்கின் குறியீட்டில் எழுதவும். ஆகவே, x, x−1, ஆல் தொகு முறையில் வகுக்கவும்.

0	9	−13	1
		0	0
1	9	−13	1
		9	
	9	−4	
	9		

$$\therefore \quad 9x^2 - 13x + 1 = 9\,[x]^2 - 4\,[x] + 1$$

இது f(x) இன் முதல் நிலை வேறுபாடு எனக் கொள்க.

அதாவது, $\triangle f(x) = 9[x]^2 - 4\,[x] + 1$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{9\,[x]^3}{3} - \frac{4\,[x]^2}{2} + \frac{[x]}{1} + k \quad (k \text{ ஒரு மாறிலி})$$

$$= 3\,[x]^3 - 2\,[x]^2 + [x] + k.$$

குறிப்பு : $\triangle\,[x]^{p+1} = (p+1)\,[x]^p.$

$$\therefore \quad [x]^p = \frac{\triangle [x]^{p+1}}{p+1}$$

பயிற்சி 13

1. $y = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$ என்றால் $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$க்குரிய y-இன் மதிப்புக் களைக் கணக்கிட்டு வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்கவும். y-இன் இரண்டாம் நிலை வேறுபாடு $12x + 10$ என்று காட்டவும்.

2. $f(x) = 3x^3 + x^2 + x + 1$ஐ $ax\,(x-1)\,(x-2) + bx\,(x-1) + cx + d$ என்ற அமைப்பில் எழுதுக. $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$க்குரிய f(x) இன் மதிப்புக்களை எழுதி வேறுபாட்டுப் பட்டியலை அமைத்து நான்காம் நிலை வேறுபாடுகள் யாவும் மறைகின்றன எனக் காட்டுக.

3. $[x]^n = x\,(x-1)\,(x-2) \ldots\ldots (x-n+1)$ ஆனால் ஒரோர் அலகு மாறுதல் களுக்கு $\triangle\,[x]^n = n\,[x]^{n-1}$ என நிறுவுக. அதையொட்டி, $U_x = x^3 + 3x + 5$ என்ற சார்புக்கு $x = 2$ என்ற மதிப்பிற்குரிய $\triangle U_x$, $\triangle^2 U_x$, $\triangle^3 U_x$ காண்க. U_xக்கு $x = 0$ முதல் $x = 4$ வரை வேறுபாட்டுப் பட்டியல் எழுதிச் சரிபார்க்க.

(மதுரை '71 ஏப்.)

4. 3, 14, 39, 84, 155, 258 என்ற தொடரின் வேறுபாட்டுப் பட்டியலை அமைத்து அத்தொடரின் 10-வது உறுப்பினைக் காண்க.

5. $x^4 - 12x^3 + 42x^2 - 30x + 9$ என்ற சார்பினைக் காரணீயப் பெருக்கின் குறியீட்டில் எழுதுக. (சென்னை '64 ஏப்., 66 செப்.)

6. கீழ்க்கண்ட சார்புகளைக் காரணீயப் பெருக்கின் குறியீட்டில் எழுதுக.

   (i) $x^4 - 3x^2 + 2x + 6$

   (ii) $11x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x - 15$

7. $f(0) = -3$, $f(1) = 6$, $f(2) = 8$, $f(3) = 12$ என்றால் f(x) இன் மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் மாறிலி எனக் கருதி f(6)ஐக் காண்க.

8. $\triangle\,(5x^4 + 6x^3 + x^2 - x + 7) = 20\,[x]^3 + 108\,[x]^2 + 108\,[x] + 11$ எனக் காட்டுக

9. ஒரு சார்பின் முதல் நிலை வேறுபாடு $x^3+3x^2+5x+12$ என்றால் அச் சார்பினைக் காண்க.

10. $\triangle^{n} x^{r} = (x+n) \triangle^{n} x^{r-1} + n \triangle^{n-1} x^{r-1}$ என நிரூபிக்க.

(சென்னை '64 செப்.)

11. $\triangle^{n} 1^{p+1} = (n+1) \triangle^{n} 1^{p} + n \triangle^{n-1} 1^{p}$ என நிறுவுக.

12. $\sum_{i=0}^{r} [x+i]^{n} = \frac{1}{n+1} \{ [x+r+1]^{n+1} - [x]^{n+1} \}$ என்று நிரூபிக்க.

(சென்னை '60 செப்.)

4. சம இடைச் செருகல்
(Interpolation with equal intervals)

4.1 இடைச் செருகல் (Interpolation)

பொதுவாக x-ஐச் சார்பின் மாறியாகவுடைய $y = f(x)$ என்ற சார்பலன் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல், வர்க்கப் படுத்தல்,...... போன்ற செயலிகளை (operators)யுடைய இயற் கணிதச் சார்பாகயிருப்பின் x-இன் மதிப்புக்களுக்குரிய y-இன் மதிப்புக்களை இச் செயலிகளைச் செயல்படுத்துவதன் மூலம் மிகச் சரியாகப் பெறலாம். ஆனால், $y = \log x$ போன்ற சார்பலன்களில் x-இன் மதிப்புக்களுக்குரிய y-இன் மதிப்புக்களைச் சாதாரண எண் கணிதச் செயலிகளின் மூலம் காண இயலாது. எனவே இத்தகைய சார்பலன்களின் மதிப்புக்களைக் காண, x-இன் சில குறிப்பிட்ட மதிப்புக்களுக்குரிய y-இன் மதிப்புக்களடங்கிய பட்டியலின் உதவியை நாம் நாடவேண்டிய அவசியம் ஏற்படுகின்றது. உதாரணமாக,

x	$y = \log_{10} x$
2·0	0·30103
2·1	0·32222
2·2	0·34242
2·3	0·36173
2·4	0·38021
2·5	0·39794
2·6	0·41497

என்ற மடக்கைப் பட்டியலைக் (logarithmic table) கருதுக. இப் பட்டியலிலிருந்து, அதில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள x-இன் மதிப்புக்களுக் குரிய y-இன் மதிப்புக்களைப் பெறலாம். ஆனால் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள x-இன் ஏதாவது இரண்டு அடுத்தடுத்த மதிப்புக்களுக்கிடையிலுள்ள ஏதாவது ஒரு மதிப்புக்குரிய y-இன்

மதிப்பைப் பட்டியலிலிருந்து பெற இயலாது. உதாரணமாக x = 2·34க்குரிய y-இன் மதிப்பை இப்பட்டியலிலிருந்து பெற முடியாது. இத்தகைய இடை மதிப்புக்களை இடைச் செருகல் கொள்கை (Theory of interpolation)யின் மூலம் பெற முடிகிறது. இவ்வாறு சில குறிப்பிட்ட சார்பின் மாறிகளும், அவற்றிற்குரிய சார்பலன்களும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு பட்டியலிலிருந்து ஏதாவது இரண்டு அடுத்தடுத்த சார்பின் மாறிகளுக்கிடையிலுள்ள ஏதாவது ஒரு மதிப்புக்குரிய சார்பலனின் மதிப்பைப் பெறும் முறைக்கு இடைச் செருகல் (Interpolation) என்று பெயர். அந்த இடை மதிப்பைப் பெறப் பயன்படும் சூத்திரத்திற்கு இடைச் செருகல் வாய்பாடு (Interpolation Formula) என்று பெயர். இதுபோன்று, பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள x-இன் மதிப்புக்களுக்கு வெளியேயுள்ள (2·7, 2·8,...... போன்ற) ஏதாவது ஒரு மதிப்புக்குரிய y-இன் மதிப்பையும் இடைச் செருகல் முறையில் காணலாம். இவ்வாறு பட்டியல் வரிசைக்கு வெளியேயுள்ள மதிப்புக்களைக் காணும் முறைக்கு "புறச் செருகல்" (Extrapolation) என்று பெயர். குறிப்பாக, வெவ்வேறு காலங்களை x-இன் மதிப்புக்களாகவும் அக் காலங்களுக்குரிய மதிப்புக்களை y-இன் மதிப்புக்களாகவும் கொண்ட ஒரு காலத் தொடரில் (Time-Series) x-இன் வருங்கால மதிப்புக் களுக்குரிய y-இன் மதிப்புக்களைப் புறச் செருகல் மூலம் மதிப்பிடலாம் உதாரணமாக, 1931, 1941, 1951, 1961, 1971-ம் ஆண்டுகளில் நம் நாட்டின் மக்கட் தொகையின் மதிப்புக்களடங்கிய பட்டியலிலிருந்து 1972, 1973, 1981 ஆகிய ஆண்டுகளின் மக்கட் தொகைகளைப் புறச் செருகல் மூலம் மதிப்பிடலாம். இவ்வாறு வருங்கால மதிப்புக்களை முன்னதாக மதிப்பிடப் பயன்படுவதால் புறச் செருகல் முறை "முன் கணிப்பு" (Forecasting) என்றும் வழங்கப்படுகிறது.

4.2 இடைச் செருகலில் மேற்கொள்ளப்படும் தற்கோள்கள் (Assumptions in Interpolation)

(i) x-இன் ஏதாவது இரண்டு மதிப்புக்களுக்கிடையே f (x) இன் மதிப்புக்களில் திடீர் ஏற்றமோ அல்லது திடீர் இறக்கமோ இல்லை என்று கொள்ளப்படுகிறது.

(ii) f (x) இன் ஏற்ற இறக்கங்கள் ஒழுங்காகவும், ஒரே சீராகவும் இருப்பதாகக் கொள்ளப்படுகிறது.

மேற்கண்ட தற்கோள்களின் அடிப்படையில் இடை மதிப்புக் களைக் காணப் பயன்படும் இடைச் செருகல் வாய்பாடுகள் பல உள. அவற்றை இரு வகையாகப் பிரிக்கலாம். (i) சம இடைச் செருகல் வாய்பாடுகள் (ii) அசம இடைச் செருகல் வாய்பாடுகள். இவற்றுள்

சம இடைச் செருகல் வாய்பாடுகளுள் சில வாய்பாடுகள் மட்டும் இங்கு விளக்கப்பட்டுள்ளன.

4.3 நியூட்டனின் முன்வேக வேறுபாட்டு வாய்பாடு (Newton's formula for forward differences)

n-இன் எல்லா நேர் முழு எண் மதிப்புக்களுக்கும் f (x+nh)

$$=f(x)+\binom{n}{1}\Delta f(x)+\binom{n}{2}\Delta^2 f(x)+\ldots\ldots+\Delta^n f(x)$$

நிரூபணம் :

நியூட்டனின் வாய்பாடு n=m என்ற முழு எண் மதிப்புக்கு மெய்யாகிறது எனக் கொள்வோம். ஆகவே,

$$f(x+mh)=f(x)+\binom{m}{1}\Delta f(x)+\binom{m}{2}\Delta^2 f(x)+\ldots\ldots\ldots\ldots+\Delta^m f(x)$$

$$\therefore f(x+\overline{m+1}h)=f(x+mh)+\Delta f(x+mh)$$

$$=\left[f(x)+\binom{m}{1}\Delta f(x)+\binom{m}{2}\Delta^2 f(x)+\ldots\ldots+\Delta^m f(x)\right]$$

$$+\Delta\left[f(x)+\binom{m}{1}\Delta f(x)+\binom{m}{2}\Delta^2 f(x)+\ldots\ldots+\Delta^m f(x)\right]$$

$$=\left[f(x)+\binom{m}{1}\Delta f(x)+\binom{m}{2}\Delta^2 f(x)+\ldots\ldots+\Delta^m f(x)\right]$$

$$+\left[\Delta f(x)+\binom{m}{1}\Delta^2 f(x)+\binom{m}{2}\right]\Delta^3 f(x)+\ldots\ldots+\Delta^{m+1} f(x)$$

$$=f(x)+\left[\binom{m}{1}+1\right]\Delta f(x)+\left[\binom{m}{2}+\binom{m}{1}\right]\Delta^2 f(x)\ldots\ldots$$

$$+\left[\binom{m}{r}+\binom{m}{r-1}\right]\Delta^r f(x)+\ldots\ldots+\Delta^{m+1} f(x)$$

ஆனால், $\binom{m}{r}+\binom{m}{r-1}=\binom{m+1}{r}$ என அறிவோம்.

$$\therefore \binom{m}{1}+1=\binom{m}{1}+\binom{m}{0}=\binom{m+1}{r},$$

$$\binom{m}{2}+\binom{m}{1}=\binom{m+1}{2},$$

....

$$\therefore\ f(x+\overline{m+1}h)=f(x)+\binom{m+1}{1}\Delta f(x)+\binom{m+1}{2}\Delta^2 f(x)+\ldots$$
$$\ldots\ldots+\binom{m+1}{r}\Delta^r f(x)+\ldots\ldots\ldots+\Delta^{m+1} f(x)$$

ஆகவே, நியூட்டனின் வாய்பாடு $n=m+1$க்கும் மெய்யாகிறது என்று காண்கிறோம்.

ஆனால், $n=1$ என்றால் $f(x+h)=f(x)+\Delta f(x)$

$n=2$ என்றால் $f(x+2h)=f(x+h)+\Delta f(x+h)$

$$=f(x)+\Delta f(x)+\Delta[f(x)+\Delta f(x)]$$
$$=f(x)+\Delta f(x)+\Delta f(x)+\Delta^2 f(x)$$
$$=f(x)+2\Delta f(x)+\Delta^2 f(x)$$
$$=f(x)+\binom{2}{1}\Delta f(x)+\Delta^2 f(x)$$

ஆகவே, நியூட்டனின் வாய்பாடு $n=2$க்கு மெய்யாகிறது என்பதைக் காண்கிறோம். எனவே, மேலே காட்டப்பட்டிருக்கும் நிருபணத்தின்படி, நியூட்டனின் வாய்பாடு $n=2+1=3$க்கும் மெய்யாகும். ஆகவே $n=3+1=4$க்கும் மெய்யாகும். இவ்வாறு $n=5, 6, 7,\ldots\ldots$ ஆகிய எல்லா நேர் முழு எண் மதிப்புக்களுக்கும் வாய்பாடு மெய்யாகும்.

குறிப்பு 1. $f(x)$க்குப் பதிலாக U_x என்று எழுதினால், நியூட்டனின் வாய்பாடு கீழ்க்கண்ட வடிவில் அமையும்.

$$U_{x+nh}=U_x+{}^nC_1\ \Delta U_x+{}^nC_2\ \Delta^2 U_x+\ldots\ldots+{}^nC_r\ \Delta^r U_x+\ldots$$
$$\ldots\ldots+\Delta^n U_x.$$

குறிப்பு 2. பட்டியல் இடைவெளியாகிய h சிறியதாகவும் $y=f(x)$ இன் வளைவு பட்டியலின் தொடக்க மதிப்புக்களுக்குப் பக்கத்தில் வழவழப்பாகவும் இருந்தால் இவ் வாய்பாட்டை $(a-h, a)$ என்ற இடைவெளியிலுள்ள x இன் மதிப்புக்களுக்குரிய $f(x)$ இன் மதிப்புக்களைக் காணப் பயன்படும் புறச் செருகல் வாய்பாடாகவும் பயன்படுத்தலாம்.

குறிப்பு 3. இவ் வாய்பாட்டில் $x=0$, $h=1$ என்று பிரதியிட்டு n ஐ x ஆகமாற்றினால் கீழ்க்கண்ட மிகவும் பயன்படத்தக்க அமைப்பில் நியூட்டனின் வாய்பாடு மாறுகிறது.

$$=U_0+x\,\Delta U_0+\frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2U_0+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3U_0+\ldots$$
$$\ldots+\Delta^x U_0.$$

இந்த வாய்பாடு நியூட்டன்-கிரிகோரி (Newton-Gregory) வாய்பாடு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

மாதிரி 66

$U_0=-8$, $U_1=-2$, $U_2=6$, $U_3=40$, $U^4=148$ என்றால் U_x, U_{10} ஆகியவற்றைக் காண்க.

U_0 இலிருந்து U_4 வரை மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் U_x ஐ ஒரு நான்காம் படிப்பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் கொள்ளலாம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு வேறுபாட்டுப் பட்டியலை அமைக்கவும்.

x	U_x	$\triangle U_x$	$\triangle^2 U_x$	$\triangle^3 U_x$	$\triangle^4 U_x$
0	−8				
		6			
1	−2		2		
		8		24	
2	6		26		24
		34		48	
3	40		74		
		108			
4	148				

இப்பட்டியலிலிருந்து U_0 என்ற முன்னணி உறுப்பின் மதிப்பையும், $\triangle U_0$, $\triangle^2 U_0$, $\triangle^3 U_0$, $\triangle^4 U_0$ என்ற முன்னணி வேறுபாடுகளின் மதிப்புக்களையும் எழுதிக் கொள்க.

$U_0=-8$, $\triangle U_0=6$, $\triangle^2 U_0=2$, $\triangle^3 U_0=24$, $\triangle^4 U_0=24$.

நியூட்டன்-கிரிகோரி வாய்பாட்டில் இம் மதிப்புக்களைப் பிரதியிடவும்.

$$U_x=U_0+x\triangle U_0+\frac{x(x-1)}{2\,!}\triangle^2 U_0+\frac{x(x-1)\ (x-2)}{3\,!}\triangle^3 U_0$$
$$+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4\,!}\triangle^4 U_0.$$
$$=-8+x(6)+\frac{x(x-1)}{2}(2)+\frac{x(x-1)(x-2)}{6}\ (24)$$
$$+\frac{x(x-1)(x-2)\ (x-3)}{24}(24)$$
$$=-8+6x+x^2-x+4\,(x^3-3x^2+2x)+(x^4-6x^3+11x^2-6x)$$
$$=x^4-2x^3+7x-8$$

இதையே வாய்பாடாகக் கொண்டு $x=10$ என்று பிரதியிட்டால் U_{10} இன் மதிப்பு கிடைக்கும்.

$$U_{10}=10^4-2\,(10^3)+70-8$$
$$=10000-2000+70-8$$
$$=8062$$

மாதிரி 67

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து U_9 இன் மதிப்பைக் காண்க.

U_0	U_1	U_2	U_3	U_4	
1	11	21	28	29	(சென்னை '69 ஏப்.)

முன் வேக வேறுபாட்டுப் பட்டியலை அமைக்கவும்.

x	U_x	$\triangle U_x$	$\triangle^2 U_x$	$\triangle^3 U_x$	$\triangle^4 U_x$
0	1				
		10			
1	11		0		
		10		−3	
2	21		−3		0
		7		−3	
3	28		−6		
		1			
4	29				

$$U_0=1,\ \triangle U_0=10,\ \triangle^2 U_0=0,\ \triangle^3 U_0=-3,\ \triangle^4 U_0=0$$

நியூட்டன்-கிரிகோரி முன் வேக வாய்பாட்டில் இம் மதிப்புக்களைப் பிரதியிடவும்.

$$U_x=U_0+x\triangle U_0+\frac{x(x-1)}{2!}\triangle^2U_0+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\triangle^3U_0$$
$$=1+x(10)+\frac{x(x-1)}{2}(0)+\frac{x(x-1)(x-2)}{6}(-3)$$
$$=1+10x-\tfrac{1}{2}x(x-1)(x-2)$$

இதில் $x=9$ என்று பிரதியிடுக.

$$U9=1+90-\tfrac{9}{2}(8)(7)=-161$$

மாதிரி 68

x, U_x இன் பட்டியல் பின் வருமாறு:

x :	1	2	3	4	5
U_x :	375	414	451	498	546

U_6, $U_{2\cdot5}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் கணக்கிடுக.

(மதுரை '70 செப்.)

x	U_x	$\triangle U_x$	$\triangle^2 U_x$	$\triangle^3 U_x$	$\triangle^4 U_x$
1	375				
		39			
2	414		-2		
		37		12	
3	451		10		-21
		47		-9	
4	498		1		
		48			
5	546				

இங்கு x இன் மதிப்பு 1 இலிருந்து தொடங்குவதால் $U_{a+nh} = U_a + {}^nC_1 \triangle U_a + {}^nC_2 \triangle^2 U_a + {}^nC_3 \triangle^3 U_a + {}^nC_4 \triangle^4 U_a + \ldots\ldots\ldots$ என்ற வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

$a = x$ இன் முதல் மதிப்பு $= 1$

U_6 ஐக் கணக்கிட, $a + nh = 6$ எனக் கொள்ளவேண்டும்.

இங்கு $a=1, h=1 \quad \therefore \; 1+n=6 \quad \therefore \; n=5.$

$$\therefore U_6 = U_1 + {}^5C_1 \triangle U_1 + {}^5C_2 \triangle^2 U_1 + {}^5C_3 \triangle^3 U_1 + {}^5C_4 \triangle^4 U_1$$

$$= 375 + 5\,(39) + \frac{5\cdot4}{1\cdot2}\,-2) + \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\,(12) + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}(-21)$$

$$= 375 + 195 - 20 + 120 - 105$$

$$= 575.$$

இதேபோல் $U_{2\cdot5}$ ஐக் கணக்கிட, $1+n=2\cdot5 \quad \therefore \quad n=1\cdot5$ என்று பிரதியிட வேண்டும்.

$$\therefore U_{2\cdot5} = U_1 + 1\cdot5 \triangle U_1 + \frac{(1\cdot5)\ (0\cdot5)}{1\cdot2.} \triangle^2 U_1 + \frac{(1\cdot5)(0\cdot5)(-0\cdot5)}{1\cdot2\cdot3} \triangle^3 U_1$$

$$+ \frac{(1\cdot5)(0\cdot5)(-0\cdot5)(-1\cdot5)}{1\cdot2\cdot3\cdot4} \triangle^4 U_1$$

$$=375+(1\cdot5)(39)+\frac{(1\cdot5)\ (0\cdot5)}{2}\ (-2)+\frac{(1\cdot5)\ (0\cdot5)\ (-0\cdot5)}{6}(12)$$

$$+\frac{(1\cdot5)\ (0\cdot5)\ (-0\cdot5)\ (-1\cdot5)}{24}\ (-21)$$

$$=375+58\cdot5-0\cdot75-0\cdot75-0\cdot4922$$

$$=431\cdot5078$$

மாதிரி 69

$y=2x^3-x^2+3x+1$ என்பது ஒரு சார்பு ; $x=0, 1, 2, 3, 4, 5$க் குரிய y இன் மதிப்புக்களைக் கண்டு, வேறுபாடு பட்டியல் அமைத்துக் காட்டுக. அவ் வழியாக, இடைச் செருகல் வாய்பாடு கொண்டு $x=8$ க்குரிய y இன் மதிப்பைக் காண்க. (மதுரை '70 ஏப்.)

x	y=f(x)	Δ f(x)	Δ^2 f(x)	Δ^3 f(x)	Δ^4 f(x)
0	1				
		4			
1	5		10		
		14		12	
2	19		22		0
		36		12	
3	55		34		0
		70		12	
4	125		46		
		116			
5	241				

$$f(x)=f(0)+x\,\Delta f(0)+\frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(0)+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 f(0)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$x=8$, $f(0)=1$, $\Delta f(0)=4$, $\Delta^2 f(0)=10$, $\Delta^3 f(0)=12$.

$$\therefore\ f(8)=1+8\ (4)+\frac{8\cdot7}{2}\ (10)+\frac{8\cdot7\cdot6}{6}(12)$$

$$=1+32+280+672$$

$$=985$$

மாதிரி 70

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து 29 வயதிற்கான ஆண்டுப் பிரிமியத்தை மதிப்பிடுக.

வயது :	24	28	32	36
ஆண்டுப் பிரிமியம் :	1427	1580	1772	1996

(மதுரை '69 ஏப்.)

வயது x	பிரிமியம் U_x	$\triangle U_x$	$\triangle^2 U_x$	$\triangle^3 U_x$
24	1427			
		153		
28	1580		39	
		192		-7
32	1772		32	
		224		
36	1996			

$$U_{a+nh} = U_a + n \triangle U_a + \frac{n(n-1)}{2!} \triangle^2 U_a + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \triangle^3 U_a + \ldots\ldots\ldots$$

என்ற வாய்பாட்டில், $a=24$, $h=4$, $a+nh=29$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$\therefore 24+4n=29 \quad \therefore n=5/4=1{\cdot}25$$

$$\therefore U_{29} = 1427 + 1{\cdot}25(153) + \frac{(1{\cdot}25)(0{\cdot}25)}{2}(39) + \frac{(1{\cdot}25)(0{\cdot}25)(-0{\cdot}75)}{6}(-7)$$

$$= 1427 + 191{\cdot}25 + 6{\cdot}09375 + 1{\cdot}640625$$

$$= 1625{\cdot}984375$$

மாதிரி 71

கீழே பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து 1896ஆம் ஆண்டின் மக்கட் தொகையை மதிப்பிடுக.

ஆண்டு :	1881	1891	1901	1911
மக்கட் தொகை :	25974	29003	32528	36070

முதலில் வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைத்து முன்னணி வேறுபாடுகளைக் காணவும்.

ஆண்டு x	மக்கள் தொகை U_x	$\triangle U_x$	$\triangle^2 U_x$	$\triangle^3 U_x$
1881	25974			
		3029		
1891	29003		496	
		3525		−479
1901	32528		17	
		3542		
1911	36070			

இங்கு $a=1881,\ h=10,\ a+nh=1896$

$$1881+10n=1896$$

$$\therefore\ n=1.5$$

$U_a=25974,\ \triangle U_a=3029,\ \triangle^2 U_a=496,\ \triangle^3 U_a=-479$

$$U_{a+nh}=U_a+n\,\triangle U_a+\frac{n(n-1)}{2!}\triangle^2 U_a+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\triangle^3 U_a$$

$$\therefore\ U_{1896}=25974+(1.5)(3029)+\frac{(1.5)(0.5)}{2}(496)+\frac{(1.5)(0.5)(-0.5)(-479)}{6}$$

$$=25974+4543.5+186+29.94$$

$$=30733.44$$

மாதிரி 72

கீழ்க்கண்ட பட்டியல் விவரங்களிலிருந்து இரண்டாம் நிலை வேறுபாடுகளை மாறிலியாகக் கொண்டு Γx மீச்சிறு (minimum) மதிப்பாகயிருக்கும்போது x-இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	1.45	1.46	1.47
$(10+\log \Gamma x)$:	9.9472677	9.9472397	9.9472539

$x=(x-1.45)^{100}$,

$U_x=(10+\log \Gamma x)\ 10^6-99472000$ எனக்கொண்டு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களைச் சுருக்கி எழுதி, கீழ்க்கண்டவாறு வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்கவும். இரண்டாம் நிலை வேறு

பாடுகள் மாறிலியென்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால் மூன்ரும் நிலை வேறுபர்டுகள் பூச்சியமாகும்.

x	U_x	$\triangle U_x$	$\triangle^2 U_x$
0	677		
		−280	
1	397		422
		142	
2	539		

$$U_x = U_0 + x \triangle U_0 + \frac{x(x-1)}{2!} \triangle^2 U_0$$
$$= 677 + x(-280) + \frac{x(x-1)}{2}(422)$$
$$= 677 - 280x + 211x^2 - 211x$$
$$= 211x^2 - 491x + 677$$

ஆனுல் வகை நுண் கணிதத்திலிருந்து (Differential Calculus), U_x என்பது மீச்சிறு மதிப்பைக் கொள்ள வேண்டுமானுல் $\frac{\partial U_x}{\partial x} = 0$ ஆகவும், $\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}$ ஒரு நேரெண்ணுகவுமிருக்க வேண்டுமென நாம் அறிவோம். (9-1ஐப் பார்க்கவும்)

இங்கு, $\frac{\partial U_x}{\partial x} = 422x - 491 = 0$ என்ருல்,

$$x = \frac{491}{422} = 1{\cdot}163$$

மேலும் $\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} = 422 = +$

ஆகவே $x = 1{\cdot}163$ ஆகயிருக்கும்போது U_x இன் மதிப்பு மீச்சிறிதாக யிருக்கும்.

ஆனுல் $x = (x - 1{\cdot}45)\ 100$

$$\therefore\ x = \frac{x}{100} + 1{\cdot}45$$
$$= \frac{1{\cdot}163}{100} + 1{\cdot}45$$
$$= 0{\cdot}01163 + 1{\cdot}45$$
$$= 1{\cdot}46163$$

U_x இன் மீச்சிறு மதிப்பு $= 211\ x^2 - 491\ x + 677$

$$= 211\ (1{\cdot}163)^2 - 491\ (1{\cdot}163) + 677$$
$$= 285{\cdot}392 - 571{\cdot}033 + 677$$
$$= 391{\cdot}359.$$

$\therefore\ (10 + \log \Gamma x)$ இன் மீச்சிறு மதிப்பு $= 9{\cdot}9472391359$

பயிற்சி 14

1. $U_0 = 1, U_1 = 0, U_2 = 3, U_3 = 16$ என்றால் U_{10} இன் மதிப்பென்ன ?

2. $U_{-1} = 10,\ U_1 = 8,\ U_2 = 10,\ U_4 = 50$ என்றால் $U_0,\ U_3$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

3. $U_0 = 1718, U_5 = 1743, U_{10} = 1780, U_{15} = 1837$ என்றால் U_7 ஐக் கணக்கிடுக.

4. கீழ்க்கண்ட பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து நியூட்டன்–கிரிகோரி வாய்ப் பாட்டைப் பயன்படுத்தி y-இன் மதிப்பை x-இல் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் காண்க.

x :	−3	−2	−1	0	1
y :	16	7	4	1	−8

5. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களிலிருந்து $U_{2\cdot3}$ இன் மதிப்பைப் பெறுக.

x :	1	2	3	4	5
U_x :	10	50	70	80	100

(சென்னை பி.காம். '67 ஏப்.)

6. ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் வெவ்வேறு நேரங்களில் எடுக்கப்பட்ட வெப்ப நிலை அளவுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றிலிருந்து காலை 3 மணிக்கும் காலை 5 மணிக்குமுள்ள வெப்ப நிலை அளவுகளைக் காண்க.

நேரம் (மணி) :	காலை 2	6	10	மாலை 2
வெப்பநிலை (°C) :	40·2	42·4	51·0	72·4

(சென்னை பி.காம். '67 செப், மதுரை பி.காம். '69 செப்.)

7. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலில் x என்பது ஈயமும் துத்தநாகமும் கலந்த ஒரு உலோகத்தில் ஈயத்தின் சதவீதத்தையும், θ என்பது அவ் வுலோகத்தின் உருகும் நிலையை (°C)யும் குறிக்கின்றன.

x :	40	50	60	70	80	90
θ :	184	204	226	250	276	304

x = 43 ஆக யிருக்கும்போது θ இன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

(சென்னை '64 செப்.)

8. ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தின் (d) மதிப்புக்களும் அவற்றிற்குரிய வட்டங் களின் பரப்பு (A)களும் கீழே பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

d :	80	85	90	95	100
A :	5026	5674	6362	7088	7854

விட்டத்தின் மதிப்பு 82 ஆகயிருக்கும்போது வட்டத்தின் பரப்பைக் காண்க.

(சென்னை '65 ஏப்.)

9. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து 28 வயதுக் குரிய வருடப் பிரிமியத்தை மதிப்பிடுக.

வயது :	25	30	35	40	45	50
வருடப் பிரிமியம் : (ரூபாய்)	23	26	30	35	42	51

10. கீழ்க்காணும் பட்டியலில் இந்தியாவின் ஒரு மாகாணத்தின் 1901, 1911, 1921, 1931 ஆகிய ஆண்டுகளின் மக்கட் தொகைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றிலிருந்து 1924 ஆம் ஆண்டின் மக்கட் தொகையை மதிப்பிடுக.

வருடம் :	1901	1911	1921	1931
மக்கட் தொகை : (ஆயிரங்களில்)	2797	2935	3047	3354

11. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களிலிருந்து நியூட்டனின் இடைச் செருகல் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி 22 வயதுக்குரிய வாழ்நாளின் எதிர்பார்ப் பைக் காண்க.

வயது :	10	15	20	25	30	35
வாழ்நாளின் எதிர்ப்பார்ப்பு : (வருடங்களில்)	35·4	32·2	29·1	26·0	23·1	20·4

12. கீழே பட்டியல் படுத்தப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களிருந்து log 57·4 இன் மதிப்பைக் காண்க.

x	log x
55	1·7404
56	1·7482
57	1·7559
58	1·7634

13. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களிலிருந்து cos 21°30′ இன் மதிப்பைக் காண்க.

x°	cos x°
20	0·9397
22	0·9272
24	0·9135
26	0·8988

14. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து Sin 52° இன் மதிப்பைக் காண்க.

x°	Sin x°
45	0·7071
50	0·7660
55	0·8192
60	0·8660

15. கீழ்க்காணும் பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து log 3·442 இன் மதிப்பைக் காண்க.

x	log x
3·43	0·5353
3·44	0·5366
3·45	0·5378
3·46	0·5391

16. கீழ்க்கண்ட விவரங்களைக் கொண்டு f(8), f(24) ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக.

x:	6	11	16	21	26	31
f(x):	25·1	31·8	40·1	46·8	53·2	63·8

17. $y=J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2.4^2}-\frac{x^6}{2^2.4^2.6^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots$ என்ற சார்பின் மதிப்புக்கள் கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

x	y
0·2	0·9900
0·3	0·9776
0·4	0·9604
0·5	0·9385
0·6	0·9120

நியூட்டனின் வாய்பாடு மூலம் J_0 (0·1) இன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டு, அம் மதிப்பைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரிலிருந்து கிடைக்கும் மதிப்புடன் ஒப்பிடுக.

(சென்னை '67 ஏப்.)

18. கீழ்க்கண்ட பட்டியலிலிருந்து x = 1·25, x = 1·75க்குரிய f(x) இன் மதிப்புக்களைக் காண்க.

x	f(x)
1	0·198369
2	0·237702
3	0·276355
4	0·314556
5	0·352274

19 கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் விவரங்களிலிருந்து x = 21க்குரிய சார்பலனைக் காண்க.

x	y
20	0·2293149
22	0·2300167
24	0·2307190
26	0·2314220
28	0·2321255
30	0·2328296

20. கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் $I(x)=\int_x^\infty e^{-s^2}\,ds$ இன் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

x	I (x)
0·00	0·88622692
0·01	0·87622724
0·02	0·86622957
0·03	0·85623590
0·04	0·84624822
0·05	0·83626853

இடைச் செருகல் முறையில் x=0 025க்குரிய I (x) இன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டுக் கிடைக்கும் மதிப்பை

$$I(0)-I(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\ldots\ldots \text{ என்ற}$$

தொடரிலிருந்து கிடைக்கும் மதிப்புடன் ஒப்பிடுக.

4·4· நியூட்டன் – கிரிகோரியின் பின்முக இடைச் செருகல் வாய்பாடு (Newton-Gregory formula for backward interpolation)

நியூட்டன்-கிரிகோரியின் முன்வேக வாய்பாட்டில் வேறுபாடுப் பட்டியலிலுள்ள முன்னணி உறுப்பும், முன்னணி வேறுபாடுகளும் மட்டுமே பயன்படுத்தப்படுகின்றன. எனவே இவ் வாய்பாட்டின் மூலம் பட்டியலின் இறுதிச் சார்பலனை அடுத்துள்ள சார்பலன்களின் மதிப்புக்களை அவ்வளவு சரியாகக் கணக்கிட முடியாது. இத்தகைய மதிப்புக்களை மிகச் சரியாகக் கணக்கிடப் பயன்படுவதுதான் நியூட்டன் கிரிகோரியின் பின்முக வாய்பாடு.

a, a+h, a+2h,... ..., a+nh ஆகியவற்றை x இன் மதிப்புக்களாகக் கொண்ட f(x) என்ற சார்பைக் கருதுக. f(x) இன் மதிப்புக்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியல் படுத்தலாம்.

x	f (x)
a	f (a)
a+h	f (a+h)
a+2h	f (a+2h)
.. ..	.. ..
.. ..	.. ..
a+(n−1)h	$f(a+\overline{n-1}\,h)$
a+nh	f (a+nh)

இடைச் செருகல் மதிப்புக்களைக் காணப் பயன்படும் f (x) இன் கோவை x இல் n படி பெற்ற ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாக யிருக்கும். a க்கும் a+nhக்கும் இடையேயுள்ள x இன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் உரிய f (x) இன் மதிப்புக்களை அக் கோவையினின்றும் பெறமுடியும். அக்கோவையை

$$f(x)=A_0+A_1[x-(a+nh)]+A_2[x-(a+nh)][x-(a+\overline{n-1}\,h)]$$
$$+\dots\dots+A_n[x-(a+nh)][x-(a+\overline{n-1}h)]\dots\dots[x-a-h]$$

என்று எழுதலாம்.

இதில் $x=a+nh$ என்று பிரதியிட, $f(a+nh)=A_0$.

இப்பொழுது, $x=(a+\overline{n-1}\,h)$ என்று பிரதியிட,

$$f(a+\overline{n-1}\,h)=A_0+A_1[a+\overline{n-1}\,h-(a+nh)]$$
$$=f(a+nh)-A_1h.$$
$$\therefore\quad A_1=\frac{f(a+nh)-f(a+\overline{n-1}h)}{h}$$
$$=\frac{1}{h}\,\nabla\, f(a+nh)$$

$x=(a+\overline{n-2}h)$ என்று பிரதியிட,

$$f(a+\overline{n-2}h)=A_0+A_1[a+\overline{n-2}h-(a+nh)]$$
$$+A_2[a+\overline{n-2}h-(a+nh)]$$
$$[a+\overline{n-2}h-(a+\overline{n-1}h)]$$
$$=f(a+nh)+A_1(-2h)+A_2(-2h)(-h)$$
$$=f(a+nh)-2A_1h+A_2\cdot 2!\,h^2$$
$$\therefore\ 2!\,A_2h^2=f(a+\overline{n-2}h)-f(a+nh)+2A_1h$$
$$=f(a+\overline{n-2}h)-f(a+nh)+$$
$$2[f(a+nh)-f(a+\overline{n-1}h]$$
$$=f(a+nh)-2f(a+\overline{n-1}h)+f(a+\overline{n-2}h)$$
$$=\nabla^2 f(a+nh)$$
$$\therefore\ A_2=\frac{1}{2!\,h^2}\nabla^2 f(a+nh)$$

$x=(a+\overline{n-3}h)$ என்று பிரதியிட,

$$f(a+\overline{n-3}h)=A_0+A_1(-3h)+A_2(-3h)(-2h)+$$
$$A_3(-3h)(-2h)(-h)$$
$$=A_0-3A_1h+6A_2h^2-3!\,A_3h^3.$$

$$\therefore\ 3!\ A_3 h^3 = A_0 - 3A_1 h + 6A_2 h^2 - f(a+\overline{n-3}h)$$
$$= f(a+nh) - 3[f(a+nh) - f(a+\overline{n-1}h)]$$
$$+3[f(a+nh) - 2f(a+\overline{n-1}h) + f(a+\overline{n-2}h)]$$
$$- f(a+\overline{n-3}h)$$
$$= \nabla^3 f(a+nh)$$
$$\therefore\ A_3 = \frac{1}{3!\ h^3} \nabla^3 f(a+nh)$$

....

ஆகவே, $A_n = \dfrac{1}{n!\ h^n} \nabla^n f(a+nh)$

இம் மதிப்புக்களைப் பிரதியிட நாம் கீழ்க்கண்ட வாய்பாட்டைப் பெறுகிறோம்.

$$f(x) = f(a+nh) + \frac{1}{h} \nabla f(a+nh)\ [x-(a+nh)]$$
$$+ \frac{1}{2!\ h^2} \nabla^2 f(a+nh)[x-(a+nh)][x-(a+\overline{n-1}h]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{n!\ h^n} \nabla^n f(a+nh)[x-(a+nh)][x-(a+\overline{n-1}h]$$
$$\ldots\ldots\ldots[x-(a+h)]$$

இவ் வாய்பாடு நியூட்டன்-கிரிகோரியின் பின்முக இடைச் செருகல் வாய்பாடு என்றழைக்கப்படுகிறது.

இவ்வாய்பாட்டில் $\dfrac{x-(a+nh)}{h} = t$, அதாவது $x = a + (n+h)\ t$ என்று பிரதியிட்டால், வாய்பாடு கீழ்க்கண்ட அமைப்பைப் பெறுகிறது.

$$f[a+n+t)h] = f(a+nh) + \frac{1}{h} \nabla f(a+nh)\ th$$
$$+ \frac{1}{2!\ h^2} \nabla^2 f(a+nh)\ [th]\ [(t+1)h] + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{n!\ h^n} \nabla^n f(a+nh)\ [th]\ [(t+1)h]\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[(t+n-1)h]$$

அதாவது,

$$f[a+(n+t)h]=f(a+nh)+\frac{t}{1!}\nabla f(a+nh)+\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f(a+nh)$$
$$+\frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\nabla^3 f(a+nh)+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{t(t+1)(t+2)\ldots\ldots(t+n-1)}{n!}\nabla^n f(a+nh).$$

$y=f(x)$ இன் வளைவு பட்டியலின் இறுதி மதிப்புக்களுக்குப் பக்கத்தில் வழ வழப்பாக இருந்தால் இவ்வாய்பாட்டை $(a+nh)$க்கும் $[a+(n+1)h]$க்கும் இடைப்பட்ட மதிப்புக்களைக் காணப் பயன்படும் புறச் செருகல் வாய்பாடாகவும் பயன் படுத்தலாம்.

மாதிரி 73

கீழ்க்காணும் பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து U_6 இன் மதிப்பைக் காண்க.

U_0	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5
25	25	22	18	15	15

(சென்னை '69 செப்.)

U_6 என்பது பட்டியலின் இறுதி மதிப்புக்கு அடுத்த மதிப்பாகும். U_5 இன் பக்கத்தில் U_x இன் வளைவு வழவழப்பாக யிருப்பதாகக் கொண்டு, நியூட்டன்-கிரிகோரியின் பின்முக வாய்பாட்டைப் புறச் செருகல் வாய்பாடாகப் பயன்படுத்தி U_6 இன் மதிப்பைப் பெறலாம். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் மதிப்புக்களுக்குப் பின்முக வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்கவும்.

x	U_x	ΔU_x	$\nabla^2 U_x$	$\nabla^3 U_x$	$\nabla^4 U_x$
0	25				
		0			
1	25		−3		
		−3		2	
2	22		−1		0
		−4		2	
3	18		1		0
		−3		2	
4	15		3		
		0			
5	15				

இங்கு $U_5 = 15$, $\nabla U_5 = 0$, $\nabla^2 U_5 = 3$, $\nabla^3 U_5 = 2$. நியூட்டன்-கிரிகோரியின் பின்முக வாய்பாடு வருமாறு :

$$f[a+(n+t)h] = f(a+nh) + \frac{t}{1!}\nabla f(a+nh) + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f(a+nh) + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\nabla^3 f(a+nh)$$

இங்கு $a+nh=5$, $h=1$,

காணவேண்டிய மதிப்பு U_6 ஆகையால்

$$a+(n+t)h = 5$$
$$a+nh+th = 6$$
$$5+t = 6$$
$$t = 1$$

$$\therefore\ U_6 = U_5 + \frac{1}{1!}\nabla U_5 + \frac{1\cdot 2}{2!}\nabla^2 U_5 + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3!}\nabla^3 U_5$$
$$= 15+0+3+2$$
$$= 20.$$

மாதிரி 74

கீழ்க்காணும் பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து 63 வயதுக்குரிய பிரிமியத்தை மதிப்பிடுக.

வயது ...	45	50	55	60	65
பிரிமியம் ...	114·84	96·16	83·32	74·48	68·48

காணவேண்டிய மதிப்பு பட்டியலின் இறுதி மதிப்பாகிய 65க்குப் பக்கத்திலிருப்பதால் நியூட்டன்-கிரிகோரியின் பின்முக வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்த வேண்டும். வேறுபாட்டுப் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வயது x	பிரிமியம் U_x	∇U_x	$\nabla^2 U_x$	$\nabla^3 U_x$	$\nabla^4 U_x$
45	111·84				
		15·68 ~~−18·68~~			
50	96·16		5·84		
		−12·84		−1·84	
55	83·32		4·00		0·68
		−8·84		−1·16	
60	74·48		2·84		
		−6·00			
65	68·48				

இங்கு $a+nh=65,\ U_6=68\cdot48,\ \nabla U_6=-6\cdot00,\ \nabla^2U_6=2\cdot84,$

$$\nabla^3U_6=-1\cdot16,\ \nabla^4U_6=0\cdot68,\ h=5$$

$$a+(n+t)h=63$$
$$a+nh+th=63$$
$$65+5t=63$$
$$\therefore\ t=-\frac{2}{5}=-0\cdot4.$$

நியூட்டன்-கிரிகோரியின் பின்முக வாய்பாட்டைக் கருதுக.

$$U_{a+(n+t)h}=U_{a+nh}+\frac{t}{1!}\nabla U_{a+nh}+\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2U_{a+nh}+\dots\dots\dots$$

$$\therefore\ U_{63}=U_{65}+\frac{t}{1!}\nabla U_{65}+\frac{t\,(t+1)}{2!}\nabla^2U_{65}+\frac{t\,(t+1)\,(t+2)}{3!}\nabla^3U_{65}$$
$$+\frac{t\,(t+1)\,(t+2)\,(t+3)}{4!}\nabla^4U_{65}$$

$$=68\cdot48+\frac{(-0\cdot4)}{1}(-6)+\frac{(-0\cdot4)\,(0\cdot6)}{2}(2\cdot84)+$$
$$\frac{(-0\cdot4)\,(0\cdot6)\,(1\cdot6)}{6}(-1\cdot16)$$
$$\overset{-}{+}\frac{(0\cdot4)\,(0\cdot6)\,(1\cdot6)\,(2\cdot6)}{24}(0\cdot68)$$

$$=68\cdot48+2\cdot4-0\cdot3408+0\cdot07424-0\cdot028288$$
$$=70\cdot585152.$$

பயிற்சி 15

1. x இன் மதிப்புக்களுக்குக்கேற்ப y இன் மதிப்புக்கள் கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றிலிருந்து $x=5$க்குச் சரியான y இன் மதிப்பைப் பெறுக.

x	...	0	1	2	3	4
y	...	79	91	105	116	127

(சென்னை '67 ஏப்.)

2. ஒரு விற்பனை நிலையத்தின் விற்பனைப் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வருடம்	...	1915	1920	1925	1930	1935
துணியின் விற்பனை (இலட்சம் கெஜங்கள்)	...	125	163	204	238	282

மேற்கண்ட விவரங்களிலிருந்து 1940-ஆம் வருட விற்பனையை மதிப்பிடுக.

3. கீழ்க்கண்ட உயிர்ப் பட்டியலிலிருந்து 47 வயதில் வாழ்வோரின் எண்ணிக்கையை மதிப்பிடுக.

வயது (வருடங்களில்) ...	20	30	40	50
வாழ்வோரின் எண்ணிக்கை ... (இலட்சங்களில்)	51	44	35	24

4. ஒரு உயிர்ப் பட்டியலில் l_x என்பது x வயதில் வாழ்ந்து கொண்டிருப் போரின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது.

$$l_{20}=512,\ l_{30}=439,\ l_{40}=346,\ l_{50}=243$$

என்றால், $x=47$க்குரிய l_x இன் மதிப்பைக் காண்க.

5. ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தின் (d) மதிப்புக்களும், அவற்றிற்குரிய வட்டத்தின் பரப்பின் (A) மதிப்புக்களும் கீழே பட்டியலில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

d :	80	85	90	95	100
A :	5026	5674	6362	7088	7854

இவற்றிலிருந்து விட்டம் 96 ஆகயிருக்கும்போது வட்டத்தின் பரப்பைக் காண்க.

6. கீழ்க்கண்ட பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து Sin 33° 13′ 30″ இன் மதிப்பைக் காண்க.

x°	Sin x°
30	0·5000
31	0·5150
32	0·5299
33	0·5446
34	0·5592

7. ஒரு பொருத்தமான இடைச் செருகல் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து $\log_{10} 98{\cdot}8$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

x	$\log_{10}$ x
95	1·9777236
96	1·9822712
97	1·9867717
98	1·9912261
99	1·9956352

8. கீழ்க்கண்ட பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து $x=25{\cdot}5$க்குரிய f (x) இன் மதிப்பைத் தகுந்த இடைச் செருகல் வாய்பாட்டின் மூலம் மதிப்பிடுக.

x	f (x)
19	91·00
20	100·25
21	110·00
22	120·25
23	131·00
24	142·25
25	154·00

9. கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து $\sqrt[3]{33 \cdot 25}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

x	$\sqrt[3]{x}$
29	3·07232
30	3·10723
31	3·14318
32	3·17480
33	3·20753
34	3·23961

10. நியூட்டனின் இடைச் செருகல் வாய்பாடு மூலம் f (2·0305) இன் மதிப்பைக் காண்க.

x	f (x)
2·00	0·0540
2·01	0·0529
2·02	0·0519
2·03	0·0508
2·04	0·0498

4.5 விடுபட்ட உறுப்பினை மதிப்பிடல் (Evaluation of missing term)

சம இடைவெளியுள்ள சார்பின் மாறிகளையும் அவற்றின் சார் பலன்களையும் கொண்ட ஒரு பட்டியலில் ஒன்று அதற்கு மேற்பட்ட சார்பலன்கள் விடுபட்டிருந்தால் அவைகளை மதிப்பிட கீழே விளக்கப் பட்டுள்ள முறையைக் கையாளலாம்.

$a, a+h, a+2h, \ldots\ldots, a+nh$ என்பவை மாறி x-இன் $(n+1)$ மதிப்புக்கள் எனக்கொள்க. $y=f(x)$ என்பது சார்பலனைக் குறித்தால் இந்த $(n+1)$ சார்பின் மாறிகளுக்குரிய சார்பலன்களின் மதிப்புக்கள் $f(a),\ f(a+h),\ f(a+2h), \ldots\ldots,\ f(a+nh)$ ஆகும்.

இப்பொழுது $\Delta = E-1$ என்று அறிவோம்.

ஆகவே, $\Delta^n f(a) = (E-1)^n f(a)$

$$= [E^n - {}^nC_1 E^{n-1} + {}^nC_2 E^{n-2} - \ldots\ldots + (-1)^n \cdot 1]\ f(a)$$

$$= E^n f(a) - {}^nC_1 E^{n-1} f(a) + {}^nC_2 E^{n-2} f(a) - \ldots\ldots + (-1)^n f(a)$$

$$= f(a+nh) - {}^nC_1 f[a+(n-1)h] + {}^nC_2 f[a+(n-2)h] - \ldots\ldots + (-1)^n f(a).$$

வகை (i) ஒரு சார்பலன் விடுபட்டிருப்பதாகக் கொள்க.

ஆகவே n சார்பலன்களின் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எனவே f (x) என்பது (n−1) படி பெற்ற ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை யாகயிருக்கும்.

$$\therefore \triangle^{n} f(a)=0. \quad \text{அதாவது,}$$

$$f(a+nh)-{}^{n}C_1 f[a+(n-1)h]+{}^{n}C_2 f[a+(n-2)h]-\ldots\ldots+$$

$(-1)^{n} f(a)=0$. இச்சமன்பாட்டில் ஒரு உறுப்பின் மதிப்பைத் தவிர மற்ற எல்லா உறுப்புக்களின் மதிப்புக்களும் தெரியுமாதலால், தெரிந்த மதிப்புக்களை இச்சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு விடுபட்ட மதிப்பினைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

வகை (ii) இரண்டு சார்பலன்களின் மதிப்புக்கள் விடுபட்டுள்ள தாகக் கொள்க.

ஆகவே, (n−1) சார்பலன்களின் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப் பட்டிருக்கும். எனவே f (x)ஐ (n−2) படி பெற்ற ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் கொள்ள வேண்டும்.

$$\therefore \triangle^{n-1} f(a)=0$$

$$\therefore f[a+(n-1)h]-{}^{n-1}C_1 f[a+(n-2)h]+{}^{n-1}C_2 f[a+(n-3)h]-\ldots\ldots\ldots+(-1)^{n-1} f(a)=0 \quad \ldots \quad (1)$$

மேலும் $\triangle^{n-1} f(a)=0$ ஆகையால் $\triangle^{n} f(a)=0$ ஆகும்.

$$\therefore f(a+nh)-{}^{n}C_1 f[a+(n-1)h]+{}^{n}C_2 f[a+(n-2)h]-\ldots\ldots\ldots+(-1)^{n} f(a)=0 \quad \ldots \quad (2)$$

மேலே கிடைக்கப்பெற்ற (1), (2) ஆகிய ஒருங்கமைச் சமன் பாடுகளைத் தீர்த்து விடுபட்டுள்ள இரண்டு சார்பலன்களின் மதிப்புக் களையும் பெறலாம். மேற்கண்ட வாய்பாடு $(y-1)^{n}$ என்ற ஈருறுப்புத் தேற்ற விரிவை யொத்திருப்பதால், இந்த இடைச் செருகல் முறை ஈருறுப்புத்தேற்ற விரிவு முறை (Binomial expansion method) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

மாதிரி 75

கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் விடுபட்டுள்ள உறுப்பினை மதிப்பிடுக.

x	f (x)
1	216000
2	226981
3	—
4	250047
5	262144

(சென்னை பி.காம். '63 செப்.)

f (x) இன் நான்கு மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஆகவே, f (x) ஒரு மூன்றும் படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையெனக் கொள்க.

$$\therefore \triangle^4 f(x)=0.$$

x = 1 எனக் கொண்டால், $\triangle^4 f(1)=0$ ஆகும்.

அதாவது, $(E-1)^4 f(1)=0$.

$$E^4 f(1)-{}^4C_1 E^3 f(1)+{}^4C_2 E^2 f(1)-{}^4C_3 E f(1)+f(1)=0$$

$$f(5)-4f(4)+6f(3)-4f(2)+f(1)=0$$

$$(262144)-4(250047)+6f(3)-4(226981)+216000=0$$

$$478144-1908113+6f(3)=0$$

$$\therefore 6f(3)=1429969$$

$$f(3)=238328{\cdot}1$$

மாதிரி 76

கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் விடுபட்டுள்ள மதிப்புக்களைக் காண்க.

x :	0	1	2	3	4	5	6
U_x :	0	3	10	34	—	209	—

U_x–இன் 5 மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஆகவே, U_x ஒரு நான்காம் படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையெனக் கொள்க.

$$\therefore \triangle^5 U_0=0$$

அதாவது $(E-1)^5 U_0=0$

$$E^5 U_0-{}^5C_1 E^4 U_0+{}^5C_2 E^3 U_0-{}^5C_3 E^2 U_0+{}^5C_4 E U_0-U_0=0$$

$$U_5-5U_4+10U_3-10U_2+5U_1-U_0=0$$

பட்டியலிலிருந்து மதிப்புக்களைப் பிரதியிடவும்.

$$209-5U_4+10(34)-10(10)+5(3)-0=0$$

$$209-5U_4+340-100+15=0$$

$$-5U_4+464=0$$

$$\therefore U_4=\frac{464}{5}=92{\cdot}8$$

மேலும் $\triangle^6 U_0=0$ எனக்கொண்டால்,

$$\ldots \quad (E-1)^6 U_0=0$$

அதாவது, $E^6 U_0 - {}^6C_1 E^5 U_0 + {}^6C_2 E^4 U_0 - {}^6C_3 E^3 U_0 + {}^6C_4 E^2 U_0$
$- {}^6C_5 E U_0 + U_0 = 0$

$$U_6 - 6 U_5 + 15 U_4 - 20 U_3 + 15 U_2 - 6 U_1 + U_0 = 0$$

பட்டியலிலிருந்து மதிப்புக்களைப் பிரதியிடவும்.

$$U_6 - 6(209) + 15(92\cdot8) - 20(34) + 15(10) - 6(3) + 0 = 0$$
$$U_6 - 1254 + 1392 - 680 + 150 - 18 = 0$$
$$U_6 - 1952 + 1542 = 0$$
$$\therefore U_6 = 410.$$

மாதிரி 77

கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து log 212-இன் மதிப்பைக் காண்க.

x	log x
210	2·3222193
211	2·3242825
212	—
213	2·3283796
214	2·3304138

210-ஐ x-இன் ஆதியாகக் கொண்டு, $X = x - 210$ என்றும் $U_x = \log (X + 210)$ என்றும் எழுதுக. ஆகவே, மாற்றப்பட்ட பட்டியல் வருமாறு.

X	U_x
0	2·3222193
1	2·3242825
2	—
3	2·3283796
4	2·3304138

U_x-இன் 4 மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால்,

$$\Delta^4 U_0 = 0$$

அதாவது, $(E - 1)^4 U_0 = 0$

அதாவது, $E^4 U_0 - {}^4C_1 E^3 U_0 + {}^4C_2 E^2 U_0 - {}^4C_3 E U_0 + U_0 = 0$

$$U_4 - 4 U_3 + 6 U_2 - 4 U_1 + U_0 = 0.$$
$$(2\cdot3304138) - 4 (2\cdot3283796) + 6 U_2 - 4 (2\cdot3242825) + 2\cdot3222193 = 0$$
$$2\cdot3304138 - 9\cdot3135184 + 6 U_2 - 9\cdot2971300 + 2\cdot3222193 = 0$$
$$4\cdot6526331 - 18\cdot6106484 + 6 U_2 = 0$$
$$6 U_2 = 13\cdot9580153$$
$$U_2 = 2\cdot3263359.$$

பயிற்சி 16

1 கீழ்க்காணும் பட்டியலில் விடுபட்ட மதிப்பைக் காண்க.

x :	0	1	2	3	4
f (x) :	150	192	241	—	374

2. கீழ்க்காணும் பட்டியலில் $x=4$க்குரிய y–இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	2	3	4	5	6
y :	144	172·8	—	248·8	298·5

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து $x=25$க்குரிய y–ன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	5	10	15	20	25	30
y :	6	10	12	17	—	28

(சென்னை II பி.இ.' 65 செப்.)

4. $U_0=580$, $U_1=556$, $U_2=520$, $U_4=335$ ஆயின் U_3யின் மதிப்பைக் காண்க.

5. கீழ்க்காணும் பட்டியலில் விடுபட்ட மதிப்பைக் காண்க.

x :	1	6	11	16	21
f (x) :	3·84	12·59	—	26·30	32·67

6. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு 1931ஆம் வருட தின் மக்கட் தொகையை மதிப்பிடுக.

வருடம் ..	1911	1921	1941	1951
மக்கட் தொகை (ஆயிரங்களில்) ..	134	139	239	362

7. ஒரு பொருத்தமான இடைச்செருகல் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத் கீழ்க்காணும் பட்டியலில் விடுபட்ட மதிப்பைக் காண்க.

வருடம் ..	1950	1955	1960	1965	1970
துணிகளின் விற்பனை (இலட்சம் கெஜங்கள்) ..	250	285	328	—	444

(சென்னை '66 செப்

8. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களிலிருந்து 1911ஆம் ஆண்டி மக்கட் தொகையை மதிப்பிடுக.

வருடம் ...	1881	1891	1901	1921	1931
மக்கட் தொகை (இலட்சங்களில்) ...	363	391	421	467	501

9. ஒரு பொருத்தமான இடைச்செருகல் வாய்பாட்டின் மூலம் கீழ்க்கண் பட்டியலில் விடுபட்டுள்ள மதிப்பைக் காண்க.

x :	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917
y :	1331	1728	2197	—	3375	4096	4913

10. கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் விடுபட்டுள்ள y–இன் மதிப்புக்களைக் காண்க

x :	50	51	52	53	54	55	
y :	3·864	—	—	3·756	3·780	3·803	3·8

11. கீழே பட்டியலில் விடுபட்ட மதிப்புக்களைக் காண்க.

வருடம் ...	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919
நிலப் பரப்பு (மில்லியன் ஏக்கர்)...	78·6	78·7	—	77·7	78·7	—	80·6	77·6	78·7

12. கீழே விடுபட்டிருக்கும் மதிப்புக்களைக் காண்க.

x :	2·0	2·1	2·2	2·3	2·4	2·5	2·6
y :	0·135	—	0·111	0·100	—	0·082	0·074

13. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் விவரங்களைக் கொண்டு 30—34 வயதுடைய ஒரு தாய்க்குப் பிறக்கும் குழந்தைகளின் சராசரி எண்ணிக்கையை மதிப்பிடுக.

தாயின் வயது (வருடத்தில்) ..	15—19	20—24	25—29	30—34	35—39	40—44
குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை ..	0·7	2·1	3·5	—	5·7	5·8

14. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து 1937—'38ஆம் ஆண்டில் இந்தியாவின் ஏற்றுமதிப் பொருட்களின் மதிப்பைக் காண்க.

வருடம்	ஏற்றுமதி (ரூபாய்)
1933—'34	89 56 32 418
1934—'35	52 53 74 607
1935—'36	37 35 58 955
1936—'37	27 84 61 129
1938—'39	23 26 02 668

15. $U_0+U_8=1\cdot9243$, $U_1+U_7=1\cdot9590$, $U_2+U_6=1\cdot9823$, $U_3+U_5=1\cdot9956$ என்றால் U_4-இன் மதிப்பென்ன? (சென்னை '52 செப்.)

16. $U_0+U_6=2\cdot37$, $U_1+U_5=2\cdot92$, $U_2+U_4=3\cdot01$ என்றால் U_3-இன் மதிப்பைக் காண்க.

5. அசம இடைச் செருகல்

(Interpolation with unequal intervals)

நாம் இதுவரை படித்த இடைச் செருகல் முறைகளில் சம இடைவெளிகளில் அமைந்த x இன் மதிப்புக்களுக்குரிய f (x) இன் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தன ; அவற்றிலிருந்து x இன் ஏதாவது ஒரு இடை மதிப்புக்குரிய f (x) இன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டோம். ஆனால், கண்டறியப்படும் விவரங்கள் எப்பொழுதும் சம இடைவெளிச் சார்பின் மாறிகளுக்குரியானவாக யிருப்பதில்லை. எனவே, அசம இடைவெளிகளில் அமைந்த x இன் மதிப்புக்களுக்குரிய f (x) இன் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் f (x) இன் ஏதாவது ஒரு இடை மதிப்பைக் காணவேண்டிய தேவை ஏற்படலாம். இவ்வாறு அசம இடைவெளிகளில் அமைந்த விவரங்களிலிருந்து f (x) இன் இடை மதிப்புக்களைக் காணப் பயன்படும் அசம இடைச் செருகல் முறைகளை இங்கு ஆராய்வோம்.

5.1. வகுபட்ட வேறுபாடுகள் (Divided differences)

$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ என்ற x இன் அசம இடைவெளி மதிப்புக்களைச் சார்பின் மாறிகளாகக் கொண்ட f (x) என்ற சார்பினைக் கருதுக. இங்கு $(a_1 - a_0), (a_2 - a_1), (a_3 - a_2), \ldots\ldots, (a_n - a_{n-1})$ என்ற இடைவெளிகள் சமனற்றவையாகும். மேற்கூறப்பட்ட சார்பின் மாறிகளுக்குரிய சார்பலன்கள் $f(a_0)$, $f(a_1)$, $f(a_2), \ldots\ldots, f(a_n)$ ஆகும். இத்தகைய விவரங்களைப் பட்டியல் படுத்திக் கீழ்க்கண்டவாறு வேறுபாடுகள் காணலாம். அதாவது, இரண்டு அடுத்தடுத்த சார்பலன்களின் வேறுபாட்டை, அச் சார்பலன்களுக்குரிய சார்பின் மாறிகளின் இடைவெளியால் வகுத்து பட்டியல் வேறுபாடு காணலாம். இவ்வாறு வகுக்கப்பட்ட வேறுபாடு "முதல் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடு" (divided difference of first order) என்று அழைக்கப்படுகிறது. மேலே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின்

வகுபட்ட முதல்நிலை வேறுபாடுகள்

$$\frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0},\ \frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1},\ \ldots\ldots,\frac{f(a_n)-f(a_{n-1})}{a_n-a_{n-1}}$$ ஆகும்.

இவ்வகுபட்ட வேறுபாடுகள் முறையே $f(a_1, a_0)$, $f(a_2, a_1)$,........., $f(a_n, a_{n-1})$ என்று குறிக்கப்படுகின்றன. ஆகவே,

$$f(a_1, a_0)=\frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0},$$

$$f(a_2, a_1)=\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1},$$

$$f(a_3, a_1)=\frac{f(a_3)-f(a_2)}{a_3-a_2},$$

.....................,

.....................,

$$f(a_n, a_{n-1})=\frac{f(a_n)-f(a_{n-1})}{a_n-a_{n-1}}.$$

இவ்வகுபட்ட வேறுபாடுகளைக் குறிக்க $\underset{|}{\Delta}$ என்ற செயலியைப் பயன் படுத்துகிறோம்.

இரண்டு அடுத்தடுத்த முதல்நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகளின் வகுபட்ட வேறுபாடு இரண்டாம்நிலை வகுபட்ட வேறுபாடு என்று அழைக்கப்படுகிறது. உதாரணமாக, $f(a_1, a_0)$, $f(a_2, a_1)$ ஆகிய வகுபட்ட வேறுபாடுகளின் வகுபட்ட வேறுபாடு காண $f(a_2, a_1)-f(a_1, a_0)$ஐ (a_2-a_0) ஆல் வகுக்கவேண்டும். இவ்வாறு கண்டு பிடிக்கப்பட்ட வகுபட்ட வேறுபாடு இரண்டாம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடு (divided difference of second order) என்று அழைக்கப் படுகிறது. இந்த இரண்டாம்நிலை வகுபட்ட வேறுபாடு $f(a_2, a_1, a_0)$ என்று குறிக்கப்படுகிறது. ஆகவே,

$$f(a_2, a_1, a_0)=\frac{f(a_2, a_1)-f(a_1, a_0)}{a_2-a_0}$$

இதுபோன்று, $f(a_3, a_2, a_1)=\dfrac{f(a_3, a_2)-f(a_2, a_1)}{a_3-a_1}$,

$$f(a_4, a_3, a_2)=\frac{f(a_4, a_3)-f(a_3, a_2)}{a_4-a_2},$$

இதுபோலவே, மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதப்படுகின்றன.

$$f(a_3, a_2, a_1, a_0) = \frac{f(a_3, a_2, a_1) - f(a_2, a_1, a_0)}{a_3 - a_0},$$

$$f(a_4, a_3, a_2, a_1) = \frac{f(a_4, a_3, a_2) - f(a_3, a_2, a_1)}{a_4 - a_1},$$

வகுபட்ட வேறுபாடுகளின் முதல், இரண்டாம், மூன்றும்,......... முதலிய நிலைகள் முறையே $\triangle$, $\triangle^2$, $\triangle^3$,.........என்ற செயலிகளால் குறிக்கப்படுகின்றன.

எல்லா நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகளையும் கீழ்க்கண்டவாறு ஒரே சீராக எழுதலாம்.

$$f(a_1, a_0) = \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}$$

$$= \frac{f(a_1)}{a_1 - a_0} - \frac{f(a_0)}{a_1 - a_0}$$

$$= \frac{f(a_0)}{a_0 - a_1} + \frac{f(a_1)}{a_1 - a_0}.$$

இதுபோல், $f(a_0, a_1) = \frac{f(a_1)}{a_1 - a_0} + \frac{f(a_0)}{a_0 - a_1}$

ஆகவே, $f(a_1, a_0) = f(a_0, a_1)$ ஆகும்.

$$f(a_2, a_1, a_0) = \frac{f(a_2, a_1) - f(a_1, a_0)}{a_2 - a_0}$$

$$= \frac{f(a_2, a_1)}{a_2 - a_0} - \frac{f(a_1, a_0)}{a_2 - a_0}$$

$$= \frac{f(a_1, a_0)}{a_0 - a_2} + \frac{f(a_2, a_1)}{a_2 - a_0}$$

$$= \frac{1}{a_0 - a_2}\left[\frac{f(a_0)}{a_0 - a_1} + \frac{f(a_1)}{a_1 - a_0}\right] + \frac{1}{a_2 - a_0}\left[\frac{f(a_1)}{a_1 - a_2} + \frac{f(a_2)}{a_2 - a_1}\right]$$

$$= \frac{f(a_0)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)} - \frac{f(a_1)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)} + \frac{f(a_1)}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_0)} + \frac{f(a_2)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_0)}$$

$$= \frac{f(a_0)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)} + f(a_1)\left[\frac{-1}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)} + \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_0)}\right] + \frac{f(a_2)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_0)}$$

$$= \frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} + f(a_1)\left[\frac{-a_1+a_2+a_1-a_0}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_2-a_0)}\right] + \frac{f(a_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_0)}$$

$$= \frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} + \frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} + \frac{f(a_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_0)}$$

இதுபோல்,

$$f(a_0, a_1, a_2) = \frac{f(a_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_0)} + \frac{f(a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_0)} + \frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}$$

$$= f(a_2, a_1, a_0)$$

இவ்வாறு, $f(a_3, a_2, a_1, a_0) = \frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)}$

$$+ \frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)} + \frac{f(a_2)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)}$$

$$+ \frac{f(a_3)}{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)} = f(a_0, a_1, a_2, a_3)$$

என்று காணலாம்.

பொதுவாக, $f(a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots, a_1, a_0) = f(a_0, a_1, \ldots\ldots, a_{n-1}, a_n)$ ஆகும். வகுபட்ட வேறுபாடுகளின் மாதிரிப் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
a_0	$f(a_0)$			
		$f(a_0, a_1)$		
a_1	$f(a_1)$		$f(a_0, a_1, a_2)$	
		$f(a_1, a_2)$		$f(a_0, a_1, a_2, a_3)$
a_2	$f(a_2)$		$f(a_1, a_2, a_3)$	
		$f(a_2, a_3)$		$f(a_1, a_2, a_3, a_4)$
a_3	$f(a_3)$		$f(a_2, a_3, a_4)$	
		$f(a_3, a_4)$		
a_4	$f(a_4)$			

மாதிரி 78

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் விவரங்களைக் கொண்டு வகுபட்ட வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்கவும்.

x :	3	5	11	27
f(x) :	−13	23	899	17315

வகுபட்ட வேறுபாட்டுப் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x	f (x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
3	−13			
		$\frac{23+13}{5-3}=18$		
5	23		$\frac{146-18}{11-3}=16$	
		$\frac{899-23}{11-5}=146$		$\frac{40-16}{27-3}=1$
11	899		$\frac{1026-146}{27-5}=40$	
		$\frac{17315-899}{27-11}=1026$		
27	17315			

தேற்றம் 1.

$f(x)=x^n$ இன் n-ஆம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகள் மாறிலியாகும்.

நிரூபணம்: $f(x)=x^n$.

$$\therefore\ f(a_0, a_1)=\frac{a_0^n-a_1^n}{a_0-a_1}=a_0^{n-1}+a_1 a_0^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+a_1^{n-1}$$

ஆகவே, $f(a_0, a_1)$ என்பது a_0, a_1 இல் $(n-1)$ படி பெற்ற ஒரு படித்தான (homogeneous) சார்பாகும்.

$$f(a_0, a_1, a_2)=\frac{f(a_0, a_1)-f(a_1, a_2)}{a_0-a_2}$$

$$=\frac{\left[a_0^{n-1}+a_1 a_0^{n-2}+\ldots\ldots+a_1^{n-1}\right]-\left[a_2^{n-1}+a_1 a_2^{n-2}+\ldots\ldots+a_1^{n-1}\right]}{a_0-a_2}$$

$$=\frac{a_0^{n-1}-a_2^{n-1}}{a_0-a_2}+a_1\frac{(a_0^{n-2}-a_2^{n-2})}{a_0-a_2}+\dots\dots\dots+a_1^{n-2}\frac{(a_0-a_2)}{a_0-a_2}$$

$$=(a_0^{n-2}+a_2a_0^{n-3}+\dots\dots+a_2^{n-2})+a_1(a_0^{n-3}+a_2a_0^{n-4}+\dots\dots+a_2^{n-3})$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots+a_1^{n-2}$$

ஆகவே, $f(a_0, a_1, a_2)$ என்பது a_0, a_1, a_2 இல் $(n-2)$ படி பெற்ற ஒரு படித்தான சார்பாகும்.

பொதுவாக, $f(a_0, a_1, a_2, \dots\dots, a_r)$ என்பது $a_0, a_1, a_2, \dots\dots, a_r$ இல் $(n-r)$ படி பெற்ற ஒரு படித்தான சார்பாகும்.

ஆகவே, $f(a_0, a_1, a_2, \dots\dots, a_n)$ என்பது $a_0, a_1, a_2, \dots\dots, a_n$ இல் $(n-n)=0$ படி பெற்ற ஒரு படித்தான சார்பாகும். அதாவது ஒரு மாறிலியாகும். எனவே, $f(x)=x^n$ இன் $(n+1)$ஆம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகள் பூச்சியமாகும் என்பது தெளிவாகிறது.

தேற்றம் 2.

n படி பெற்ற ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் n-ஆம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகள் மாறிலியாகும்.

நிரூபணம்: தேற்றம் (1) இல் x^n இன் n-ஆம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகள் மாறிலி என்று நிரூபித்தோம்.

இப்பொழுது $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ எனக் கொள்க.

$a_0, a_1, a_2, \dots\dots$என்பன x-இன் மதிப்புக்களானுல்,

$$f(a_0, a_1)=\frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0}$$
$$=\frac{[f_1(a_1)+f_2(a_1)]-[f_1(a_0)+f_2(a_0)]}{a_1-a_0}$$
$$=\frac{f_1(a_1)-f_1(a_0)}{a_1-a_0}+\frac{f_2(a_1)-f_2(a_0)}{a_1-a_0}$$
$$=f_1(a_0, a_1)+f_2(a_0, a_1)$$

அதாவது, ஒரு சார்பு இரண்டு வெவ்வேறு சார்புகளின் மொத்தத்திற்குச் சமமானுல், அச்சார்பின் முதல் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடு அவ்விரு சார்புகளின் முதல் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகளின் மொத்தத்திற்குச் சமமாகும்.

மேலும், c என்பது ஒரு மாறிலியாகவும் f(x) என்பது $f(x)=c\,f_1(x)$ என்ற அமைப்பிலுமிருந்தால்

$$f(a_0, a_1)=\frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0}$$

$$=\frac{c\,f_1(a_1)-c\,f_1(a_0)}{a_1-a_0}$$

$$=c\cdot\frac{f_1(a_1)-f_1(a_0)}{a_1-a_0}$$

$$=c\,f_1(a_0, a_1)$$

அதாவது, f (x) இன் வகுபட்ட வேறுபாடு, $f_1(x)$ இன் வகுபட்ட வேறுபாட்டை c-ஆல் பெருக்கிய பெருக்கற் பலனுக்குச் சமமாகும்.

இப்பொழுது, n படி பெற்ற ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையென்பது n, (n−1), (n−2), ..., 3, 2, 1, 0 ஆகிய படிகளைப் பெற்ற பல உறுப்புக்களின் மொத்தமாகும். ஆகவே, (n−1), (n−2), ..., 2, 1, 0 படிகள் பெற்ற எல்லா உறுப்புகளின் n-ஆம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகள் யாவும் பூச்சியமாகும். n படி பெற்ற உறுப்பின் n-ஆம் நிலை வேறுபாடு மாறிலியாகும். ஆகவே, n படி பெற்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் n-ஆம் நிலை வேறுபாடுகள் மாறிலியாகும். மேலும், அப்பல்லுறுப்புக் கோவையின் (n+1)-ஆம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகள் பூச்சியமாகும் என்பது தெளிவாகிறது.

5.2 நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டு வாய்பாடு (Newton's divided difference formula)

y = f (x) என்ற சார்பினைக் கருதுக. $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ என்ற x-இன் மதிப்புக்களுக்குரிய f (x) இன் மதிப்புக்கள் $f(a_0)$, $f(a_1)$, $f(a_2)$, ..., $f(a_n)$ ஆகும். $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ எல்லாம் சம இடைவெளியில் இல்லையெனக் கொள்க; அதாவது, (a_1-a_0), (a_2-a_1), ..., (a_n-a_{n-1}) ஆகியவையெல்லாம் அசம இடைவெளிகளாகும்.

இப்பொழுது, $f(x, a_0)=\dfrac{f(x)-f(a_0)}{x-a_0}$

$$\therefore\ f(x)=f(a_0)+(x-a_0)\,f(x, a_0) \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இதுபோல், $f(x, a_0, a_1)=\dfrac{f(x, a_0)-f(a_0, a_1)}{x-a_1}$

$$\therefore\ f(x, a_0)=f(a_0, a_1)+(x-a_1)\,f(x, a_0, a_1)$$

$$\therefore\ f(x)=f(a_0)+(x-a_0)\,[f(a_0, a_1)+(x-a_1)\,f(x, a_0, a_1)]$$

$$=f(a_0)+(x-a_0)\,f(a_0, a_1)+(x-a_0)(x-a_1)\,f(x, a_0, a_1) \quad \ldots \quad (2)$$

இதுபோன்று,

$$f(x)=f(a_0)+(x-a_0)\,f(a_0, a_1)+(x-a_0)(x-a_1)\,f(a_0, a_1, a_2)$$
$$+(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\,f(x, a_0, a_1, a_2)$$

....

$$f(x)=f(a_0)+(x-a_0)\,f(a_0, a_1)+(x-a_0)(x-a_1)\,f(a_0, a_1, a_2)$$
$$+(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\,f(a_0, a_1, a_2, a_3)$$
$$+(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\,f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(x-a_0)(x-a_1)\ldots\ldots(x-a_n)\,f(x, a_0, a_1,\ldots\ldots, a_n)$$

இவ்வாய்பாட்டில் கடைசி உறுப்பாகிய

$$(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)\,f(x, a_0, a_1,\ldots\ldots, a_n)$$

என்பது R_{n+1} என்று குறிக்கப்படுகிறது. இது $f(x)$ இன் மீதி உறுப்பு (remainder term) எனப்படுகிறது. $f(x)$ என்பது ஒரு n படி பெற்ற பல்லுறுப்புக் கோவையாயின் $f(x, a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n)$ என்ற $(n+1)$ ஆம் நிலை வேறுபாடு பூச்சியமாகும். ஆகவே,

$$R_{n+1}=0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore\ f(x)=f(a_0)+(x-a_0)\,f(a_0, a_1)+(x-a_0)(x-a_1)\,f(a_0, a_1, a_2)$$
$$+\ldots\ldots+(x-a_0)(x-a_1)\ldots\ldots(x-a_{n-1})\,f(a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n)$$

இதுதான் அசம இடைச் செருகலுக்கு நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டு வாய்பாடாகும். இவ்வாய்பாட்டில்,

$$f(a_0, a_1)=\Delta\,f(a_0),$$
$$f(a_0, a_1, a_2)=\Delta^2\,f(a_0),$$
$$f(a_0, a_1, a_2, a_3)=\Delta^3\,f(a_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f(a_0, a_1, \ldots\ldots, a_{n-1})=\Delta^{n-1}\,f(a_0),$$
$$f(a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n)=\Delta^n\,f(a_0)$$

என்று எழுதினால், நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டு வாய்பாடு கீழ்க்கண்ட அமைப்பைப் பெறுகிறது.

$$f(x)=f(a_0)+(x-a_0)\,\Delta\,f(a_0)+(x-a_0)(x-a_1)\,\Delta^2\,f(a_0)+$$
$$(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\,\Delta^3\,f(a_0)+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(x-a_0)(x-a_1)\ldots\ldots\ldots\ldots(x-a_{n-1})\,\Delta^n\,f(a).$$

குறிப்பு :

நியூட்டன் - கிரிகோரியின் முன்வேக இடைச் செருகல் வாய்பாட்டை நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டு வாய்பாட்டிலிருந்து கீழ்க்கண்டவாறு வருவிக்கலாம்.

$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ என்பன h சம இடைவெளியில் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

$$\therefore (a_1-a_0)=(a_2-a_1)=(a_3-a_2)=\ldots\ldots\ldots=(a_n-a_{n-1})=h.$$

$$\therefore (a_2-a_0)=2h,\ (a_3-a_0)=3h,\ \ldots\ldots\ldots,\ (a_n-a_0)=nh.$$

இப்பொழுது, $f(a_0, a_1)=\dfrac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0}=\dfrac{\triangle f(a_0)}{h}$

$$f(a_0, a_1, a_2)=\frac{f(a_0, a_1)-f(a_1, a_2)}{a_0-a_2}$$

$$=\frac{\frac{1}{h}\triangle f(a_0)-\frac{1}{h}\triangle f(a_1)}{-2h}$$

$$=\frac{-1}{2h^2}[\triangle f(a_0)-\triangle f(a_1)$$

$$=\frac{1}{2h^2}[\triangle f(a_1)-\triangle f(a_0)]$$

$$=\frac{1}{2h^2}\triangle^2 f(a_0)$$

$$=\frac{1}{2!\,h^2}\triangle^2 f(a_0)$$

இதுபோல், $f(a_0, a_1, a_2, a_3)=\dfrac{1}{3!\,h^3}\triangle^3 f(a_0),\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\therefore f(x)=f(a_0)+\frac{1}{h}(x-a_0)\triangle f(a_0)+\frac{1}{2!\,h^2}(x-a_0)(x-a_1)\triangle^2 f(a_0)$$

$$+\frac{1}{3!\,h^3}(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\triangle^3 f(a_0)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{n!\,h^n}(x-a_0)(x-a_1)\ldots.(x-a_{n-1})\triangle^n f(a_0)$$

இவ்வாறே நியூட்டன்—கிரிகோரியின் பின் முக வாய்பாட்டையும் நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டு வாய்பாட்டிலிருந்து வருவிக்கலாம்.

மாதிரி 79

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து அதன் சார்பினைக் காண்க.

U_0	U_1	U_4	U_5
8	11	68	123

(சென்னை '69 ஏப்.)

வகுபட்ட வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்கவும்.

x	U_x	ΔU_x	$\Delta^2 U_x$	$\Delta^3 U_x$
0	8			
		3		
1	11		4	
		19		1
4	68		9	
		55		
5	123			

மூன்றும் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகள் மாறிலியெனக் கொள்வோம். $\therefore \Delta^4 U_x = 0$.

$$f(x) = f(a_0) + (x-a_0)\Delta f(a_0) + (x-a_0)(x-a_1)\Delta^2 f(a_0) + (x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\Delta^3 f(a_0)$$

$$= 8 + (x-0)\,3 + (x-0)(x-1)\,4 + (x-0)(x-1)(x-4)\,1$$

$$= 8 + 3x + 4x^2 - 4x + x^3 - 5x^2 + 4x$$

$$= x^3 - x^2 + 3x + 8.$$

மாதிரி 80

கீழ்க்காணும் பட்டியலில் f (1)இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	0	2	3	6	7
f (x) :	8565	7904	8305	8507	8804

(சென்னை '68 செப்.)

x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0	8565				
		−330·50			
2	7904		243·83		
		401·00		−54·54	
3	8305		−83·42		11·80
		67·33		28·17	
6	8507		57·42		
		297·00			
7	8804				

நான்காம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகள் மாறிலியெனக் கொள்க.

$$\therefore f(x)=f(a_0)+(x-a_0) \triangle f(a_0)+(x-a_0)(x-a_1) \triangle^2 f(a_0)$$
$$+(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2) \triangle^3 f(a_0)$$
$$+(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \triangle^4 f(a_0)$$
$$=8565+(1)(-330{\cdot}50)+(1)(-1)(243{\cdot}83)$$
$$+(1)(-1)(-2)(-54{\cdot}54)$$
$$+(1)(-1)(-2)(-5)(11{\cdot}80)$$
$$=8565-330{\cdot}50-243{\cdot}83-109{\cdot}08-118{\cdot}00$$
$$=7763{\cdot}59.$$

5.3 மடங்கி வரும் சார்பின் மாறிகளைக் கொண்ட நியூட்டனின் வாய்பாடு (Newton's formula with repeated arguments)

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ என்ற x-இன் மதிப்புக்களைச் சார்பின் மாறிகளாகக் கொண்ட f (x) என்ற சார்பினைக் கருதுக. இவற்றுள், $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ என்ற k மதிப்புக்களும் a_0-க்குச் சமம் எனக் கொள்க. அதாவது, x-இன் (n+1) மதிப்புக்களுள் a_0 என்ற மதிப்பு k தடவை மடங்கி வருகிறது எனக் கொள்க. எனவே, நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டு வாய்பாடு கீழ்க்கண்டவாறு மாறுகிறது.

$$f(x) = f(a_0)+(x-a_0) f(a_0, a_1)+(x-a_0)(x-a_1) f(a_0, a_1, a_2)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(x-a_0)(x-a_1)\ldots\ldots(x-a_{k-1}) f(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$$
$$+(x-a_0)(x-a_1)\ldots\ldots(x-a_{k-1})(x-a_k)$$
$$f(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1})$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_{k-1})(x-a_k)\ldots(x-a_{n-1})$$
$$f(a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n)$$

இங்கு $a_1=a_2=\ldots=a_{k-1}=a_0$;

$$\therefore (x-a_1)=(x-a_2)=\ldots\ldots=(x-a_{k-1})=(x-a_0)$$

$$\therefore f(x)=f(a_0)+(x-a_0) f(a_0, a_0)+(x-a_0)^2 f(a_0, a_0, a_0)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(x-a_0)^k f(a_0, a_0, \ldots, a_0, a_k)$$
$$+(x-a_0)^k (x-a_k) f(a_0, a_0, \ldots, a_0, a_k, a_{k+1})$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(x-a_0)^k (x-a_k)\ldots(x-a_{n-1}) f(a_0, a_0, \ldots, a_0, a_k, \ldots, a_n)$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு k படி பெற்ற ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகயிருப்பின் $f(a_0, a_0, \ldots, a_0, a_k)$ ஒரு மாறிலியாகும், ஆகவே, அதற்கு மேற்பட்ட நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகள் பூச்சியமாகும். ஆகவே, கீழ்க்கண்ட வாய்பாடு கிடைக்கிறது.

$$f(x)=f(a_0)+(x-a_0)\,f(a_0, a_0)+(x-a_0)^2\,f(a_0, a_0, a_0)+\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots+(x-a_0)^k\,f(a_0, a_0, \ldots, a_0, a_k)$$

இவ்வாறு, a_0 என்ற சார்பின் மாறி பல தடவை மடங்கி வந்தால் f(x)-ஐ $(x-a_0)$-இன் படிகள் பெற்ற ஒரு கோவையாக மாற்றி எழுதலாம்.

மாதிரி 81

மடங்கி வரும் சார்பின் மாறிகளைக் கொண்ட நியூட்டனின் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, கீழ்க்கண்ட மதிப்புக்களிலிருந்து f(x)-ஐ (x—3)-இன் படிகள் பெற்ற கோவையாக அமைக்கவும்.

x :	5	11	27	34	42
f(x) :	23	899	17315	35606	68510

(சென்னை '64 செப்.)

f(x)-ஐ (x—3)-இன் படிகள் பெற்ற ஒரு கோவையாக அமைக்க வேண்டுமாகையால் x=3 என்பது பல தடவை மடங்கி வரும் சார்பின் மாறியாகும். ஆகவே, முதலில் வகுபட்ட வேறுபாட்டுப் பட்டியலை அமைக்கவும்.

x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
5	23			
		146		
11	899		40	
		1026		1
27	17315		69	
		2613		1
34	35606		100	
		4113		
42	68510			

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து மூன்றும் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகள் மாறிலியென்று அறிகிறோம். ஆகவே f(x) ஒரு மூன்றும் படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். ஆகவே, x=3 என்பது மூன்று

தடவை மடங்கி வரும் சார்பின் மாறியாகக் கொள்ளவேண்டும். நியூட்டனின் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்த f(3, 3), f(3, 3, 3), f(3, 3, 3, 42) ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் காணவேண்டும். இப்பொழுது, x=3, 3, 3 ஆகயிருக்கும்போது $\Delta^3 f(x)$-இன் மதிப்புக்கள் 1, 1, 1 ஆகயிருக்கும். ஆகவே, இம்மதிப்புக்களிலிருந்து பின்னோக்கிக் கணக்கிட்டு $\Delta^2 f(x)$, $\Delta f(x)$, f(x) ஆகியவற்றைப் படிப்படியாகப் பெறவேண்டும். இவைகளைக் கணக்கிடும் முறை கீழே விளக்கப்பட்டுள்ளது.

முதலில், மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வகுபட்ட வேறுபாட்டுப் பட்டியலை அப்படியே எழுதி, x-இன் மதிப்புக்களுக்குக் கீழே 3, 3, 3 என்று ஒன்றின் கீழ் ஒன்றாக எழுதிக் கொள்ளவேண்டும். அவைகளுக்குரிய f(x)-இன் மதிப்புக்களை முறையே a_1, a_2, a_3 என்றும், அவைகளுக்குரிய $\Delta f(x)$-ஐ b_1, b_2, b_3 என்றும் $\Delta^2 f(x)$-ஐ c_1, c_2, c_3 என்றும், $\Delta^3 f(x)$-ஐ 1, 1, 1 என்றும் எழுதிக் கொள்ளவேண்டும். பின்னர், $\Delta^3 f(x)=1$-இலிருந்து பின்னோக்கி முதலில் c_1-ஐக் கணக்கிட்டுப் பின் அதிலிருந்து b_1-ஐக் கணக்கிட்டுப் பின் a_1-ஐக் கணக்கிடவேண்டும். இவ்வாறு, இதற்கடுத்த $\Delta^3 f(x)=1$-இலிருந்து, பின்னோக்கி c_2, b_2, a_2 என்பவற்றை ஒன்றன்பின் ஒன்றாகவும் இதே போல் c_3, b_3, a_3-ஐயும் கணக்கிடவேண்டும்.

x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
5	23			
		146		
11	899		40	
		1026		1
27	17315		69	
		2613		1
34	35606		100	
		4113		1
42	68510		$c_1=76$	
		$b_1=1757$		1
3	$a_1=-13$		$c_2=45$	
		$b_2=2$		1
3	$a_2=-13$		$c_3=6$	
		$b_3=2$		
3	$a_3=-13$			

c_1, b_1, a_1 ஆகியவற்றைக் கணக்கிடல் :

c_1க்கும் 100க்குமுள்ள வகுபட்ட வேறுபாடு = 1

$$\therefore \quad \frac{c_1-100}{3-27}=1$$

$$\therefore \quad c_1=100-24=76$$

b_1க்கும் 4113க்குமுள்ள வகுபட்ட வேறுபாடு = 76

$$\therefore \quad \frac{b_1-4113}{3-34}=76$$

$$\therefore \quad b_1=4113-31(76)=1757$$

a_1க்கும் 68510க்குமுள்ள வகுபட்ட வேறுபாடு = 1757

$$\therefore \quad \frac{a_1-68510}{3-42}=1757$$

$$\therefore \quad a_1=68510-39(1757)=-13$$

ஆனல் $a_1=a_2=a_3=f(3)$.

$\therefore \quad a_2=-13a_3,=-13.$

c_2க்கும் 76க்குமுள்ள 3ம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடு = 1

$$\therefore \quad \frac{c_2-76}{3-34}=1$$

$$\therefore \quad c_2=76-31=45.$$

b_2க்கும் 1757க்குமுள்ள 2ம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடு = 45

$$\therefore \quad \frac{b_2-1757}{3-42}=45$$

$$\therefore \quad b_2=1757-39(45)=2$$

c_3க்கும் 45க்குமுள்ள 3ம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடு = 1

$$\therefore \quad \frac{c_3-45}{3-42}=1$$

$$\therefore \quad c_3=45-39=6$$

இப்பொழுது a_1க்கும் a_2க்குமுள்ள 2ம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடு $=b_2=2$. ஆனல் $a_1=a_2=a_3=-13$. ஆகவே, a_2க்கும் a_3க்குமுள்ள வகுபட்ட வேறுபாடும் $b_2=2$க்குச் சமமாகும். ஆகவே, $b_3=2$. இவ்வாறு வகுபட்ட வேறுபாட்டுப் பட்டியல் பூர்த்தி செய்யப்படுகிறது. பட்டியலிலிருந்து உரிய மதிப்புக்களை நியூட்டனின் வாய்

பாட்டில் பிரதியிட்டால், தேவையான சார்பு (x—3) இன் படிகளில் கிடைக்கும்.

$$f(x) = f(3) + (x-3) \Delta f(3,3) + (x-3)^2 \Delta^2 f(3, 3, 3) + (x-3)^3 \Delta^3 f(3, 3, 3, 42)$$

இங்கு $f(3) = -13$, $\Delta f(3, 3) = b_2 = 2$, $\Delta^2 f(3, 3, 3) = c_3 = 6$

$$\Delta^3 f(3, 3, 3, 42) = 1.$$

$$\therefore \ f(x) = -13 + (x-3)\ (2) + (x-3)^2 (6) + (x-3)^3 (1)$$

$$= (x-3)^3 + 6(x-3)^2 + 2(x-3) - 13.$$

மாதிரி 82

கீழ்க்காணும் பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து f(x)ஐ (x—5) இன் படிகள் பெற்ற ஒரு கோவையாக அமைக்கவும்

x :	0	2	3	4	7	9
f(x) :	4	26	58	112	466	922

(டெல்லி எம்.ஏ. 1961)

இங்கு மடங்கி வரும் சார்பின் மாறி = 5.

முதலில் வகுபட்ட வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்கவும்.

x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	4			
		11		
2	26		7	
		32		1
3	58		11	
		54		1
4	112		16	
		118		1
7	466		22	
		228		
9	922			

$\Delta^3 f(x)$ மாறிலியாகையால் f(x) ஒரு மூன்றும் படிக் கோவை யாகும். ஆகவே x = 5 என்பது மூன்று முறை மடங்கி வரும் சார்பின் மாறியாகும். ஆகவே, கீழ்க்கண்ட வகுபட்ட வேறுபாட்டு வாய்பாடு கிடைக்கிறது.

x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	4			
		11		
2	26		7	
		32		1
3	58		11	
		54		1
4	112		16	
		118		1
7	466		22	
		228		1
9	922		$c_1=23$	
		$b_1=182$		1
5	$a_1=194$		$c_2=21$	
		$b_2=98$		1
5	$a_2=194$		$c_3=17$	
		$b_3=98$		
5	$a_3=194$			

$$\frac{c_1-22}{5-4} = 1 \qquad \therefore c_1=23$$

$$\frac{b_1-228}{5-7} = 23 \qquad \therefore b_1=228-46=182$$

$$\frac{a_1-922}{5-9} = 182 \qquad \therefore a_1=922-728=194$$

$$\therefore a_2=194\ ,\ a_3=194$$

$$\frac{c_2-23}{5-7} = 1 \qquad \therefore c_2=23-2 \quad =21$$

$$\frac{b_2-182}{5-9} = 21 \qquad \therefore b_2=182-84=98$$

$$\therefore b_3=98$$

$$\frac{c_3-21}{5-9} = 1 \qquad \therefore\ c_3 = 21-4 = 17$$

$$\therefore\ f(5) = 194,\ f(5,5) = b_2 = 98,\ f(5,5,5) = c_3 = 17$$
$$f(5,5,5,9) = 1$$

இம் மதிப்புக்களை நியூட்டனின் வாய்பாட்டில் பிரதியிட,

$$f(5) = f(5) + (x-5)\ \triangle f(5,5) + (x-5)^2 f(5,5,5) + (x-5)^3 f(5,5,5,9)$$
$$= 194 + (x-5)\ 98 + (x-5)^2\ 17 + (x-5)^3 \cdot 1$$
$$= 194 + 98\ (x-5) + 17\ (x-5)^2 + (x-5)^3.$$

பயிற்சி 17

1. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ஆனல் $f(a, b)$, $f(a, b, c)$, $f(a, b, c, d)$ ஆகிய வகுபட்ட வேறுபாடுகளைக் காண்க.

2. $g(x) = x^4$, $h(x) = x^3$, $f(x) = g(x) + h(x)$ என்ருல், $f(5, 7, 11, 13) = g(5, 7, 11, 13) + h(5, 7, 11, 13)$ என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

3. $f(0) = 8$, $f(4) = 68$, $f(5) = 123$ என்ருல், வகுபட்ட வேறுபாடுகளின் பட்டியலை அமைத்து $f(2)$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

4. $U_0 = -18$, $U_1 = 0$, $U_3 = 0$, $U_5 = -248$, $U_6 = 0$, $U_9 = 13104$ ஆனல் U_xஐ ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் கருதி அதன் அமைப்பைக் காணவும்.

5. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களிலிருந்து $f(x)$ இன் அமைப்பைக் காணவும்.

x :	11	13	14	18	19	21
f(x) :	1342	2210	2758	5850	6878	9282

6. கீழ்க்கண்ட மதிப்புக்களிலிருந்து வகுபட்ட வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைத்து அதன்மூலம் $f(x)$ இன் அமைப்பைக் காண்க.

x	f (x)
16	65536
17	83521
19	130321
23	279841
29	707281
31	923521

(சென்னை '60 செப்)

7. கீழ்க்கண்ட மதிப்புக்களுக்கு வகுபட்ட வேறுபாட்டுப் பட்டியலை அமைத்து அதிலிருந்து $f(3)$, $f(4)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

x :	4	5	7	10	11	13
f (x) :	48	100	294	900	1210	2028

(சென்னை '59 ஏப்.)

8. கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் y-இன் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அதிலிருந்து x = 2 என்றால் y-ஐ மதிப்பிடுக.

x :	0	3	5	6	8
y :	276	460	414	343	110

(சென்னை '67 ஏப்.)

9. கீழ்க்கண்ட மதிப்புக்களிலிருந்து U_8 ஐக் காண்க.

U_1	U_2	U_4	U_7	U_{18}
22	30	82	106	206

(சென்னை '69 செப்.)

10. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலிலிருந்து f (1)ஐக் கணக்கிடுக.

x	f (x)
0	658503
2	704969
3	729000
6	804357
7	830584
9	884736

11. f (x)ஐ x இன் நான்காம் படிச் சார்பாகக் கொண்டு f (19) இன் மதிப்பைக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து காண்க.

x	f (x)
11	14646
17	83526
21	194486
23	279846
31	923526

12. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலைப் பயன்படுத்தி f (x)ஐ (x − 2)இன் படிகள் பெற்ற ஒரு கோவையாக எழுதுக.

x :	0	1	3	4	6	7
f (x) :	41	16	8	13	11	−8

13. கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து f (x)ஐ (x − 6) இன் படிகள் பெற்ற ஒரு கோவையாக அமைக்கவும்.

x :	−1	0	2	3	7	10
f (x) :	−11	1	1	1	141	561

5.4 இலக்ராஞ்சியின் இடைச்செருகல் வாய்பாடு (Lagrange's Interpolation formula)

இலக்ராஞ்சியின் அசம இடைச் செருகல் வாய்பாடு, கொடுக்கப் பட்டுள்ள சார்பு f (x) ஆனது n-படி பெற்ற ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையென்ற தற்கோளின் (assumption) அடிப்படையில் அமைந்துள்ளது.

$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ ஆகிய x-இன் மதிப்புக்களுக்குரிய f (x) இன் மதிப்புக்கள் $f(a_0),\ f(a_1),\ f(a_2),\ \ldots\ldots,\ f(a_n)$ ஆகும். வகுபட்ட வேறுபாடுகளின் வரையறையின்படி,

$$f(x, a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n) = \frac{f(x)}{(x-a_0)(x-a_1)\ldots\ldots(x-a_n)} + \frac{f(a_0)}{(a_0-x)(a_0-a_1)\ldots\ldots(a_0-a_n)} + \frac{f(a_1)}{(a_1-x)(a_1-a_0)\ldots\ldots(a_1-a_n)} + \ldots\ldots + \frac{f(a_n)}{(a_n-x)(a_n-a_0)\ldots\ldots(a_n-a_{n-1})}$$

ஆனால் f (x) ஆனது n-படி பெற்ற ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை யாகையால் (n+1)-ஆம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடு பூச்சியமாகும். அதாவது, $f(x, a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n) = 0$

$$\therefore \frac{f(x)}{(x-a_0)(x-a_1)\ldots\ldots(x-a_n)} = \frac{f(a_0)}{(x-a_0)(a_0-a_1)\ldots\ldots(a_0-a_n)} + \frac{f(a_1)}{(x-a_1)(a_1-a_0)\ldots\ldots(a_1-a_n)} + \ldots\ldots + \frac{f(a_n)}{(x-a_n)(a_n-a_0)\ldots\ldots(a_n-a_{n-1})}$$

இருபக்கமும் $(x-a_0)(x-a_1)\ldots\ldots(x-a_n)$ ஆல் பெருக்கவும்.

$$\therefore f(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots\ldots(a_0-a_n)} \cdot f(a_0) + \frac{(x-a_0)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\ldots\ldots(a_1-a_n)} \cdot f(a_1) + \frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_3)\ldots\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots\ldots(a_2-a_n)} \cdot f(a_2) + \ldots\ldots + \frac{(x-a_0)(x-a_1)\ldots\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_0)(a_n-a_1)\ldots\ldots(a_n-a_{n-1})} \cdot f(a_n)$$

மாதிரி 83

கீழ்க்காணும் பட்டியலில் விடுபட்டுள்ள மதிப்பைக் காண்க.

x :	2	10	12	15	23
f (x) :	15·7	14·3	—	13·5	13·0

(சென்னை '67 செப்.)

$$f(12)=\frac{(12-10)(12-15)(12-23)}{(2-10)(2-15)(2-23)}\cdot(15{\cdot}7)$$
$$+\frac{(12-2)(12-15)(12-23)}{(10-2)(10-15)(10-23)}\cdot(14{\cdot}3)$$
$$+\frac{(12-2)(12-10)(12-23)}{(15-2)(15-10)(15-23)}\cdot(13{\cdot}5)$$
$$+\frac{(12-2)(12-10)(12-15)}{(23-2)(23-10)(23-15)}\cdot(13{\cdot}0)$$
$$=\frac{(2)(-3)(-11)}{(-8)(-13)(-21)}(15{\cdot}7)+\frac{(10)(-3)(-11)}{(8)(-5)(-13)}(14{\cdot}3)$$
$$+\frac{(10)(2)(-11)}{(13)(15)(-8)}\cdot(13{\cdot}5)+\frac{(10)(2)(-3)}{(21)(13)(8)}(13{\cdot}0)$$
$$=-0{\cdot}19468+9{\cdot}07478+5{\cdot}7105-0{\cdot}3562$$
$$=14{\cdot}2344.$$

மாதிரி 84

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலிலிருந்து, இலக்ராஞ்சியின் இடைச் செருகல் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி 30 வயதுக்குக் குறைவானவர்கள் 10,000க்கு எவ்வளவு என மதிப்பிடுக.

வயது (வருடங்களில்)	வாழ்பவர் (10,000 இன் வீதம்)
10 – 15	193·5
15 – 20	880
20 – 25	933
25 – 35	1636
35 – 45	1201
45 – 55	830

(சென்னை பி.காம்.' 65 ஏப்.)

30 வயதுக் குட்பட்டவர்களின் வீதம் காணவேண்டுமாகையால், கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ் வெண் பரவலைக் (Frequency distribution) குவியும் பரவலாக (Cumulative distribution) மாற்றி அமைத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

வயது	வாழ்பவர்
15க்குக் கீழ்	193·5
20 ,,	1073·5
25 ,,	2006·5
35 ,,	3642·5
45 ,,	4843·5
55 ,,	5673·5

இங்கு $a_0=15,\ a_1=20,\ a_2=25,\ a_3=35,\ a_4=45,\ a_5=55$;

$f(a_0)=193{\cdot}5,\ f(a_1)=1073{\cdot}5,\ f(a_2)=2006{\cdot}5,$

$f(a_3)=3642{\cdot}5,\ f(a_4)=4843{\cdot}5,\ f(a_5)=5673{\cdot}5$

$$x=30,\quad f(x)=f(30)=?$$

$$f(30)=\frac{(30-20)(30-25)(30-35)(30-45)(30-55)}{(15-20)(15-25)(15-35)(15-45)(15-55)}(193{\cdot}5)$$

$$+\frac{(30-15)(30-25)(30-35)(30-45)(30-55)}{(20-15)(20-25)(20-35)(20-45)(20-55)}(1073{\cdot}5)$$

$$+\frac{(30-15)(30-20)(30-35)(30-45)(30-55)}{(25-15)(25-20)(25-35)(25-45)(25-55)}(2006{\cdot}5)$$

$$+\frac{(30-15)(30-20)(30-25)(30-45)(30-55)}{(35-15)(35-20)(35-25)(35-45)(35-55)}(3642{\cdot}5)$$

$$+\frac{(30-15)(30-20)(30-25)(30-35)(30-55)}{(45-15)(45-20)(45-25)(45-35)(45-55)}(4843{\cdot}5)$$

$$+\frac{(30-15)(30-20)(30-25)(30-35)(30-45)}{(55-15)(55-20)(55-25)(55-35)(55-45)}(5673{\cdot}5)$$

$$=\frac{(10)(5)(-5)(-15)(-25)}{(-5)(-10)(-20)(-30)(-40)}(193{\cdot}5)$$

$$+\frac{(15)(5)(-5)(-15)(-25)}{(5)(-5)(-15)(-25)(-35)}(1073{\cdot}5)$$

$$+\frac{(15)(10)(-5)(-15)(-25)}{(10)(5)(-10)(-20)(-30)}(2006{\cdot}5)$$

$$+\frac{(15)(10)(5)(-15)(-25)}{(20)(15)(10)(-15)(-20)}(3642{\cdot}5)$$

$$+\frac{(15)(10)(5)(-5)(-25)}{(30)(25)(20)(10)(-10)}(4843{\cdot}5)$$

$$+\frac{(15)(10)(5)(-5)(-15)}{(40)(35)(30)(20)(10)}(5673{\cdot}5)$$

$$=15{\cdot}12-460{\cdot}07+1881{\cdot}09+1707{\cdot}42-303{\cdot}97+38{\cdot}13$$

$$=2877{\cdot}72$$

மாதிரி 85

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களிலிருந்து U_6, U_8 ஆகிய வற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

$U_3=168,\ U_7=120,\ U_9=72,\ U_{10}=63$

(சென்னை '67 ஏப்.)

இரண்டு மதிப்புக்களைக் காணவேண்டியிருப்பதால் முதலில் U_x இன் அமைப்பைக் காணவேண்டும். பின்னர், அவ்வமைப்பில் $x=6$, $x=8$ எனப் பிரதியிட U_6, U_8 ஆகியவற்றின் மதிப்புக்கள் கிடைக்கும்.

x :	3	7	9	10
U_x :	168	120	72	63.

$$U_x=\frac{(x-7)(x-9)(x-10)}{(3-7)(3-9)(3-10)}(168)$$
$$+\frac{(x-3)(x-9)(x-10)}{(7-3)(7-9)(7-10)}(120)$$
$$+\frac{(x-3)(x-7)(x-10)}{(9-3)(9-7)(9-10)}(72)$$
$$+\frac{(x-3)(x-7)(x-9)}{(10-3)(10-7)(10-9)}(63)$$
$$=\frac{(x-7)(x-9)(x-10)}{(-4)(-6)(-7)}(168)+\frac{(x-3)(x-9)(x-10)}{(4)(-2)(-3)}(120)$$
$$+\frac{(x-3)(x-7)(x-10)}{(6)(2)(-1)}(72)+\frac{(x-3)(x-7)(x-9)}{(7)(3)(1)}(63)$$
$$=-(x-7)(x-9)(x-10)+5(x-3)(x-9)(x-10)$$
$$-6(x-3)(x-7)(x-10)+3(x-3)(x-7)(x-9)$$
$$=x^3-21x^2+119x-27$$

இப்பொழுது, $x=6$ என்று பிரதியிட,

$$U_6=216-756+949-27=147.$$

$x=8$ என்று பிரதியிட,

$$U_8=512-1344+952-27=93.$$

மாதிரி 86

கீழ்க்கண்ட மக்கட் தொகைப் பட்டியலிலிருந்து இலக்ராஞ்சியின் முறையைப் பயன்படுத்தி 1896 ஆம் வருட மக்கட் தொகையை மதிப்பிடுக.

வருடம் ...	1881	1891	1901	1911
மக்கட் தொகை ... (மில்லியனில்)	253	280	284	303.

வருடத்தை x என்றும், மக்கட் தொகையை f(x) என்றும் கொள்க. இப்பொழுது, X= x−1881 எனக் கொள்க. ஆகவே, கீழ்க்கண்ட பட்டியல் கிடைக்கிறது.

X :	0	10	20	30
U_x :	253	280	284	303.

x = 1896 என்றால் X = 1896 − 1881 = 15.

$$f(1896)=f(15)=\frac{(15-10)(15-20)(15-30)}{(0-10)(0-20)(0-30)}(253)$$
$$+\frac{(15-0)(15-20)(15-30)}{(10-0)(10-20)(10-30)}(280)$$
$$+\frac{(15-0)(15-10)(15-30)}{(20-0)(20-10)(20-30)}(284)$$
$$+\frac{(15-0)(15-10)(15-20)}{(30-0)(30-10)(30-20)}(303)$$
$$=\frac{(5)(-5)(-15)}{(-10)(-20)(-30)}(253)+\frac{(15)(-5)(-15)}{(10)(-10)(-20)}(280)$$
$$+\frac{(15)(5)(-15)}{(20)(10)(-10)}(284)+\frac{(15)(5)(-5)}{(30)(20)(10)}(303)$$
$$=-\frac{253}{16}+\frac{2520}{16}+\frac{2556}{16}-\frac{303}{16}$$
$$=\frac{4520}{16}=282\cdot5 \text{ மில்லியன்.}$$

பயிற்சி 18

1. இலக்ராஞ்சியின் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து x இல் மூன்றும் படிச் சார்பை அமைக்கவும்.

x :	0	1	2	5
f (x) :	2	3	12	147

2. இலக்ராஞ்சியின் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்குரிய சார்புக் கோவையை அமைக்கவும்.

x :	0	1	3	4
y :	—12	0	6	12

(சென்னை III பி இ.' 68 ஏப்.)

3. 3, 2, 1, −1 என்ற x இன் மதிப்புக்களுக்கு முறையே 3, 12, 15, −21 ஆகிய மதிப்புக்களைப் பெறுகின்ற மிகக் குறைந்த படி பெற்ற சார்பினைக் காண்க.

4. கீழ்க்காணும் பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து இலக்ராஞ்சியின் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி x=27க்குரிய f(x) இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	14	17	31	35
f(x) :	68·7	64·0	44·0	39·1

(சென்னை '64 ஏப்.)

5. இலக்ராஞ்சியின் இடைச் செருகல் வாய்பாட்டை நிறுவுக. கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து f(48)ஐக் கணக்கிடுக.

x :	40	45	50	55
f(x) :	15·22	13·99	12·62	11·13

(சென்னை '65 ஏப்.)

6. f(x) என்ற சார்பு x இல் ஒரு நான்காம்படிக் கோவை யென்றால் f(19) ஐக் காண்க.

x :	11	17	21	23	31
f(x) :	14·6	83·5	19·4	28·0	92·3

(சென்னை '63 ஏப்.)

7. கீழ்க்காணும் பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து U_3 இன் மதிப்பைக் காண்க.

U_4	U_5	U_7	U_{10}	U_{11}	U_{13}
48	100	294	900	1210	2028

(சென்னை '69 ஏப்.)

8. கீழ்க்காணும் பட்டியலில் விடுபட்டுள்ள உறுப்பை மதிப்பிடுக.

x :	2	10	12	15	23
f(x) :	15·7	14·3	—	13·5	13·0

(சென்னை '67 செப்.)

9. இலக்ராஞ்சியின் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, கீழ்க்காணும் விவரங்களைக் கொண்டு U_{22} ஐ மதிப்பிடுக

$$U_{10}=22\cdot40,\quad U_{15}=21\cdot66,\quad U_{20}=20\cdot82,\quad U_{25}=19\cdot85$$

10. கீழ்க்காணும் பட்டியலில் ஒரு குழந்தையின் முதல் ஆறு மாதங்களின் இயல்பான எடை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வயது (மாதங்கள்) ...	0	2	3	5	6
எடை (இராத்தல்) ...	5	7	8	10	12

அக்குழந்தையின் வயது 4 மாதங்களாகயிருக்கும்போது அதன் எடையை மதிப்பிடுக.

11. நீராவியின் அழுத்தத்திற்கும், வெப்பநிலைக்குமுள்ள தொடர்பு கீழ்க்காணும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வெப்பநிலை :	361°	367°	378°	387°	399°
அழுத்தம் :	154·9	167·0	191·0	212·5	244·2

வெப்பநிலை 372° ஆயின் நீராவியின் அழுத்தத்தைக் கணக்கிடுக

12. ஐ. ஏ. எஸ். தேர்வு எழுதிய 130 பேர்களின் மதிப்பெண்களின் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதிலிருந்து முதல் வகுப்பு மதிப்பெண் (119க்குமேல்) பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கையை மதிப்பிடுக.

மதிப்பெண் (200க்கு)	நபர்களின் எண்ணிக்கை
50க்குமேல்	130
72 ,,	126
90 ,,	80
110 ,,	36
140 ,,	14

13. கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து இக்ராஞ்சியின் இடைச்செருகல் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி 35 வயதுக்குட்பட்ட குற்றவாளிகளின் சதவீதத்தை மதிப்பிடுக.

வயது	குற்றவாளிகள் (சதவீதத்தில்)
25க்குள்	52·0
30 ,,	67·3
40 ,,	84·1
50 ,,	94·4

14. கீழ்க்காணும் நிகழ்வெண் பரவலிலிருந்து இலக்ராஞ்சியின் முறைப்படி 45 மதிப்பெண்களுக்குக் குறைந்த மதிப்பெண்கள் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை மதிப்பிடுக.

மதிப்பெண்	மாணவர் எண்ணிக்கை
30—40	31
40—50	42
50—60	51
60—70	35
70—80	31

6. மைய வேறுபாட்டு வாய்பாடுகள்

(Central Difference Formulae)

6.1 மைய வேறுபாடுகள்

$a, a+h, a+2h, a+3h, \ldots\ldots$ ஆகியவற்றை மாறி x-இன் சம இடைவெளி மதிப்புக்களாகக் கொண்ட $f(x)$ என்ற சார்பிணைக் கருதுக. இம் மதிப்புக்களைப் பின்னேக்கி விரிவுபடுத்த $a-h, a-2h, a-3h, \ldots\ldots$ என்ற மதிப்புக்கள் கிடைக்கின்றன. இம் மதிப்புக் களுக்குரிய சார்பலன்கள் $\ldots\ldots f(a-3h), f(a-2h), f(a-h), f(a), f(a+h), f(a+2h), f(a+3h), \ldots\ldots$ ஆகும். இச்சார்பலன்களின் முதல், இரண்டாம், மூன்ரும், ... நிலை வேறுபாடுகளை முறையே $\triangle, \triangle^2, \triangle^3, \ldots\ldots$ என்ற செயலிகளால் குறிப்பிடுகிறேம். இவை சாதாரண வேறுபாடுகளாகும். இவற்றுள் $\triangle^2 f(x), \triangle^4 f(x), \triangle^6 f(x) \ldots\ldots\ldots$ முதலிய இரட்டை நிலை வேறுபாடுகள் மட்டும் பட்டியலி லுள்ள சார்பலன்களின் படுக்கை வரிசைகளில் அமைந்திருப்பதைக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சாதாரண வேறுபாட்டுப் பட்டியலிலிருந்து அறியலாம்.

x	f (x)	△f (x)	△² f (x)	△³ f (x)	△⁴ f (x)
a−3h	f (a−3h)				
		△f (a−3h)			
a−2h	f (a−2h)		△² f (a−3h)		
		△f (a−2h)		△³ f (a−3h)	
a−h	f (a−h)		△² f (a−2h)		△⁴ f (a−3h)
		△f (a−h)		△³ f (a−2h)	
a	f (a)		△² f (a−h)		△⁴ f (a−2h)
		△f (a)		△³ f (a−h)	
a+h	f (a+h)		△² f (a)		△⁴ f (a−h)
		△f (a+h)		△³ f (a)	
a+2h	f (a+2h)		△² f (a+h)		
		△f (a+2h)			
a+3h	f (a+3h)				

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் மதிப்புக்களுக்கு மற்ருெரு முறையிலும் வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்கலாம். முதலில் பட்டியலில் இடம் பெருத ...... $(a-5h/2)$, $(a-3h/2)$, $(a-h/2)$, $(a+h/2)$ $(a+3h/2)$, $(a+5h/2)$, ... ஆகிய x-இன் மதிப்புக்களுக்குரிய ...... $f(a-5h/2)$, $f(a-3h/2)$, $f(a-h/2)$, $f(a+h/2)$, $f(a+3h/2)$, $f(a+5h/2)$,.........என்ற $f(x)$ இன் மதிப்புக்களைக் காண வேண்டும். இவை பட்டியலில் காணப்படாத சார்பலன்களாகும். இவை பட்டியலில் இடம் பெற்றுள்ள சார்பலன்களின் இடை வரிசைகளில் அமைந்துள்ள இடைச் சார்பலன்களாகும். இந்த இடைச் சார்பலன்களுக்கு எல்லா நிலை சாதாரண வேறுபாடுகளையும் காண வேண்டும். இவற்றுள் $\triangle f(x)$, $\triangle^3 f(x)$, $\triangle^5 f(x)$, ... ஆகிய ஒற்றை நிலை (odd order) வேறுபாடுகள் மட்டும் பட்டியல் வரிசைகளிலேயே அமைந்திருப்பதைக் கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து அறிந்து கொள்ளலாம்.

x	f (x)	x	f (x)	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	
$a-3h$	$f(a-3h)$					
		$a-5h/2$	$f(a-5h/2)$			
$a-2h$	$f(a-2h)$			$\triangle f(a-5h/2)$		
		$a-3h/2$	$f(a-3h/2)$		$\triangle^2 f(a-5h/2)$	
$a-h$	$f(a-h)$			$\triangle f(a-3h/2)$		$\triangle^3 f(a-5h/2)$
		$a-h/2$	$f(a-h/2)$		$\triangle^2 f(a-3h/2)$	
a	**f (a)**			**$\triangle f(a-h/2)$**		**$\triangle^3 f(a-3h/2)$**
		$a+h/2$	$f(a+h/2)$		$\triangle^2 f(a-h/2)$	
$a+h$	$f(a+h)$			$\triangle f(a+h/2)$		$\triangle^3 f(a-h/2)$
		$a+3h/2$	$f(a+3h/2)$		$\triangle^2 f(a+h/2)$	
$a+2h$	$f(a+2h)$			$\triangle f(a+3h/2)$		
		$a+5h/2$	$f(a+3h/2)$			
$a+3h$	$f(a+3h)$					

இவ்வாறு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் மதிப்புக்களின் மைய மதிப்புக்களின் (central values) சாதாரண வேறுபாட்டுப் பட்டியல் மைய வேறுபாட்டுப் பட்டியல் (central difference table) எனப்படும். மேற்கண்ட மைய வேறுபாட்டுப் பட்டியலில் நடு மதிப்புக்களாகிய a, f (a) ஆகியவை அமைந்துள்ள படுக்கை வரிசைக்கு மையக் கோடு (central line) என்று பெயர். $\triangle f(a-h/2)$, $\triangle^3 f(a-3h/2)$,.........முதலிய ஒற்றை நிலை வேறுபாடுகள் மையக் கோட்டிலேயே அமைந்துள்ளன. இவை ஒற்றை நிலை மைய வேறுபாடுகள் (odd order central differences) எனப்படும். இதேபோல்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் மதிப்புக்களின் சாதாரண வேறுபாடு களாகிய $\triangle^2 f(a-h)$, $\triangle^4 f(a-2h)$,...... முதலிய இரட்டை நிலை சாதாரண வேறுபாடுகளும் மையக் கோட்டிலேயே அமைந்திருப் பதைச் சாதாரண வேறுபாட்டுப் பட்டியலில் கண்டோம். இவைகள் இரட்டை நிலை மைய வேறுபாடுகள் (even order central differences) என்று வழங்கப்படுகின்றன.

6.1.1. மைய வேறுபாட்டுச் செயலி—δ

சாதாரண வேறுபாடுகளைப் போலவே மைய வேறுபாடுகளின் முதல், இரண்டாம், மூன்றும்,........., n-ஆம் நிலைகள் முறையே $\delta, \delta^2, \delta^3, \ldots\ldots\ldots, \delta^n$ ஆகிய செயலிகளால் குறிக்கப்படுகின்றன. அதாவது $f(a-h/2)$, $f(a+h/2)$ ஆகியவற்றின் சாதாரண வேறு பாடாகிய $\triangle f(a-h/2)$ என்பது $f(a)$ இன் முதல் நிலை மைய வேறுபாடு என்று அழைக்கப்படுகின்றது. இம் முதல் நிலை மைய வேறுபாடு $\delta f(a)$ என்று குறிக்கப்படுகின்றது. ஆகவே,

$$\delta f(a) = f(a+h/2) - f(a-h/2) = \triangle f(a-h/2)$$

பொதுவாக,

$$\delta f(x) = f(x+h/2) - f(x-h/2) = \triangle f(x-h/2) \text{ ஆகும்.}$$

இதுபோல், மையக் கோட்டில் அமைந்துள்ள $\triangle^2 f(a-h)$ என்பது $f(a)$க்குரிய இரண்டாம் நிலை மைய வேறுபாடாகும். இது $\delta^2 f(a)$ என்று குறிக்கப்படுகின்றது. ஆகவே,

$$\delta^2 f(a) = \triangle^2 f(a-h)$$

$$\delta^4 f(a) = \triangle^4 f(a-2h)$$

$$\delta^6 f(a) = \triangle^6 f(a-3h)$$

....

இதுபோல், மையக் கோட்டிலமைந்துள்ள $\triangle^3 f(a-3h/2)$ என்பது $f(a)$க்குரிய மூன்றும் நிலை மைய வேறுபாடாகும். இது $\triangle^2 f(a-3h/2)$, $\triangle^2 f(a-h/2)$ ஆகியவற்றின் சாதாரண வேறுபாடாகும். இது $\delta^3 f(a)$ என்று குறிக்கப்படுகின்றது. ஆகவே,

$$\delta^3 f(a) = \triangle^2 f(a-h/2) - \triangle^2 f(a-3h/2) = \triangle^3 f(a-3h/2),$$

இதுபோல், $\delta^5 f(a) = \triangle^4 f(a-3h/2) - \triangle^4 f(a-5h/2) = \triangle^5 f(a-5h/2)$

....

6.1.2. δ, $\triangle$, E **ஆகியவற்றின் தொடர்பு.**

$$\delta f(x) = f(x+h/2) - f(x-h/2)$$

ஆனல் $f(x+h/2) = E^{1/2} f(x)$

$$f(x-h/2) = E^{-1/2} f(x)$$

ஆகவே, $\delta f(x) = E^{1/2} f(x) - E^{-1/2} f(x)$

$$= (E^{1/2} - E^{-1/2}) f(x)$$

$$\therefore \quad \delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$$

$$= E^{-1/2}(E-1)$$

$$= E^{-1/2} \triangle$$

அதாவது, $\delta = E^{-1/2} \triangle = \triangle E^{-1/2}$.

இச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $\delta^2 f(x)$, $\delta^3 f(x)$, ... ஆகியவற்றை கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பலன்களின் கோவைகளாகக் காணலாம்.

$$\delta^2 f(x) = \left(\triangle E^{-1/2}\right)^2 f(x)$$

$$= \triangle^2 E^{-1} f(x)$$

$$= \triangle^2 f(x-h)$$

$$= \triangle f(x) - \triangle f(x-h)$$

$$= [f(x+h) - f(x)] - [f(x) - f(x-h)]$$

$$= f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$$

இதுபோல், $\delta^3 f(x) = \left(\triangle E^{-1/2}\right)^3 f(x)$

$$= \triangle^3 E^{-3/2} f(x)$$

$$= \triangle^3 f(x-3h/2)$$

$$= f(x+3h/2) - {}^3C_1 f(x+h/2) + {}^3C_2 f(x-h/2) - f(x-3h/2)$$

$$\delta^4 f(x) = (\Delta E^{-1/2})^4 f(x)$$

$$= \Delta^4 E^{-2} f(x)$$

$$= \Delta^4 f(x-2h)$$

$$= f(x+2h) - {}^4C_1 f(x+h) + {}^4C_2 f(x)$$

$$- {}^4C_3 f(x-h) + f(x-2h).$$

....

பொதுவாக,

$$\delta^n f(x) = \Delta^n f(x-nh/2)$$

$$= f(x+nh/2) - {}^nC_1 f\left[x+\left(\frac{n}{2}-1\right)h\right] +$$

$${}^nC_2 f\left[x+\left(\frac{n}{2}-2\right)h\right] - \ldots\ldots\ldots$$

இப்பொழுது, $x=0$, $h=1$ எனக் கொண்டால்,

$\delta f(0) = \Delta f(-1/2)$; $\delta^2 f(0) = \Delta^2 f(-1)$;

$\delta^3 f(0) = \Delta^3 f(-3/2)$; $\delta^4 f(0) = \Delta^4 f(-2)$;

$\delta^5 f(0) = \Delta^5 f(-5/2)$; $\delta^6 f(0) = \Delta^6 f(-3)$;

....

இதுபோல், $\Delta = \delta E^{1/2}$

$$\therefore \Delta f(x) = \delta E^{1/2} f(x) = \delta f(x+h/2)$$

$$\Delta^2 f(x) = \delta^2 E f(x) = \delta^2 f(x+h)$$

$$\Delta^3 f(x) = \delta^3 E^{3/2} f(x) = \delta^3 f(x+3h/2)$$

....

பொதுவாக, $\Delta^n f(x) = \delta^n E^{n/2} f(x) = \delta^n f(x+nh/2)$.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பலன்களின் மைய வேறுபாட்டுப் பட்டியல் கீழ்க்கண்டவாறு அமைகிறது.

x	f(x)	$\delta f(x)$	$\delta^2 f(x)$	$\delta^3 f(x)$	$\delta^4 f(x)$
a−3h	f(a−3h)				
		$\delta f(a-5h/2)$			
a−2h ...	f(a−2h)	... ...	$\delta^2 f(a-2h)$		
		$\delta f(a-3h/2)$		$\delta^3 f(a-3h/2)$	
a−h ...	f(a−h)	... ...	$\delta^2 f(a-h)$	... ...	$\delta^4 f(a-h)$ ...
		$\delta f(a-h/2)$		$\delta^3 f(a-h/2)$	
a ...	**f(a)**	... ...	δ^2 **f(a)**	... ...	δ^4 **f(a)** ......
		$\delta f(a+h/2)$		$\delta^3 f(a+h/2)$	
a+h ...	f(a+h)	... ...	$\delta^2 f(a+h)$	... ...	$\delta^4 f(a+h)$...
		$\delta f(a+3h/2)$		$\delta^3 f(a+3h/2)$	
a+2h...	f(a+2h)	... ...	$\delta^2 f(a+2h)$		
		$\delta f(a+5h/2)$			
a+h	f(a+3h)				

இம் மைய வேறுபாட்டுப் பட்டியலில் மையக் கோட்டுக்கு இரு பக்கங்களிலும் மைய வேறுபாடுகள் ஒரே சீராக (Symmetrically) அமைந்துள்ளதைக் காணலாம். ஆனால், சாதாரண வேறுபாட்டுப் பட்டியலில் இவ்வாறு அமைவதில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும். மேலும், $\delta^2 f(a)$, $\delta^4 f(a)$,......ஆகிய இரட்டை நிலை மைய வேறு பாடுகள் மையக் கோட்டின் மேலேயே அமைந்துள்ளன. இம் மைய வேறுபாடுகளுக்குச் சமமான $\triangle^2 f(a-h)$, $\triangle^4 f(a-2h)$, ... முதலிய சாதாரண வேறுபாடுகளும் சாதாரண வேறுபாட்டுப் பட்டியலில் இதே மையக் கோட்டின் மேலேயே அமைந்திருப்பதைக் கண்டோம். ஆகவே, $\delta^2 f(a)$, $\delta^4 f(a)$,...ஆகிய மைய வேறுபாடு களைச் சாதாரண வேறுபாட்டுப் பட்டியலின் மையக் கோட்டிலிருந்து பெற முடிகிறது. ஒற்றை நிலை மைய வேறுபாடுகளை இவ்வாறு பெற முடியாது. ஆனால், ஒற்றை நிலை மைய வேறுபாடுகளாகிய $\delta f(a-h/2)$, $\delta f(a+h/2)$; $\delta^3 f(a-h/2)$, $\delta^3 f(a+h/2)$; ...... யாவும் f(a−h), f(a+h), ஆகியவை அமைந்துள்ள படுக்கைக் கோடுகளுக் கிடையே அமைந்துள்ளனவாகையால், இவ்விரு கோடுகளுக்கு மிடையே அமைந்துள்ள எல்லா நிலை வேறுபாடுகளும் f(a)ஐச் சார்ந்த மைய வேறுபாடுகள் என்றே அழைக்கப்படுகின்றன. ஆகவே, $\triangle f(a-h)$, $\triangle f(a)$, $\triangle^2 f(a-h)$, $\triangle^3 f(a-2h)$, $\triangle^3 f(a-h)$,

$\Delta^4 f(a-2h)$, ... முதலியன அப்பட்டியலின் மைய வேறுபாடுகளாகும். இம் மைய வேறுபாட்டுப் பட்டியலில் $a=0$, $h=1$ எனப் பிரதியிட x இன் மதிப்புக்கள் $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ என்றும், அவற்றிற்குரிய சார்பலன்கள் முறையே $f(-3), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)$ என்று மாறுகின்றன. ஆகவே, மைய வேறுபாட்டுப் பட்டியலும் கீழ்க்கண்டவாறு மாறுகிறது.

x	f(x)	$\delta f(x)$	$\delta^2 f(x)$	$\delta^3 f(x)$	$\delta^4 f(x)$
−3	f(−3)				
		$\delta f(-5/2)$			
−2	f(−2)		$\delta^2 (-2)$		
		$\delta f(-3/2)$		$\delta^3 f(-3/2)$	
−1 ...	f(−1) ...	... ...	... $\delta^2 f(-1)$	... ...	$\delta^4 f(-1)$...
		$\delta f(-1/2)$		$\delta^3 f(-1/2)$	
0 ...	**f(0)** ...	... ...	... δ^2 **f(0)**	... ...	δ^4 **f(0)** ...
		$\delta f(1/2)$		$\delta^3 f(1/2)$	
1 ...	f(1) ...	... ...	... $\delta^2 f(1)$	... ...	$\delta^1 f(1)$ ...
		$\delta f(3/2)$		$\delta^3 f(3/2)$	
2	f(2)		$\delta^2 f(2)$		
		$\delta f(5/2)$			
3	f(3)				

இம் மதிப்புக்களுக்குரிய சாதாரண வேறுபாட்டுப் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x	f (x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
−3	f (−3)				
		$\Delta f(-3)$			
−2	f (−2)		$\Delta^2 f(-3)$		
		$\Delta f(-2)$		$\Delta^3 f(-3)$	
−1...	f (−1)...	...	...$\Delta^2 f(-2)$...	...	...$\Delta^4 f(-3)$...
		$\Delta f(-1)$		$\Delta^3 f(-2)$	
0...	**f (0)** ...	...	...Δ^2 **f (−1)**...	...	...Δ^4 **f (−2)**...
		$\Delta f(0)$		$\Delta^3 f(-1)$	
1...	f (1) ...	...	...$\Delta^2 f(0)$ ...	...	...$\Delta^4 f(-1)$...
		$\Delta f(1)$		$\Delta^3 f(0)$	
2	f (2)		$\Delta^2 f(1)$		
		$\Delta f(2)$			
3	f (3)				

இப்பட்டியலில் f (−1) f (1) ஆகியவை அமைந்துள்ள படுக்கைக் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட $\triangle f(-1)$, $\triangle f(0)$, $\triangle^2 f(-1)$, $\triangle^3 f(-2)$, $\triangle^3 f(-1)$, $\triangle^4 f(-2)$, ... ஆகியவை மைய வேறுபாடுகளாகும்.

6.1.3 மைய வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைத்தல்

இரண்டாம் அத்தியாயத்தில் சம இடைச் செருகல் வாய்பாடுகள் சிலவற்றைக் கண்டோம். அவ்வாய்பாடுகள் யாவும் பட்டியலின் தொடக்கம் அல்லது இறுதியிலுள்ள மதிப்புக்களுக்குப் பக்கத்திலுள்ள மதிப்புக்களைக் காணவே பயன்பட்டன. சார்பலனின் மதிப்பு மாறி x-இல் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகயிருந்தால் மட்டுமே பட்டியலின் மையக் கோட்டில் அல்லது அதன் பக்கத்திலுள்ள மதிப்புக்களை அவ்வாய்பாடுகளின் மூலம் காண முடிந்தது. ஆகவே, மையக் கோட்டில் அல்லது அதன் பக்கத்திலுள்ள சார்பலன்களின் மதிப்புக்களைத் துல்லியமாக மதிப்பிடப் பொருத்தமான வாய்பாடுகள் தேவைப்படுகின்றன. இத்தகைய மதிப்புக்களை மைய வேறுபாட்டு வாய்பாடுகளின் மூலம் காண முடிகின்றது.

$a, a+h, a+2h, a+3h, a+4h, a+5h$ என்ற x-இன் மதிப்புக்களும், அவற்றிற்குரிய $f(a), f(a+h), f(a+2h), f(a+3h), f(a+4h), f(a+5h)$ என்ற சார்பலன்களும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்வோம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள x-இன் மதிப்புக்களில் நடு மதிப்பை அல்லது நடு மதிப்புக்குப் பக்கத்திலுள்ள மதிப்பை ஆதி (origin)யாக எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். மேலே குறிப்பிடப்பட்ட மதிப்புக்களில் மையத்தை நெருங்கிய மதிப்பான $a+3h$ ஐ ஆதியாக எடுத்துக் கொள்வோம். இப்பொழுது புதிய மாறியை X எனக் கொண்டால், $X = x-(a+3h)$ ஆகும். இப்புதிய மாறி X இன் மதிப்புக்கள் முறையே $-3h, -2h, -h, 0, h, 2h$ ஆகும். இப்புதிய மதிப்புக்களை சம இடைவெளியாகிய h-ஆல் வகுத்து, கிடைக்கும் மதிப்புக்களை u - என்ற மாறியால் குறித்தால்,

$u = \frac{X}{h} = \frac{x-(a+3h)}{h} = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ என்று கிடைக்கும்.

$$\therefore \ f(u) = f\left(\frac{x-(a+3h)}{h}\right)$$

$\therefore \ x = a$ ஆனால், f (a) என்பது $f\left(\frac{a-a-3h}{h}\right) = f(-3)$ என்று மாறுகிறது.

இதுபோல், $f(a+h)=f(-2)$;

$$f(a+2h)=f(-1),$$
$$f(a+3h)=f(0),$$
$$f(a+4h)=f(1),$$
$$f(a+5h)=f(2)$$ என்று மாறுகின்றன.

ஆகவே, கீழ்க்கண்ட மைய வேறுபாட்டுப் பட்டியல் கிடைக்கிறது.

u	f (u)	$\Delta f(u)$	$\Delta^2 f(u)$	$\Delta^3 f(u)$	$\Delta^4 f(u)$
−3	f (−3)				
		$\Delta f(-3)$			
−2	f (−2)		$\Delta^2 f(-3)$		
		$\Delta f(-2)$		$\Delta^3 f(-3)$	
−1	f (−1)		$\Delta^2 f(-2)$		$\Delta^4 f(-3)$
		$\Delta f(-1)$		$\Delta^3 f(-2)$	
0	**...f (0) ...**	**...**	**...$\Delta^2 f(-1)$...**	**...**	**...$\Delta^4 f(-2)$...**
		$\Delta f(0)$		$\Delta^3 f(-1)$	
1	f (1)		$\Delta^2 f(0)$		
		$\Delta f(1)$			
2	f (2)				

6.2 காஸ்-இன் முன்வேக இடைச்செருகல் வாய்பாடு (Gauss's Forward Interpolation Formula)

$a-3h,\ a-2h,\ a-h,\ a,\ a+h,\ a+2h,\ a+3h, \ldots\ldots$ ஆகிய x இன் மதிப்புக்களுக்குரிய f (x) இன் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப் பட்டுள்ளதாகக் கொள்வோம். அசம இடைவெளிகளுக்குரிய நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டு வாய்பாட்டைக் கருதுக.

$$\begin{aligned} f(x) = f(a_0) &+ (x-a_0)\, f(a_0, a_1) + (x-a_0)(x-a_1)\, f(a_0, a_1, a_2) \\ &+ (x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\, f(a_0, a_1, a_2, a_3) \\ &+ (x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\, f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

இவ்வாய்பாட்டில் $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ என்பன அசம இடைவெளிகளி லமைந்தவை. இப்பொழுது $a_0=a$, $a_1=a+h$, $a_2=a-h$, $a_3=a+2h$, $a_4=a-2h, \ldots\ldots$ எனக் கொண்டால், $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots$

ஆகியவை அசம இடைவெளிகளிலிருக்கும். ஆகவே, இம் மதிப்புக்களை நியூட்டனின் வாய்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

$$f(x)=f(a)+(x-a)\,f(a,a+h)+(x-a)(x-a-h)\,f(a,a+h,a-h)$$
$$+(x-a)(x-a-h)(x-a+h)\,f(a,a+h,a-h,a+2h)$$
$$+(x-a)(x-a-h)(x-a+h)(x-a-2h)\,f(a,a+h,a-h,a+2h,a-2h)$$
$$+\ldots\ldots$$

ஆனால், $f(a,a+h)=\dfrac{1}{h}\Delta f(a)$,

$$f(a,a+h,a-h)=f(a-h,a,a+h)=\frac{1}{2!\,h^2}\Delta^2 f(a-h),$$

$$f(a,a+h,a-h,a+2h)=f(a-h,a,a+h,a+2h)$$
$$=\frac{1}{3!\,h^3}\Delta^3 f(a-h),$$

$$f(a,a+h,a-h,a+2h,a-2h)=f(a-2h,a-h,a,a+h,a+2h)$$
$$=\frac{1}{4!\,h^4}\Delta^4 f(a-2h),$$

$$\ldots\ldots$$

இம் மதிப்புக்களை மேற்கண்ட வாய்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

ஆகவே, கீழ்க்காணும் வாய்பாடு கிடைக்கிறது.

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{h}\Delta f(a)+\frac{(x-a)(x-a-h)}{2!\,h^2}\Delta^2 f(a-h)$$
$$+\frac{(x-a)(x-a-h)(x-a+h)}{3!\,h^3}\Delta^3 f(a-h)$$
$$+\frac{(x-a)(x-a-h)(x-a+h)(x-a-2h)}{4!\,h^4}\Delta^4 f(a-2h)$$
$$+\frac{(x-a)(x-a-h)(x-a+h)(x-a-2h)(x-a+2h)}{5!\,h^5}\Delta^5 f(a-2h)$$
$$+\ldots\ldots \qquad (1)$$

இவ்வாய்பாட்டில் $a=0, h=1$ எனப் பிரதியிட, காஸ்-இன் முன்வேக வாய்பாடு கிடைக்கிறது.

$$f(x)=f(0)+x\,\Delta f(0)+\frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(-1)$$

$$+\frac{x(x-1)(x+1)}{3!}\Delta^3 f(-1)+\frac{x(x-1)(x+1)(x-2)}{4!}\Delta^4 f(-2)$$

$$+\frac{x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{5!}\Delta^5 f(-2)+\dots\dots$$

அதாவது,

$$f(x)=f(0)+x\,\Delta f(0)+\frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(-1)+\frac{(x+1)x(x-1)}{3!}\Delta^3 f(-1)$$

$$+\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{4!}\Delta^4 f(-2)+\frac{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)}{5!}\Delta^5 f(-2)$$

$$+\dots\dots\dots \quad (2)$$

இப்பொழுது, $(x)_r=\frac{x(x-1)(x-2)\dots\dots(x-r+1)}{r!}$ என்று எழுதி ஞல், காஸ்-இன் வாய்பாடு கீழ்க்கண்ட அமைப்பைப் பெறுகிறது.

$$f(x)=f(0)+(x)_1\,\Delta f(0)+(x)_2\,\Delta^2 f(-1)+(x+1)_3\,\Delta^3 f(-1)$$
$$+(x+1)_4\,\Delta^4 f(-2)+(x+2)_5\,\Delta^5 f(-2)+\dots\dots \quad (3)$$

இவ்வாய்பாடு நியூட்டன்-காஸ் இடைச்செருகல் வாய்பாடு (Newton-Gauss interpolation formula) என்றும் வழங்கப் படுகிறது.

குறிப்பு 1 :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் மதிப்புக்களின் சம இடை வெளி ஒரு அலகாக (one unit) இல்லாவிடில், நடு மதிப்பு a ஐ ஆதியாகக் கொண்டு $u=\frac{x-a}{h}$ என்ற பிரதியீட்டின் மூலம் மாறி x ஐ மாறி u ஆக மாற்றி, அதற்குரிய f(u) இன் மதிப்புக்களாக, கொடுக்கப் பட்டுள்ள f(x) இன் மதிப்புக்களை எடுத்துக் கொண்டு, வேறுபாட்டுப் பட்டியலமைத்துக் கீழ்க்கண்ட வாய்பாட்டில் பிரதியிட வேண்டும்.

$$f(u)=f(0)+(u)_1\,\Delta f(0)+(u)_2\,\Delta^2 f(-1)+(u+1)_3\,\Delta^3 f(-1)$$
$$+(u+1)_4\,\Delta^4 f(-2)+(u+2)_5\,\Delta^5 f(-2)+\dots\dots \quad (4)$$

குறிப்பு 2 :

சமன்பாடு (1) இல் $x=a+nh$ என்று பிரதியிட, காஸ்-இன் முன்வேக வாய்பாடு கீழ்க்கண்ட அமைப்பைப் பெறுகிறது.

$$f(a+nh)=f(a)+(n)_1 \Delta f(a)+(n)_2 \Delta^2 f(a-h)+(n+1)_3 \Delta^3 f(a-h) + (n+1)_4 \Delta^4 f(a-2h)+(n+2)_5 \Delta^5 f(a-2h)+\ldots\ldots \quad (5)$$

குறிப்பு 3 :

காஸ்-இன் வாய்பாடு, மைய வேறுபாட்டுப் பட்டியலின் மையக் கோட்டிலுள்ள இரட்டை நிலை வேறுபாடுகளையும், மையக் கோட்டிற்குக் கீழேயுள்ள ஒற்றை நிலை வேறுபாடுகளையும் மட்டுமே கொண்டு அமைந்துள்ளது. ஆகவே, இவ் வாய்பாட்டின் மூலம் மையக் கோட்டிற்கும் அதற்குக் கீழ் வரிசைக்குமிடைப்பட்ட x-இன் மதிப்புக் களுக்குரிய f(x) இன் மதிப்புக்களை மிகவும் துல்லியமாகப் பெறலாம்.

மாதிரி 87

காஸ்-இன் இடைச் செருகல் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் பட்டியலில் f(3·5) இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	2	3	4	5
f(x) :	2·626	3·454	4·784	6·986

காணவேண்டிய மதிப்பு f(3)க்கும் f(4)க்குமிடையே யிருப்பதால், 3 ஐ ஆதியாகக் கொள்க.

$u=\frac{x-3}{1}$ என்று மாற்றி, வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்கவும்.

u	f(u)	$\Delta f(u)$	$\Delta^2 f(u)$	$\Delta^3 f(u)$
−1	2·626			
		$\Delta f(-1)=0{\cdot}828$		
0	3·454		$\Delta^2 f(-1)=0{\cdot}502$	
		$\Delta f(0)=1{\cdot}330$		$\Delta^3 f(-1)=0{\cdot}370$
1	4·784		$\Delta^2 f(0)=0{\cdot}872$	
		$\Delta f(1)=2{\cdot}202$		
2	6·986			

$$f(u)=f(0)+(u)_1 \Delta f(0)+(u)_2 \Delta^2 f(-1)+(u+1)_3 \Delta^3 f(-1) + \ldots\ldots$$

இங்கு $x=3{\cdot}5,\ a=3,\ h=1$

$$\therefore\quad u=\frac{x-a}{h}=\frac{3{\cdot}5-3}{1}=0{\cdot}5.$$

$$\therefore\ f(0{\cdot}5)=3{\cdot}454+(0{\cdot}5)_1\,(1{\cdot}330)+(0{\cdot}5)_2\,(0{\cdot}502)+(1{\cdot}5)_3\,(0{\cdot}370)$$

$$=3{\cdot}454+(0{\cdot}5)\ (1{\cdot}330)+\frac{(0{\cdot}5)\,(-0{\cdot}5)}{2\,!}\,(0{\cdot}502)$$

$$+\frac{(1{\cdot}5)\,(0{\cdot}5)\,(-0{\cdot}5)}{3\,!}\,(0{\cdot}370)$$

$$=3{\cdot}454+0{\cdot}665-0{\cdot}06275-0{\cdot}023125$$

$$=4{\cdot}033125.$$

$$\therefore\quad f(3{\cdot}5)=4{\cdot}033125.$$

மாதிரி 88

நியூட்டன் - காஸ் இடைச் செருகல் வாய்பாட்டை நிறுவுக. கீழ்க்கண்ட மதிப்புக்களிலிருந்து log Sin 0° 16′ 8·5″ இன் மதிப்பைக் காண்க.

log Sin 0° 16′ 7″	7·670999
log Sin 0° 16′ 8″	7·671449
log Sin 0° 16′ 9″	7·671897
log Sin 0° 16′ 10″	7·672345

(சென்னை '63 செப்., 64 செப்.)

இங்கு h = 1″, a = 0° 16′ 8″, x = 0° 16′ 8·5″

$$\therefore\quad u=\frac{x-a}{h}=\frac{x-0^\circ\,16'\,8{\cdot}5''}{1''}$$

வேறுபாட்டுப் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது,

x	u	f(u)	Δ f(u)	Δ^2 f(u)	Δ^3 f(u)
0° 16′ 7″	—1	7·670999			
			0·000450		
0° 16′ 8″	0	7·671449		—0·000002	
			0·000448		0·000002
0° 16′ 9″	1	7·671897		0	
			0·000448		
0° 16′ 10″	2	7·672345			

$x = 0° \; 16' \; 8{\cdot}5''$ என்றால், $u = 0{\cdot}5$ ஆகும்.

இப்பொழுது,

$$f(u) = f(0) + (u)_1 \triangle f(0) + (u)_2 \triangle^2 f(-1) + (u+1)_3 \triangle^3 f(-1)$$

$$f(0{\cdot}5) = 7{\cdot}671449 + (0{\cdot}5)\,(0{\cdot}000448)$$

$$+ \frac{(0{\cdot}5)\,(-0{\cdot}5)}{2\,!}(-0{\cdot}000002) + \frac{(1{\cdot}5)\,(0{\cdot}5)\,(-0{\cdot}5)}{3\,!}\,(0{\cdot}000002)$$

$$= 7{\cdot}671449 + 0{\cdot}000224 + 0{\cdot}00000025 - 0{\cdot}00000125$$

$$= 7{\cdot}671673125$$

$= 7{\cdot}671673$ (ஆறு தசம இடங்களுக்கு).

மாதிரி 89

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து 1935 ஆம் வருட மக்கட் தொகையை நியூட்டன்-காஸ் முன் வேக வாய்பாட்டின் மூலம் மதிப்பிடுக.

வருடம் ...	1930	1932	1934	1936	1938	1940
மக்கட் தொகை (ஆயிரங்களில்) ...	12	16	21	27	32	40

$a = 1934$ எனக் கொள்க ; $h = 2$.

$$\therefore \quad u = \frac{x-a}{h} = \frac{x-1934}{2}\,.$$

$x = 1935$ என்றால், $u = {\cdot}5$.

கீழ்க்கண்டவாறு வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்கவும்.

x	u	f(u)	$\triangle f(u)$	$\triangle^2 f(u)$	$\triangle^3 f(u)$	$\triangle^4 f(u)$	$\triangle^5 f(u)$
1930	—2	12					
			4				
1932	—1	16		1			
			5		0		
1934	0	21		1		—2	
			6		—2		8
1936	1	27		—1		6	
			5		4		
1938	2	32		3			
			8				
1940	3	40					

$$f(u)=f(0)+(u)_1 \triangle f(0)+(u)_2 \triangle^2 f(-1)+(u+1)_3 \triangle^3 f(-1) + (u+1)_4 \triangle^4 f(-2)+(u+2)_5 \triangle^5 f(-2)$$

$$=21+(0{\cdot}5)(6)+\frac{(0{\cdot}5)(-0{\cdot}5)}{2!}(1)+\frac{(1{\cdot}5)(0{\cdot}5)(-0{\cdot}5)}{3!}(-2) + \frac{(1{\cdot}5)(0{\cdot}5)(-0{\cdot}5)(-1{\cdot}5)}{4!}(-2) + \frac{(2{\cdot}5)(1{\cdot}5)(0{\cdot}5)(-0{\cdot}5)(-1{\cdot}5)}{5!}(8)$$

$$=21+3-0{\cdot}125+0{\cdot}125-0{\cdot}046875+0{\cdot}09375$$

$$=24{\cdot}046875$$

$=24{\cdot}05$ (இரண்டு தசம இடங்களுக்கு).

6.3. நியூட்டன்-காஸ் பின்முக வாய்பாடு (Newton-Gauss backward formula)

$$f(a+nh)=f(a)+(n)_1 \triangle f(a)+(n)_2 \triangle^2 f(a-h) + (n+1)_3 \triangle^3 f(a-h)+(n+1)_4 \triangle^4 f(a-2h) + (n+2)_5 \triangle^5 f(a-2h)+\ldots\ldots\ldots$$

என்ற நியூட்டன்-காஸ் முன்வேக வாய்பாட்டினைக் கருதுக. இவ் வாய்பாட்டில் h ஐ $-h$ என்று மாற்ற, நியூட்டன்-காஸ் பின்முக வாய்பாடு கிடைக்கிறது. h ஐ $-h$ என்று மாற்றுவதால் வேறுபாடு களும் பின்னோக்கிக் கணக்கிடப்படுகின்றன. அதாவது,

$$\triangle f(a)=f(a-h)-f(a)$$

என்று மாறுகிறது.

ஆனால் $f(a-h)-f(a) = -[f(a)-f(a-h)] = -\triangle f(a-h)$

ஆகவே, $\triangle f(a)$ என்பது $-\triangle f(a-h)$ என்று மாறுகிறது.

இதேபோல், $\triangle^3 f(a-h)$ என்பது $-\triangle^3 f(a-2h)$ என்றும்,
$\triangle^5 f(a-2h)$ என்பது $-\triangle^5 f(a-3h)$ என்றும்,
........................என்றும் மாறுகின்றன.

ஆனால் $\triangle^2 f(a-h)$, $\triangle^4 f(a-2h)$,.........ஆகிய இரட்டை நிலை வேறுபாடுகளில் எவ்வித மாறுதலும் இருக்காது. ஆகவே,

$$f(a-nh) = f(a)-(n)_1 \triangle f(a-h)+(n)_2 \triangle^2 f(a-h) - (n+1)_3 \triangle^3 f(a-2h)+(n+1)_4 \triangle^4 f(a-2h) - (n+2)_5 \triangle^5 f(a-3h)+\ldots\ldots\ldots$$

இது நியூட்டன்-காஸ் பின்முக வாய்பாடு என்று அழைக்கப் படுகிறது.

6. 3. 1. நியூட்டன்–காஸ் பின்முக வாய்பாட்டின் மற்ெருரு வடிவம்.

பூச்சியத்தை ஆதியாகவும் ஒரு அலகு சம இடைவெளியும் கொண்ட பட்டியலுக்குப் பயன்படத் தக்கவாறு நியூட்டன்-காஸ் பின்முக வாய்பாட்டைக் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி அமைக்கலாம்.

கீழ்க்கண்ட மைய வேறுபாட்டுப் பட்டியலைக் கருதுக.

u	f(u)	$\Delta f(u)$	$\Delta^2 f(u)$	$\Delta^3 f(u)$	$\Delta^4 f(u)$	
...	...					
		...				
-2	$f(-2)$		...			
		$\Delta f(-2)$		...		
-1	... $f(-1)$	... ...	$\Delta^2 f(-2)$	... ...	...	...
		$\Delta f(-1)$		$\Delta^3 f(-2)$		
0	... $\mathbf{f(0)}$	... ...	$\mathbf{\Delta^2 f(-1)}$	... ...	$\mathbf{\Delta^4 (f-2)}$	...
		$\Delta f(0)$		$\Delta^3 f(-1)$		
1	... $f(1)$	... ...	$\Delta^2 f(0)$	... ...	...	...
		$\Delta f(1)$		...		
2	$f(2)$		...			
		...				
...	...					

பட்டியலிலிருந்து,

$$\Delta^2 f(-1) = \Delta f(0) - \Delta f(-1) \text{ என்று கிடைக்கிறது.}$$

$$\therefore \quad \Delta f(0) = \Delta f(-1) + \Delta^2 f(-1)$$

இதுபோலவே,

$$\Delta^2 f(0) = \Delta^2 f(-1) + \Delta^3 f(-1),$$
$$\Delta^3 f(0) = \Delta^3 f(-1) + \Delta^4 f(-1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^3 f(-1) = \Delta^3 f(-2) + \Delta^4 f(-2),$$
$$\Delta^4 f(-1) = \Delta^4 f(-2) + \Delta^5 f(-2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

என்ற தொடர்புகளைப் பட்டியலிலிருந்து பெறுகிறோம். அதாவது, $\Delta^2 f(0)$, $\Delta^3 f(0)$, $\Delta^3 f(-1)$, $\Delta^4 f(-1)$,...... ஆகிய வேறுபாடுகளை f(0)ஐச் சார்ந்த மைய வேறுபாடுகளாக மாற்றி எழுதலாம். இம்

மதிப்புக்களை நியூட்டன்-கிரிகோரி முன்வேக வாய்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

$$f(u)=f(0)+\frac{u}{1!}\,\Delta f(0)+\frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(0)+\frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 f(0)+\ldots\ldots$$

$$=f(0)+\frac{u}{1!}\Big[\Delta f(-1)+\Delta^2 f(-1)\Big]+\frac{u(u-1)}{2!}\Big[\Delta^2 f(-1)+\Delta^3 f(-1)\Big]+\frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Big[\Delta^3 f(-1)+\Delta^4 f(-1)\Big]+\ldots\ldots$$

$$=f(0)+\frac{u}{1!}\Delta f(-1)+\left[\frac{u}{1!}+\frac{u(u-1)}{2!}\right]\Delta^2 f(-1)+\left[\frac{u(u-1)}{2!}+\frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\right]\Delta^3 f(-1)+\left[\frac{u(u-1)(u-2)}{3!}+\frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!}\right]\Delta^4 f(-1)+\ldots\ldots$$

$$=f(0)+\frac{u}{1!}\Delta f(-1)+\frac{(u+1)u}{2!}\Delta^2 f(-1)+\frac{(u+1)\,u\,(u-1)}{3!}\Delta^3 f(-1)+\frac{(u+1)(u)(u-1)(u-2)}{4!}\Delta^4 f(-1)+\ldots\ldots$$

$$=f(0)+\frac{u}{1!}\,\Delta f(-1)+\frac{(u+1)u}{2!}\Delta^2 f(-1)+\frac{(u+1)\,u\,(u-1)}{3!}\Big[\Delta^3 f(-2)+\Delta^4 f(-2)\Big]+\frac{(u+1)(u)(u-1)(u-2)}{4!}\Big[\Delta^4 f(-2)+\Delta^5 f(-2)\Big]+\ldots\ldots$$

$$=f(0)+\frac{u}{1!}\triangle f(-1)+\frac{(u+1)u}{2!}\triangle^2 f(-1)$$

$$+\frac{(u+1)(u)(u-1)}{3!}\triangle^3 f(2)$$

$$+\left[\frac{(u+1)(u)(u-1)}{3!}+\frac{(u+1)(u)(u-2)}{4!}\right]\triangle^4 f(-2)$$

$$+\ldots\ldots$$

$$=f(0)+\frac{u}{1!}\triangle f(-1)+\frac{(u+1)u}{2!}\triangle^2 f(-1)$$

$$+\frac{(u+1)(u)(u-1)}{3!}\triangle^3 f(-2)$$

$$+\frac{(u+2)(u+1)(u)(u-1)}{4!}\triangle^4 f(-2)+\ldots\ldots$$

$$=f(0)+(u)_1\triangle f(-1)+(u+1)_2\triangle^2 f(-1)$$

$$+(u+1)_3\triangle^3 f(-2)+(u+2)_4\triangle^4 f(-2)+\ldots\ldots$$

இதுதான் நியூட்டன்-காஸ் பின்முக வாய்பாடாகும். இவ்வாய்பாட்டில், மைய வேறுபாட்டுப் பட்டியலின் மையக் கோட்டிலுள்ள இரட்டைநிலை வேறுபாடுகளும், மையக் கோட்டிற்கு மேலேயுள்ள ஒற்றைநிலை வேறுபாடுகளும் மட்டுமே இடம் பெறுகின்றன. ஆகவே, இவ் வாய்பாட்டின் மூலம் மையக் கோட்டிற்கும் அதற்கு மேல் வரிசைக்குமிடைப்பட்ட x இன் மதிப்புக்களுக்குரிய f(x) இன் மதிப்புக்களைப் பெறலாம்.

மாதிரி 90

நியூட்டன்-காஸ் பின்முக வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி 45—50 வயதுத் தொகுப்புக்குட்பட்ட சாவுகளின் எண்ணிக்கையைக் கீழ்க் காணும் பட்டியலிலிருந்து மதிப்பிடுக.

வயது தொகுப்பு	சாவுகளின் எண்ணிக்கை
25—35	13229
35—45	18139
45—55	24225
55—65	31496

(சென்னை '66 செப்.)

வயதுத் தொகுப்புக்களின் நடு மதிப்புக்களை x இன் மதிப்புக்களாகக் கொள்க. ஆகவே, கீழ்க்கண்ட பட்டியல் கிடைக்கின்றது.

x :	30	40	50	60
f(x) :	13229	18139	24225	31496

45—50 வயதுத் தொகுப்புக்குரிய x இன் மதிப்பு = 47·5. பின்முக வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்துவதால் 47·5க்கு அடுத்த அதிகமான x இன் மதிப்பை ஆதியாக எடுத்துக் கொள்க.

அதாவது, $a=50, \ h=10$

$$\therefore \quad u=\frac{x-a}{h}=\frac{x-50}{10}.$$

ஆகவே, கீழ்க்கண்ட வேறுபாட்டுப் பட்டியல் கிடைக்கிறது.

x	u	f(u)	$\triangle f(u)$	$\triangle^2 f(u)$	$\triangle^3 f(u)$
30	—2	13229			
			4910		
40	—1	18139		1176	
			6086		9
50	0	24225		1185	
			7271		
60	1	31496			

இங்கு $\triangle f(-1)=6086, \quad \triangle^2 f(-1)=1185, \quad \triangle^3 f(-2)=9.$

$x=47{\cdot}5$ ஆனுல் $u=\dfrac{47{\cdot}5-50}{10}=-0{\cdot}25.$

நியூட்டன்-காஸ் பின்முக வாய்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

$$f(u)=f(0)+(u)_1 \triangle f(-1)+(u+1)_2 \triangle^2 f(-1) + (u+1)_3 \triangle^3 f(-2)+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=24225+(-0{\cdot}25)(6086)+\frac{(0{\cdot}75)(-0{\cdot}25)}{2!}(1185) + \frac{(0{\cdot}75)(-0{\cdot}25)(-1{\cdot}25)}{3!}(9)$$

$$=24225-1521{\cdot}5-111{\cdot}093+0{\cdot}351$$

$$=22592{\cdot}758.$$

6.4. நியூட்டன்-ஸ்டெர்லிங் வாய்பாடு (Newton-Stirling Formula):

நியூட்டன்-காஸ் முன்வேக, பின்முக வாய்பாடுகளின் கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic Mean)யிலிருந்து நியூட்டன் - ஸ்டெர்லிங் வாய்பாடு பெறப்படுகிறது.

$$f(u)=f(0)+(u)_1 \triangle f(0)+(u)_2 \triangle^2 f(-1)+(u+1)_3 \triangle^3 f(-1) + (u+1)_4 \triangle^4 f(2)+\ldots\ldots\ldots$$

(நியூட்டன்-காஸ் முன்வேக வாய்பாடு)

$$f(u)=f(0)+(u)_1\,\Delta f(-1)+(u+1)_2\,\Delta^2 f(-1)+(u+1)_3\,\Delta^3 f(-2)+(u+2)_4\,\Delta^4 f(-2)+\ldots\ldots$$

(நியூட்டன்-காஸ் பின்முக வாய்பாடு)

இவ்விரண்டையும் கூட்டுக.

$$2f(u)=2f(0)+(u)_1[\Delta f(0)+\Delta f(-1)]+\Delta^2 f(-1)[(u)_2+(u+1)_2]+(u+1)_3[\Delta^3 f(-1)+\Delta^3 f(-2)]+\Delta^4 f(-2)[(u+1)_4+(u+2)_4]+\ldots\ldots$$

$$=2f(0)+\frac{u}{1!}\Big[\Delta f(0)+\Delta f(-1)\Big]+\Delta^2 f(-1)\left[\frac{u(u-1)}{2!}+\frac{(u+1)u}{2!}\right]+\frac{(u+1)u(u-1)}{3!}\Big[\Delta^3 f(-1)+\Delta^3 f(-2)\Big]+\Delta^4 f(-2)\left[\frac{(u+1)u(u-1)(u-2)}{4!}+\frac{(u+2)(u+1)u(u-1)}{4!}\right]+\ldots\ldots$$

$$=2f(0)+\frac{u}{1!}\Big[\Delta f(0)+\Delta f(-1)\Big]+\Delta^2 f(-1)\left[\frac{2u^2}{2!}\right]+\frac{u(u^2-1^2)}{3!}\Big[\Delta^3 f(-1)+\Delta^3 f(-2)\Big]+\Delta^4 f(-2)\left[\frac{u(u-2)(u^2-1^2)+u(u+2)(u^2-1^2)}{4!}\right]+\ldots\ldots$$

$$=2f(0)+\frac{u}{1!}[\Delta f(0)+\Delta f(-1)]+\frac{2u^2}{2!}\Delta^2 f(-1)+\frac{u(u^2-1^2)}{3!}[\Delta^3 f(-1)+\Delta^3 f(-2)]+\frac{2u^2(u^2-1^2)}{4!}\Delta^4 f(-2)+\ldots\ldots$$

$$\therefore\ f(u)=f(0)+\frac{u}{1!}\left[\frac{\Delta f(0)+\Delta f(-1)}{2}\right]+\frac{u^2}{2!}\Delta^2 f(-1)+\frac{u(u^2-1^2)}{3!}\left[\frac{\Delta^3 f(-1)+\Delta^3 f(-2)}{2}\right]+\frac{u^2(u^2-1^2)}{4!}\Delta^4 f(-2)+\ldots\ldots$$

இது நியூட்டன்-ஸ்டெர்லிங் மைய வேறுபாட்டு வாய்பாடு என்று அழைக்கப்படுகிறது. இது ஸ்டெர்லிங் வாய்பாடு என்றும் அழைக்கப் படுவதுண்டு. இவ்வாய்பாட்டில், வேறுபாட்டுப் பட்டியலின் மையக் கோட்டிற்கு மேலேயும் கீழேயும் உள்ள ஒற்றைநிலை வேறுபாடுகளின் கூட்டுச் சராசரிகளும், மையக் கோட்டின் மேலுள்ள இரட்டைநிலை வேறுபாடுகளும் இடம் பெறுகின்றன. ஆகவே, இவ்வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்த வேண்டுமாயின் $u=\frac{x-a}{h}$ இன் மதிப்பு $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ என்ற இடைவெளிக்குள் இருத்தல் அவசியம்.

மாதிரி 91

ஸ்டெர்லிங்-இன் சம இடைவெளி மைய வேறுபாட்டு வாய்பாட்டை நிறுவுக. கீழ்க்கண்ட மதிப்புக்களிலிருந்து u_8 இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	1	6	11	16	21
u_x :	831	723	592	430	392

(சென்னை '68 செப்.)

$x=8$ என்பது $x=6$ஐ நெருங்கியிருப்பதால் 6ஐ ஆதியாகக் கொள்க. ஆகவே, $a=6$, $h=5$.

$\therefore \quad X=\frac{x-a}{h}=\frac{x-6}{5}$ எனக் கொள்க.

$\therefore$ $x=8$ என்றால் $X=\frac{8-6}{5}=0{\cdot}4$ இது $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ இடைவெளிக் குள்ளிருப்பதால் ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம்.

இப்பொழுது, $X=\frac{x-6}{5}$ ஆகையால் $x=6+5X$

$\therefore$ $u_x=u_{6+5X}=U_X$ எனக் கொள்க.

வேறுபாட்டுப் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x	X	U_X	ΔU_X	$\Delta^2 U_X$	$\Delta^3 U_X$	$\Delta^4 U_X$
1	−1	831				
			−108			
6	0	723		−23		
			−131		−8	
11	1	592		−31		163
			−162		155	
16	2	430		124		
			−38			
21	3	392				

இங்கு $U_0 = 723$, $\Delta U_{-1} = 108$, $\Delta U_0 = -131$,

$\Delta^2 U_{-1} = -23$, $\Delta^3 U_{-1} = -8$.

$\Delta^3 U_{-2}$, $\Delta^4 U_{-2}$ முதலியன பட்டியலில் இல்லையாகையால் அவற்றைப் பூச்சியமாகக் கொள்ளலாம். இம்மதிப்புக்களை ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

$$U_X = U_0 + \frac{X}{1!}\left[\frac{\Delta U_0 + \Delta U_{-1}}{2}\right] + \frac{X^2}{2!}\Delta^2 U_{-1}$$

$$+\frac{X(X^2-1)}{3!}\left[\frac{\Delta^3 U_{-1} + \Delta^3 U_{-2}}{2}\right] + \frac{X^2(X^2-1)}{4!}\Delta^4 U_{-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$U_{0\cdot4} = 723 + \frac{(0\cdot4)}{1!}\left[\frac{(-131)+(-108)}{2}\right] + \frac{(0\cdot4)^2}{2!}(-23)$$

$$+\frac{(0\cdot4)(0\cdot16-1)}{3!}\left[\frac{(-8)+0}{2}\right]$$

$$= 723 + (0\cdot4)[-119\cdot5] + (0\cdot08)(23) + \frac{(0\cdot4)(-0\cdot84)}{6}(-4)$$

$$= 723 - 47\cdot80 - 1\cdot84 + 0\cdot224$$

$$= 673\cdot584.$$

பயிற்சி 19

1. கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் $f(0\cdot5)$ஐ மதிப்பிடுக.

x :	—1	0	1	2
f (x) :	10	5	8	10

2. நியூட்டன்-காஸ் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் பட்டியலில் x=25க்குரிய y இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	20	24	28	32
y :	1313	1727	2392	3493

3. கீழ்க்காணும் பட்டியலில் θ என்பது ஒரு பாத்திரத்தில் குளிர்ந்து கொண்டிருக்கும் நீரின் வெப்பத்தை °C-இலும், t என்பது நிமிடங்களையும் குறிக்கின்றன. காஸ்-இன் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $t=2\cdot5$ நிமிடங்களாகயிருக்கும்போது θ-இன் மதிப்பைக் காண்க.

t :	0	1	2	3	4	5
θ :	92·0	85·3	79·5	74·5	70·2	67·0

4. காஸ்-இன் மைய வேறுபாட்டு வாய்பாட்டை நிருபிக்க. கீழ்க்காணும் மதிப்புக்களிலிருந்து $u_{2\cdot5}$ இன் மதிப்பைத் தோராயமாகக் காண்க.

x :	0	1	2	3
u_x :	11	7	6	10

(சென்னை '69 ஏப்.)

5. $u_{21}=18\cdot4708$, $u_{25}=17\cdot8144$, $u_{29}=17\cdot1070$, $u_{33}=16\cdot3432$, $u_{37}=15\cdot5154$ என்றால் u_{30} இன் மதிப்பைப் பெறுக. (சென்னை '65 செப்.)

6. கீழ்க்கண்ட பட்டியலிலிருந்து காஸ்-இன் பின்முக வாய்பாட்டைப் பயன் படுத்தி Sin 45° இன் மதிப்பைக் காண்க.

$\theta°$	Sin $\theta°$
20	0·34202
30	0·50000
40	0·64279
50	0·76604
60	0·86603
70	0·93969
80	0·98481

7. x, $\log_{10} x$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்கள் கீழ்க்காணும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. காஸ்-இன் பின்முக வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $\log_{10} 337\cdot5$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

x	$\log_{10}$ x
310	2·4913617
320	2·5051500
330	2·5185139
340	2·5314789
350	2·5440680
360	2·5563025

8. காஸ்-இன் பின்முக வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து $e^{-1\cdot735}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	1·72	1·73	1·74	1·75	1·76
e^{-x} :	0·1791	0·1773	0·1755	0·1733	0·1720

9. கீழ்க்காணும் வருடப் பிரிமியப் பட்டியலிலிருந்து 25 வயதுக்குரிய வருடப் பிரிமியத்தை ஒரு பொருத்தமான இடைச்செருகல் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி மதிப்பிடுக.

வயது ...	20	24	28	32
பிரிமியம் ...	0·01427	0·01581	0·01772	0·01996

(சென்னை '60 ஏப்.)

10. ஸ்டெர்லிங்-இன் இடைச்செருகல் வாய்பாட்டை நிறுவுக. அதன்மூலம் கீழ்க்கண்ட பட்டியலிலிருந்து f (1·63)இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	1·50	1·60	1·70	1·80	1·90
f (x) :	17·609	20·412	23·045	25·527	27·875

(சென்னை '62 செப்.)

11. கீழ்க்காணும் விவரங்களிலிருந்து 26 வயதுக்குரிய பிரிமியத்தைக் காண்க.

வயது ...	21	25	29	33
வருடப் பிரிமியம் ... (ரூபாயில்)	14·27	15·81	17·72	29·96

(சென்னை '69 செப்.)

12. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களிலிருந்து ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $y_{28\cdot2}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

$y_{26}=0\cdot038462$, $y_{27}=0\cdot037037$, $y_{28}=0\cdot035714$

$y_{29}=0\cdot034483$, $y_{30}=0\cdot033333$

13. ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, கீழ்க்காணும் மதிப்புக்களிலிருந்து $\log_{10}\cosh 0\cdot3655$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

x	$\log_{10}\cosh x$
0·360	0·02755462
0·362	0·02785524
0·364	0·02815738
0·366	0·02846105
0·368	0·02876624
0·370	0·02907295

6.5 நியூட்டன்-பெஸ்ஸல் வாய்பாடு (Newton-Bessel formula)

$\triangle f(0)=f(1)-f(0)$ என்று நாம் அறிவோம்.

அதாவது, $f(0)=f(1)-\triangle f(0)$

$\therefore f(-1)=f(0)-\triangle f(-1)$

இரு பக்கங்களிலும் $\triangle^2$ ஐச் செயல்படுத்த,

$$\triangle^2 f(-1)=\triangle^2 f(0)-\triangle^3 f(-1)$$

இதுபோல், $\triangle^4 f(-2)=\triangle^4 f(-1)-\triangle^5 f(-2), \ldots\ldots\ldots\ldots$

இப்பொழுது நியூட்டன்-காஸ் முற்போக்கு வாய்பாட்டைக் கருதுக.

$$f(u)=f(0)+\frac{u}{1!}\triangle f(0)+\frac{u(u-1)}{2!}\triangle^2 f(-1)$$

$$+\frac{(u+1)u(u-1)}{3!}\triangle^3 f(-1)$$

$$+\frac{(u+1)u(u-1)(u-2)}{4!}\triangle^4 f(-2)+\ldots\ldots\ldots$$

இவ்வாய்பாட்டைக் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$f(u)=\left[\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(0)\right]+\frac{u}{1!}\triangle f(0)$$

$$+\left[\frac{1}{2}\frac{u(u-1)}{2!}+\frac{1}{2}\frac{u(u-1)}{2!}\right]\triangle^2 f(-1)$$

$$+\frac{(u+1)\,u\,(u-1)}{3\,!}\Delta^{3} f(-1)$$

$$+\left[\frac{1}{2}\,\frac{(u+1)\,u\,(u-1)\,(u-2)}{4\,!}+\frac{(u+1)\,u\,(u-1)\,(u-2)}{4\,!}\right]\Delta^{4} f(-2)$$

$$+\dots\dots\dots$$

இதில் மேற்கண்ட மதிப்புக்களைப் பிரதியிடவும்.

$$f(u)=\frac{1}{2} f(0)+\frac{1}{2}\left[f(1)-\Delta f(0)\right]+\frac{u}{1!}\Delta f(0)$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{u\,(u-1)}{2\,!}\Delta^{2} f(-1)$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{u\,(u-1)}{2\,!}\left[\Delta^{2} f(0)-\Delta^{3} f(-1)\right]$$

$$+\frac{(u+1)\,u\,(u-1)}{3\,!}\Delta^{3} f(-1)+\dots\dots\dots\dots$$

$$=\frac{1}{2}\left[f(0)+f(1)\right]+\left(u-\frac{1}{2}\right)\Delta f(0)$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{u\,(u-1)}{2\,!}\left[\Delta^{2} f(0)+\Delta^{2} f(-1)\right]$$

$$+\frac{u\,(u-1)}{2\,!}\left[-\frac{1}{2}+\frac{u+1}{3}\right]\Delta^{3} f(-1)+\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$=\frac{f(0)+f(1)}{2}+\frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)}{1\,!}\Delta f(0)+\frac{u\,(u-1)}{2\,!}\left[\frac{\Delta^{2} f(-1)+\Delta^{2} f(0)}{2}\right]$$

$$+\frac{u\,(u-1)\,(2u-1)}{2\,!\;6}\Delta^{3} f(-1)+\dots\dots\dots\dots\dots$$

அதாவது,

$$f(u)=\frac{f(0)+f(1)}{2}+\frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)}{1\,!}\Delta f(0)$$

$$+\frac{u\,(u-1)}{2\,!}\left[\frac{\Delta^{2} f(-1)+\Delta^{2} f(0)}{2}\right]+\frac{u\,(u-\frac{1}{2})\,(u-1)}{3!}\Delta^{3} f(-1)$$

$$+\frac{(u+1)\,u\,(u-1)\,(u-2)}{4\,!}\left[\frac{\Delta^{4} f(-2)+\Delta^{4} f(-1)}{2}\right]$$

$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

இது நியூட்டன்-பெஸ்ஸல் மைய வேறுபாட்டு இடைச்செருகல் வாய்பாடாகும். இது மையக் கோட்டிற்குக் கீழேயுள்ள ஒற்றைநிலை வேறுபாடுகளையும், மையக் கோட்டின் மேலும் அதன் கீழும் உள்ள இரட்டைநிலை வேறுபாடுகளின் கூட்டுச் சராசரிகளையும் கொண்டு அமைந்துள்ளது. $u=1/2$ ஆனால் நியூட்டன்-பெஸ்ஸல் வாய்பாடு கீழ்க்கண்ட மிகவும் பயன்படத்தக்க அமைப்பைப் பெறுகிறது.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f(0)+f(1)}{2}-\frac{1}{8}\left[\frac{\triangle^2 f(-1)+\triangle^2 f(0)}{2}\right]$$
$$+\frac{3}{128}\left[\frac{\triangle^4 f(-2)+\triangle^4 f(-1)}{2}\right]+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

x-இன் இரண்டு அடுத்தடுத்த மதிப்புக்களுக்கிடையேயுள்ள நடு மதிப்புக்குரிய சார்பலனைக் காண இது மிகவும் பயன்படுகிறது. ஆகவே, இது பெஸ்ஸல்-இன் சிறப்பு வாய்பாடாகக் கருதப் படுகிறது.

மாதிரி 92

கீழேயுள்ள உயிர்ப் பட்டியலின் துணையால் 15 வயதில் வாழ்பவரின் எண்ணிக்கையை மதிப்பிடுக.

வயது (வருடங்களில்) ...	12	14	16	18
வாழ்பவர் எண்ணிக்கை ...	100000	99240	98425	97842

(சென்னை '67 செப்.)

14ஐ ஆதியாகக் கொள்க.

$\therefore a=14,\ h=2.$

$x=15$ ஆனால், $u=\frac{x-a}{h}=\frac{15-14}{2}=\frac{1}{2}$

ஆகவே, பெஸ்ஸல்-இன் சிறப்பு வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம். முதலில் வேறுபாட்டுப் பட்டியலமைக்கவும்.

x	u	f (u)	$\triangle f(u)$	$\triangle^2 f(u)$	$\triangle^3 f(u)$
12	—1	100000			
			—760		
14	0	99240		—55	
			—815		287
16	1	98425		232	
			—583		
18	2	97842			

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f(0)+f(1)}{2}-\frac{1}{8}\left[\frac{\triangle^2 f(-1)+\triangle^2 f(0)}{2}\right]$$

$$+\frac{3}{128}\left[\frac{\triangle^4 f(-2)+\triangle^4 f(-1)}{2}\right]+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\frac{99240+98425}{2}-\frac{1}{8}\left[\frac{-55+232}{2}\right]$$

$$=98832{\cdot}5-11{\cdot}0625$$

$$=98821{\cdot}4375.$$

மாதிரி 93

கீழ்க்கண்ட மதிப்புக்களிலிருந்து தகுந்த இடைச் செருகல் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $x=15$க்குரிய y-இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	10	12	14	16	18	20
y :	51·21	60·24	75·32	96·02	119·78	151·45

(சென்னை '67 ஏப்.)

காண வேண்டிய மதிப்பு இடைவெளியின் நடுவில் இருப்பதால் பெஸ்ஸல்-இன் சிறப்பு வாய்பாடு மிகவும் பொருத்தமானதாகும்.

$x=14$ஐ ஆதியாகக் கொள்க. $\therefore\ a=14,\ h=2.$

$x=15$ ஆனால் $u=\frac{x-a}{h}=\frac{15-14}{2}=\frac{1}{2}$

வேறுபாட்டுப் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x	u	f (u)	△f (u)	$\triangle^2$ f(u)	$\triangle^3$ f(u)	$\triangle^4$ f(u)	$\triangle^5$ f(u)
10	—2	51·21					
			9·03				
12	—1	60·24		6·05			
			15·08		—0·43		
14	0	75·32		5·62		—2·13	
			20·70		—2·56		9·54
16	1	96·02		3·06		7·41	
			23·76		4·85		
18	2	119·78		7·91			
			31·67				
20	3	151·45					

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f(0)+f(1)}{2}-\frac{1}{8}\left[\frac{\Delta^2 f(-1)+\Delta^2 f(0)}{2}\right]$$

$$+\frac{3}{128}\left[\frac{\Delta^4 f(-2)+\Delta^4 f(-1)}{2}\right]-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\frac{75\cdot32+96\cdot02}{2}-\frac{1}{8}\left[\frac{5\cdot62+3\cdot06}{2}\right]+\frac{3}{128}\left[\frac{-2\cdot13+7\cdot41}{2}\right]$$

$$=85\cdot67-0\cdot5425+0\cdot061875$$

$$=85\cdot189375$$

ஆகவே, $x=15$ ஆகயிருக்கும்போது $y=85\cdot189375$.

மாதிரி 94

பெஸ்ஸல்-இன் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ள மதிப்புக்களிலிருந்து u_5 ஐக் காண்க.

x :	0	4	8	12
u_x :	143	158	177	199

(சென்னை 68 ஏப்., 69 செப்.)

$x=4$ ஐ ஆதியாகக் கொள்க.

$\therefore\ a=4, h=4 \quad \therefore\ u=\frac{x-a}{h}=\frac{x-4}{4}$ எனக் கொள்க.

$x=5$ ஆனால், $u=\frac{5-4}{4}=\frac{1}{4}$.

வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்கவும்.

x	U	U_x	ΔU_x	$\Delta^2 U_x$	$\Delta^3 U_x$
0	—1	143			
			15		
4	0	158		4	
			19		—1
3	1	177		3	
			22		
12	2	199			

பெஸ்ஸல்-இன் வாய்பாடு வருமாறு.

$$u_x=\frac{u_0+u_1}{2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\Delta u_0+\frac{x(x-1)}{2!}\left[\frac{\Delta^2 u_{-1}+\Delta^2 u_0}{2}\right]$$

$$+\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)x\left(x-1\right)}{3!}\triangle^3 u_{-1} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$U_{1/4} = \frac{158+177}{2} + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)19 + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\left[\frac{4+3}{2}\right]$$

$$+\frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{3!}(-1).$$

$$= \frac{335}{2} - \frac{19}{4} - \frac{21}{64} - \frac{1}{128}$$

$$= 167{\cdot}5 - 4{\cdot}75 - 0{\cdot}328 - 0{\cdot}0078$$

$$= 162{\cdot}41$$

அதாவது, $u_5 = 162{\cdot}41$.

6.6. லாப்லஸ்-எவரெட் வாய்பாடு (Laplace-Everett formula)

நியூட்டன்-காஸ் முன்வேக வேறுபாட்டைக் கருதுக.

$$f(u) = f(0) + \frac{u}{1!}\triangle f(0) + \frac{u(u-1)}{2!}\triangle^2 f(-1)$$

$$+ \frac{(u+1)u(u-1)}{3!}\triangle^3 f(-1)$$

$$+ \frac{(u+1)u(u-1)(u-2)}{4!}\triangle^4 f(-2)$$

$$+ \frac{(u+2)(u+1)u(u-1)(u-2)}{5!}\triangle^5 f(-2)$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

இவ் வாய்பாட்டில் ஒற்றை நிலை வேறுபாடுகளுக்குப் பதிலாக அவைகளுக்குரிய இரட்டை நிலை வேறுபாடுகளின் தொடர்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு பிரதியிடவும்.

$$\triangle f(0) = f(1) - f(0)$$

$$\therefore \quad \triangle f(-1) = f(0) - f(-1)$$

இரு பக்கங்களிலும் $\triangle^2$ ஐச் செயல்படுத்த,

$$\triangle^3 f(-1) = \triangle^2 f(0) - \triangle^2 f(-1)$$

இதுபோல், $\triangle^5 f(-2) = \triangle^4 f(-1) - \triangle^4 f(-2)$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\therefore\ f(u) = f(0) + \frac{u}{1\,!}\,[\,f(1) - f(0)\,] + \frac{u\,(u-1)}{2\,!}\,\triangle^2 f(-1)$$

$$+ \frac{(u+1)\,u\,(u-1)}{3\,!}\,[\,\triangle^2 f(0) - \triangle^2 f(-1)\,]$$

$$+ \frac{(u+1)\,u\,(u-1)\,(u-2)}{4\,!}\,\triangle^4 f(-2)$$

$$+ \frac{(u+2)\,(u+1)\,u\,(u-1)\,(u-2)}{5\,!}\,[\,\triangle^4 f(-1) - \triangle^4 f(-2)\,]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= f(0)\,[1-u] + u\,f(1) + u\,(u-1)\,\triangle^2 f(-1)\left[\frac{1}{2\,!} - \frac{u+1}{3\,!}\right]$$

$$+ \frac{(u+1)\,u\,(u-1)}{3\,!}\,\triangle^2 f(0)$$

$$+ (u+1)\,u\,(u-1)\,(u-2)\,\triangle^4 f(-2)\left[\frac{1}{4!} - \frac{u+2}{5\,!}\right]$$

$$+ \frac{(u+2)\,(u+1)\,u\,(u-1)\,(u-2)}{5\,!}\,\triangle^4 f(-1) + \ldots\ldots\ldots$$

$$= (1-u)\,f(0) + u\,f(1) + u\,(u-1)\,\triangle^2 f(-1)\left(\frac{-u+2}{3\,!}\right)$$

$$+ \frac{(u+1)\,u\,(u-1)}{3\,!}\,\triangle^2 f(0)$$

$$+ (u+1)\,u\,(u-1)\,(u-2)\,\triangle^4 f(-2)\left(\frac{-u+3}{5\,!}\right)$$

$$+ \frac{(u+2)\,u+1)\,u\,(u-1)\,(u-2)}{5!}\,\triangle^4 f(-1) + \ldots\ldots\ldots$$

$$= (1-u)\,f(0) + u\,f(1) - \frac{u\,(u-1)\,(u-2)}{3\,!}\,\triangle^2 f(-1)$$

$$+ \frac{(u+1)\,u\,(u-1)}{3\,!}\,\triangle^2 f(0)$$

$$- \frac{(u+1)\,u\,(u-1)\,(u-2)\,(u-3)}{5\,!}\,\triangle^4 f(-2)$$

$$+ \frac{(u+2)\,(u+1)\,u\,(u-1)\,(u-2)}{5\,!}\,\triangle^4 f(-1)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

அதாவது,

$$f(u)=(1-u)f(0)+(u)_1 f(1)-(u)_3 \Delta^2 f(-1)+(u+1)_3 \Delta^2 f(0)$$
$$-(u+1)_5 \Delta^4 f(-2)+(u+2)_5 \Delta^4 f(-1)+\ldots\ldots$$

இதுதான் லாப்லஸ்-எவரெட் வாய்பாடாகும். இதில் $1-u=v$ என்று பிரதியிட இவ்வாய்பாடு மிகவும் பயன்படத் தக்க தொரு அமைப்பைப் பெறுகிறது.

$$u=1-v.$$

$$\therefore (u)_3 = \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}$$
$$= \frac{-(v+1)v(v-1)}{3!}$$
$$= -(v+1)_3$$

$$(u+1)_5 = \frac{(u+1)u(u-1)(u-2)(u-3)}{5!}$$
$$= \frac{(2-v)(1-v)(-v)(-v-1)(-v-2)}{5!}$$
$$= \frac{-(v+2)(v+1)v(v-1)(v-2)}{5!}$$
$$= -(v+2)_5$$

ஆகவே லாப்லஸ்-எவரெட் வாய்பாடு கீழ்க்கண்டவாறு மாறுகிறது.

$$f(u) = v f(0)+u f(1)+(v+1)_3 \Delta^2 f(-1)+(u+1)_3 \Delta^2 f(0)$$
$$+(v+2)_5 \Delta^4 f(-2)+(u+2)_5 \Delta^4 f(-1)+\ldots\ldots$$
$$= v f(0)+(v+1)_3 \Delta^2 f(-1)+(v+2)_5 \Delta^4 f(-2)+\ldots\ldots$$
$$+ u f(1)+(u+1)_3 \Delta^2 f(0)+(u+2)_5 \Delta^4 f(-1)+\ldots\ldots$$

அல்லது,

$$f(u)=v f(0)+\frac{v(v^2-1^2)}{3!}\Delta^2 f(-1)$$
$$+\frac{v(v^2-1^2)(v^2-2^2)}{5!}\Delta^4 f(-2)+\ldots\ldots$$
$$+u f(1)+\frac{u(u^2-1^2)}{3!}\Delta^2 f(0)$$
$$+\frac{u(u^2-1^2)(u^2-2^2)}{5!}\Delta^4 f(-1)+\ldots\ldots$$

இவ் வாய்பாடு மையக் கோட்டிலும் அதற்குக் கீழேயுமுள்ள இரட்டை நிலை வேறுபாடுகளைக் கொண்டு அமைந்துள்ளது.

ஆகவே 0க்கும் 1க்குமிடையே u-இன் மதிப்பு இருந்தால் இவ் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்துதல் நலம். $u \leqslant 3/4$, அதாவது $v \geqslant 1/4$ ஆகயிருப்பின் இவ் வாய்பாட்டின் மூலம் மிகச் சரியான இடைச் செருகல் மதிப்பினைப் பெறலாம்.

மாதிரி 95

எவரெட்டின் வாய்பாட்டினைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் f (12) இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	—5	0	5	10	15	20	25
f(x) :	61·0	91·4	113·6	134·2	179·4	238·0	296·2

x = 10 ஐ ஆதியாகக் கொள்க.

$$\therefore \quad a = 10,\ h = 5. \quad \therefore\ u = \frac{x-a}{h} = \frac{x-10}{5}$$

x = 12 ஆனால், $u = \dfrac{12-10}{5} = 0{\cdot}4.$

வேறுபாட்டுப் பட்டியலமைக்கவும்.

x	u	f(u)	$\triangle f(u)$	$\triangle^2 f(u)$	$\triangle^3 f(u)$	$\triangle^4 f(u)$	$\triangle^5 f(u)$	$\triangle^6 f(u)$
—5	—3	61·0						
			30·4					
0	—2	91·4		—8·2				
			22·2		6·6			
5	—1	113·6		—1·6		19·6		
			20·6		26·2		—57·0	
10	0	134·2		24·6		—37·4		91·8
			45·2		—11·2		34·8	
15	1	179·4		13·4		—2·6		
			58·6		—13·8			
20	2	238·0		—0·4				
			58·2					
25	3	296·2						

எவரெட்டின் வாய்பாட்டில் மதிப்புக்களைப் பிரதியிடவும்.

$$f(u) = v\,f(0) + \frac{v\,(v^2-1^2)}{3\,!}\triangle^2 f(-1) + \frac{v\,(v^2-1^2)\,(v^2-2^2)}{5\,!}\triangle^4 f(-2)$$

$$+\frac{v\,(v^2-1^2)\,(v^2-2^2)\,(v^2-3^2)}{7\,!}\triangle^6 f(-3) + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ u f(1) + \frac{u(u^2-1^2)}{3!} \Delta^2 f(0) + \frac{u(u^2-1^2)(u^2-2^2)}{5!} \Delta^4 f(-1)$$

$$+ \frac{u(u^2-1^2)(u^2-2^2)(u^2-3^2)}{7!} \Delta^6 f(-2) + \cdots\cdots$$

இங்கு, $u = 0{\cdot}4 \quad \therefore v = 1 - u = 0{\cdot}6.$

$$\therefore f(0{\cdot}4) = (0{\cdot}6)\ 134{\cdot}2 + \frac{(0{\cdot}6)(-0{\cdot}64)}{6}(24{\cdot}6)$$

$$+ \frac{(0{\cdot}6)(-0{\cdot}64)(-3{\cdot}64)}{120}(-37{\cdot}4)$$

$$+ \frac{(0{\cdot}6)(-0{\cdot}64)(-3{\cdot}64)(-8{\cdot}64)}{5040}(91{\cdot}8) + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ (0{\cdot}4)\ (179{\cdot}4) + \frac{(0{\cdot}4)(-0{\cdot}84)}{6}(13{\cdot}4)$$

$$+ \frac{(0{\cdot}4)(-0{\cdot}84)(-3{\cdot}84)}{120}(-2{\cdot}6) + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= 80{\cdot}52 - 1{\cdot}5744 - 0{\cdot}4356352 - 0{\cdot}2199675$$

$$+ 71{\cdot}76 - 0{\cdot}7504 - 0{\cdot}0279552$$

$$= 149{\cdot}2716421$$

$$\therefore f(12) = 149{\cdot}27.$$

6.7 பொருத்தமான இடைச்செருகல் வாய்பாட்டைத் தெரிவு செய்தல்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் மதிப்புக்களின் துல்லியத் தன்மையைப் பொறுத்துத்தான் ஒரு இடைச்செருகல் வாய்பாட்டின் மூலம் பெறப்படும் மதிப்பின் துல்லியமும் அமைந்திருக்கும். என்றாலும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் மதிப்புக்களில் எந்த இடைச்செருகல் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தினால் கிடைக்கும் மதிப்பு துல்லியமானதாகயிருக்கும் என்பதைக் காண வேண்டும். பட்டியலின் தொடக்க அல்லது இறுதி மதிப்புக்களை நெருங்கிய மதிப்புக்களைப் பெற வேண்டுமாயின், நியூட்டன்-கிரிகோரி முன்வேக அல்லது பின்முக வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்த வேண்டும். பட்டியலின் மையத்தை நெருங்கிய மதிப்புக்களைப் பெற வேண்டுமாயின் மைய வேறுபாட்டு வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்துதல் வேண்டும். மைய வேறுபாட்டு வாய்பாடுகளுள், ஸ்டெர்லிங், பெஸ்ஸல் ஆகிய வாய்பாடுகள் அளிக்கும். துல்லியத்தில் அதிக வித்தியாசம் கிடையாது. இருப்பினும், மைய வேறுபாட்டுப் பட்டியல் இரட்டைநிலை வேறுபாட்டுடன் முடிந்தால் ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டையும், ஒற்றைநிலை வேறுபாட்டுடன் முடிந்தால் பெஸ்ஸல்

வாய்பாட்டையும் பயன்படுத்துதல் நலம். லாப்லஸ்-எவரெட் வாய்பாட்டிலுள்ள உறுப்புக்களின் மதிப்புக்கள் மிகவும் வேகமாகக் குறைந்துகொண்டே செல்லுவதால் இவ்வாய்பாடு பிற வாய்பாடுகளை விடப் பொருத்தமானதாக அமைகிறது. பொதுவாக $u=1/2$ ஆனால் பெஸ்ஸல்-இன் வாய்பாடு மிகவும் பொருத்தமானதாகும். $u=3/4$ என்றால் லாப்லஸ்-எவரெட் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்துதல் நன்று. $-1/2 < u < 1/2$ என்றால் ஸ்டெர்லிங் வாய்பாடு பொருத்தமானதாக யிருப்பினும் $-1/4 < u < 1/4$ என்றால் மட்டுமே ஸ்டெர்லிங் வாய்பாடு மிகவும் துல்லிய மதிப்பினைத் தரும்.

பயிற்சி 20

1. பெஸ்ஸல் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி f (25) இன் மதிப்பைப் பெறுக.

x:	20	24	28	32
f(x):	14·27	15·81	17·72	19·96

2. கீழ்க்காணும் விவரங்களிலிருந்து பெஸ்ஸல் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $e^{-0\cdot35}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

x	e^{-x}
0·1	0·90484
0·2	0·81873
0·3	0·74082
0·4	0·67032
0·5	0·60653

3. கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து f (38·75) இன் மதிப்பைக் காண்க.

x:	25	30	35	40	45
f(x):	25	32	40	47	55

4. நியூட்டன்–பெஸ்ஸல் இடைச்செருகல் வாய்பாட்டை நிறுவுக. இவ் வாய்பாட்டினைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் மதிப்புக்களிலிருந்து log 3375 இன் மதிப்பைக் காண்க.

x	log x
310	2·49137
320	2·50515
330	2·51851
340	2·53148
350	2·54407
360	2·55630

(சென்னை '64 ஏப்.)

5 கீழ்க்காணும் பட்டியலில் d என்பது வட்டத்தின் விட்டத்தையும் a என்பது வட்டத்தின் பரப்பினையும் குறிக்கின்றன.

d:	80	85	90	95	100
a:	5026	5674	6362	7088	7854

விட்டம் 91 ஆனால் பரப்பைக் காண்க.

6. எவரெட்டின் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி u_{48} ஐக் காண்க.

x :	30	35	40	45	50	55	60
u_x :	771	862	1001	1224	1572	2123	2983

7. எவரெட்டின் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி f (3·2) இன் மதிப்பைக் காண்க.

x	f (x)
2·0	16·351433
2·5	15·589162
3·0	14·877475
3·5	14·212403
4·0	13·590376

8. கீழ்க்கண்ட பட்டியலிலிருந்து cos 25° 45′ஐ மதிப்பிடுக.

$\theta°$	cos $\theta°$
22	0·9272
23	0·9205
24	0·9135
25	0·9063
26	0·8988
27	0·8910
28	0·8829

7. எதிர்மார் இடைச்செருகல்

(Inverse Interpolation)

மாறி x-இன் மதிப்புக்களும் அவைகளுக்குரிய சார்பலன்களின் மதிப்புக்களும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், x-இன் ஏதாவது ஒரு இடை மதிப்புக்குரிய f(x) இன் மதிப்பைக் காணப் பயன்படும் பல வாய்பாடுகளைப்பற்றி 4, 5, 6 ஆகிய அத்தியாயங்களில் விரிவாக ஆராய்ந்தோம். இவ்வாய்பாடுகள் யாவும் நேரடி இடைச்செருகல் (direct interpolation) வாய்பாடுகள் ஆகும். இத்தகைய நேரடி இடைச்செருகல் முறைகளுக்கு எதிரான முறைகளைப்பற்றி இங்கு ஆராய்வோம்: அதாவது, f(x) இன் ஏதாவது இரு பட்டியல் மதிப்புக்களுக்கு இடைப்பட்ட மதிப்புக்குரிய x-இன் மதிப்பைக் காண்பது. இது நேரடி இடைச்செருகல் முறைக்கு எதிராக யிருப்பதால் இத்தகைய முறைக்கு "எதிர்மார் இடைச்செருகல்" (Inverse interpolation) என்று பெயர். எதிர்மார் இடைச்செருகல் மதிப்புக்களை வரைபட முறையிலும் காணலாம். ஆனால், வரைபட முறை கொள்கையளவில் எளிதாகயிருப்பினும் செயல் முறையில் மிகவும் கடினமானது. ஏனெனில், f(x) இன் வளைவை மிகச் சரியாக வரைவது மிகவும் கடினம். அப்படிச் சரியாக வரைய முடிந்தாலும் x-இன் மதிப்பை இரண்டு அல்லது மூன்று தசம இடங்களுக்கு மேல் துல்லியமாகக் காண முடியாது. ஆகவே, கீழ்க்கண்ட எதிர்மார் இடைச்செருகல் முறைகள் நடைமுறையில் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகின்றன.

1. இலக்ராஞ்சியின் வாய்பாடு (எதிர்மாறுகப் பயன்படுத்துதல்)
2. அடுத்தடுத்த தோராய முறை
3. மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகளை நீக்கும் முறை
4. தொடரை முன்னுக்குப் பின்னாக மாற்றும் முறை.

7.1 இலக்ராஞ்சியின் எதிர்மார் இடைச்செருகல் வாய்பாடு (Lagrange's formula for Inverse Interpolation)

x-இன் மதிப்புக்கள் சம இடைவெளியில் இருந்தாலும் இல்லாவிட்டாலும், $y = f(x)$ இன் மதிப்புக்கள் பொதுவாக அசம இடைவெளிகளிலேயே யிருக்கும். ஆகவே, இலக்ராஞ்சியின் நேரடி இடைச் செருகல் வாய்பாட்டில் x ஐ y ஆகவும், y ஐ x ஆகவும் மாற்றினுல் இலக்ராஞ்சியின் எதிர்மார் இடைச் செருகல் வாய்பாடு கிடைக்கிறது.

x_0, x_1, x_2, x_3 ஆகிய x இன் மதிப்புக்களுக்குரிய y இன் மதிப்புக் களை y_0, y_1, y_2, y_3 எனக் கொள்க. x இன் ஏதாவது ஒரு இடை மதிப்புக்குரிய y இன் மதிப்பைக் காணப் பயன்படும் இலக்ராஞ்சியின் நேரடி இடைச் செருகல் வாய்பாடு வருமாறு :

$$y = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

இவ் வாய்பாட்டில் x, y ஆகியவற்றை மாற்ற இலக்ராஞ்சியின் எதிர்மார் இடைச் செருகல் வாய்பாடு கிடைக்கிறது. அதாவது,

$$x = x_0 \frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)} + x_1 \frac{(y-y_0)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)} + x_2 \frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)(y_2-y_3)} + x_3 \frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_0)(y_3-y_1)(y_3-y_2)}$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள x, y ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களின் எண்ணிக்கை மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ளதைவிடக் கூடுதலாகவோ அல்லது குறைவாகவோ யிருந்தால் வாய்பாட்டையும் அதற்குத் தக்கவாறு இதே முறையில் எழுதலாம்.

மாதிரி 96

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களிலிருந்து $u_x = 1001$க்குரிய x இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	2	3	5
u_x :	113	286	613

(சென்னை '68 செப்.)

இங்கு $x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 5;$

$y_0 = 113, y_1 = 286, y_2 = 613.$

$y = 1001$க்குரிய x இன் மதிப்பைக் காணவேண்டும்.

$$\therefore \quad x = x_0 \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)} + x_1 \frac{(y-y_0)(y-y_2)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)} + x_2 \frac{(y-y_0)(y-y_1)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)}$$

$$= 2 \cdot \frac{(1001-286)(1001-613)}{(113-286)(113-613)} + 3\frac{(1001-113)(1001-613)}{(286-113)(286-613)} + 5\frac{(1001-113)(1001-286)}{(613-113)(613-286)}$$

$$= 2\frac{(715)(388)}{(-173)(-500)} + 3\frac{(888)(388)}{(173)(-327)} + 5\frac{(888)(715)}{(500)(327)}$$

$$= 6{\cdot}42 - 18{\cdot}27 + 19{\cdot}42 = 7{\cdot}57.$$

ஆகவே, $u_x = 1001$க்குரிய x இன் மதிப்பு $= 7{\cdot}57$.

மாதிரி 97

$u_1 = 0, u_2 = 12, u_3 = 287, u_5 = 612$ ஆனால் u_4 இன் மதிப்பைக் காண்க ; u_1, u_2, u_3, u_4 ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பயன்படுத்தி $u_x = 270$க்குரிய x இன் மதிப்பைக் காண்க.

(சென்னை, '65 செப்.)

முதலில் u_4 இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	1	2	3	5	4
u_x :	0	112	287	612	?

$$u_4 = \frac{(4-2)(4-3)(4-5)}{(1-2)(1-3)(1-5)}(0) + \frac{(4-1)(4-3)(4-5)}{(2-1)(2-3)(2-5)}(112) + \frac{(4-1)(4-2)(4-5)}{(3-1)(3-2)(3-5)}(287) + \frac{(4-1)(4-2)(4-3)}{(5-1)(5-2)(5-3)}(612)$$

$$= 0 + \frac{(3)(1)(-1)}{(1)(-1)(-3)}(112) + \frac{(3)(2)(-1)}{(2)(1)(-2)}(287) + \frac{(3)(2)(1)}{(4)(3)(2)}\,612$$

$$= -112 + 430{\cdot}5 + 153$$

$$= 471{\cdot}5.$$

இனி, $u_x = 270$க்குரிய x இன் மதிப்பைக் காணவேண்டும்.

$y = u_x$:	0	112	287	471·5	270
x :	1	2	3	4	?

$$x = (1)\frac{(270-112)(270-287)(270-471 \cdot 5)}{(0-112)(0-287)(0-471 \cdot 5)}$$

$$+(2)\frac{(270-0)(270-287)(270-471 \cdot 5)}{(112-0)(112-287)(112-471 \cdot 5)}$$

$$+(3)\frac{(270-0)(270-112)(270-471 \cdot 5)}{(287-0)(287-112)(287-471 \cdot 5)}$$

$$+(4)\frac{(270-0)(270-112)(270-287)}{(471 \cdot 5-0)(471 \cdot 5-112)(471 \cdot 5-287)}$$

$$=(1)\frac{(158)(-17)(-201 \cdot 5)}{(-112)(-287)(-471 \cdot 5)}+(2)\frac{(270)(-17)(-201 \cdot 5)}{(112)(-175)(-359 \cdot 5)}$$

$$+(3)\frac{(270)(158)(-201 \cdot 5)}{(287)(175)(-184 \cdot 5)}+(4)\frac{(270)(158)(-17)}{(471 \cdot 5)(359 \cdot 5)(184 \cdot 5)}$$

$$=1(-0 \cdot 035711)+2(0 \cdot 13125)+3(0 \cdot 92747)+4(0 \cdot 023190)$$

$$=-0 \cdot 035711+0 \cdot 26250+2 \cdot 78241+0 \cdot 092760$$

$$=2 \cdot 916439$$

ஆகவே, $u_x = 270$க்குரிய x-இன் மதிப்பு $= 2 \cdot 9$

சார்பலன் f (x) இன் மதிப்புக்கள் ஒரே சீராக ஏறிக்கொண்டோ அல்லது இறங்கிக் கொண்டோ இருந்தால் மட்டுமே இலக்ராஞ்சியின் எதிர்மார் இடைச் செருகல் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்த முடியும். மேலும், இம் முறையில் மதிப்பைக் கணக்கிடுவது மிகவும் கடினமாக யிருப்பதோடு வாய்பாட்டிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் மிகவும் முக்கியமாதலால் ஏதாவது ஒரு உறுப்பை விட்டு விட்டால் கிடைக்கும் மதிப்பு சரியான மதிப்பிலிருந்து அதிக வித்தியாசத்தி லிருக்கும். ஆகவே, f (x) இன் மதிப்புக்கள் அதிகமான தசம இடங் களைக் கொண்டிருந்தாலும், அல்லது கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக் களின் எண்ணிக்கை அதிகமாயிருந்தாலும் இம்முறை பயனற்றதா கிறது. ஆனல் x இன் மதிப்புக்கள் சம இடைவெளியிலிருப்பின் கீழ்க்கண்ட முறையைப் பின்பற்றலாம்.

7.2. அடுத்தடுத்தத் தோராய முறை (Method of Successive approximation)

இம் முறையில், காணவேண்டிய x இன் மதிப்புக்கு அருகிலுள்ள பட்டியல் மதிப்பை ஆதியாகக் கொண்டு வேறுபாட்டுப் பட்டிய லமைக்க வேண்டும். நியூட்டனின் முற்போக்கு இடைச் செருகல்

வாய்பாட்டையோ அல்லது ஏதாவது ஒரு மைய வேறுபாட்டு வாய்பாட்டையோ அடுத்தடுத்துப் பயன்படுத்தி x இன் மதிப்பைத் தோராயமாகக் காணலாம்.

(i) நியூட்டனின் முற்போக்கு வாய்பாட்டைக் கருதுக :

$$f(u)=f(0)+u\,\triangle f(0)+\frac{u(u-1)}{2!}\,\triangle^2 f(0)+\frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\,\triangle^3 f(0)+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

f (u) = k-க்குரிய u-இன் மதிப்பைக் காண வேண்டுமெனக் கொள்வோம். u சிறியதாகையால் f (0) இன் இரண்டாவதும் அதற்கு மேற்பட்ட நிலை வேறுபாடுகளையும் புறக்கணித்தால்,

$$f(u)=f(0)+u\,\triangle f(0)$$

$$\therefore\quad u=\frac{f(u)-f(0)}{\triangle f(0)}=\frac{k-f(0)}{\triangle f(0)}=a_1 \text{ எனக் கொள்க.}$$

a_1 என்பது u இன் முதல் தோராய மதிப்பாகும்.

அடுத்தத் தோராய மதிப்பைக் காண f (0) இன் மூன்றாவதும் அதற்கு மேற்பட்ட நிலை வேறுபாடுகளையும் புறக்கணிக்கவும்

$$\therefore f(u)=f(0)+u\,\triangle f(0)+\tfrac{1}{2}u(u-1)\,\triangle^2 f(0).$$

$$\therefore\quad k=f(u)=f(0)+u[\triangle f(0)+\tfrac{1}{2}(u-1)\,\triangle^2 f(0)]$$

$$\therefore u=\frac{k-f(0)}{\triangle f(0)+\frac{1}{2}(u-1)\,\triangle^2 f(0)}$$

$$=\frac{k-f(0)}{\triangle f(0)+\frac{1}{2}(a_1-1)\,\triangle^2 f(0)}=a_2 \text{ எனக் கொள்க.}$$

இவ்வாறு f (0) இன் நான்காவதும் அதற்கு மேற்பட்ட நிலை வேறுபாடுகளையும் புறக்கணித்தால் இதற்கு அடுத்த தோராய மதிப்பாக

$$a_3=\frac{k-f(0)}{\triangle f(0)+\frac{1}{2}(a_2-1)\,\triangle^2 f(0)+\frac{1}{6}(a_2-1)(a_2-2)\,\triangle^3 f(0)}$$

என்று கிடைக்கும். இவ்வாறு மேலும் மேலும் செய்து துல்லியத்தை நெருங்கிய மதிப்புக் கிடைக்கும்.

மாதிரி 98

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலிலிருந்து f (x) = 13·0க்குரிய x இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	44	45	46	47
f (x) :	13·40	13·16	12·93	12·68

காணவேண்டிய x இன் மதிப்பு 44க்கும் 45க்கும் இடையிலிருப்ப தாகப் பட்டியலிலிருந்து தெரிகிறது.

ஆகவே, 44-ஐ ஆதியாகக் கொள்க.

$$\therefore \quad a=44, \ h=1$$

$$\therefore \quad u=\frac{x-a}{h}=\frac{x-44}{1}$$

கீழ்க்கண்டவாறு வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்கவும்.

x	u	f (u)	$\triangle$f (u)	$\triangle^2$ f (u)	$\triangle^3$ f (u)
44	0	13·40			
			−0·24		
45	1	13·16		0·01	
			−0·23		−0·03
46	2	12·93		−0·02	
			−0·25		
47	3	12·68			

இங்கு, $f(0)=13{\cdot}40$, $\triangle f(0)=-0{\cdot}24$, $\triangle^2 f(0)=0{\cdot}01$,
$\triangle^3 f(0)=-0{\cdot}03$; $k=13{\cdot}0$.

முதல் தோராயமாக, $\triangle^2 f(0)$, $\triangle^3 f(0)$ ஆகியவற்றைப் புறக் கணித்தால்,

$$a_1=\frac{k-f(0)}{\triangle f(0)}=\frac{13{\cdot}0-13{\cdot}40}{-0{\cdot}24}=1{\cdot}6=a_1$$

அடுத்த தோராயமாக,

$$a_2=\frac{k-f(0)}{\triangle f(0)+\frac{1}{2}(a_1-1)\ \triangle^2 f(0)}$$

$$=\frac{13{\cdot}0-13{\cdot}40}{-0{\cdot}24+\frac{1}{2}(1{\cdot}6-1)(0{\cdot}01)}$$

$$=\frac{-0{\cdot}40}{-0{\cdot}24+0{\cdot}003}$$

$$=\frac{-0{\cdot}40}{-0{\cdot}237}$$

$$=1{\cdot}68$$

அடுத்த தோராயமாக,

$$a_3 = \frac{k - f(0)}{\triangle f(0) + \frac{1}{2}(a_2 - 1)\ \triangle^2 f(0) + \frac{1}{6}(a_2 - 1)(a_2 - 1)\ \triangle^3 f(0)}$$

$$= \frac{13.0 - 13.40}{-0.24 + \frac{1}{2}(1.68 - 1)(0.01) + \frac{1}{6}(1.68 - 1)(1.68 - 2)(-0.03)}$$

$$= \frac{-0.40}{-0.24 + 0.0034 + 0.0011}$$

$$= \frac{-0.40}{-0.2355}$$

$$= 1.698$$

$= 1.70$ (இரண்டு தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாக)

அதாவது, $u = 1.70$.

$\therefore\ x = 44 + u = 44 + 1.70 = 45.70.$

அடுத்தடுத்த தோராய மதிப்புக்களைக் காண நியூட்டனின் முன்வேக வாய்பாடு பயன்பட்டபோதிலும், மைய வேறுபாட்டு வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்திக் கிடைக்கும் அடுத்தடுத்த தோராய மதிப்புக்களாகிய $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ என்பன மிக விரைவாகத் துல்லிய மதிப்பினை நெருங்குவதால், ஏதாவது ஒரு மைய வேறுபாட்டு வாய்பாடே இம்முறைக்குச் சிறந்ததாகக் கருதப்படுகிறது.

(ii) நியூட்டன்-ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டைக் கருதுக.

$$f(u) = f(0) + u\,\frac{\triangle f(-1) + \triangle f(0)}{2} + \frac{u^2}{2}\triangle^2 f(-1)$$

$$+ \frac{u(u^2 - 1)}{6}\ \frac{\triangle^3 f(-2) + \triangle^3 f(-1)}{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

வலப்பக்கத்தைச் சுருக்கிக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$f(u) = f(0) + Au + Bu^2 + Cu^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$f(u) = k$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்,

$$k = f(0) + Au + Bu^2 + Cu^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$f(0)$ இன் இரண்டாவதும் அதற்கு மேற்பட்ட நிலை வேறுபாடுகளையும் புறக்கணித்தால்,

$k = f(0) + Au$ என்று கிடைக்கும்.

ஆகவே, u-இன் முதல் தோராய மதிப்பு $= \dfrac{k - f(0)}{A} = a_1$ ஆகும்.

அடுத்து, $f(0)$ இன் மூன்றாவதும் அதற்கு மேற்பட்ட நிலை வேறுபாடுகளையும் புறக்கணித்தால்,

$k = f(0) + Au + Bu^2$ என்று கிடைக்கிறது.

$$\therefore\ k-f(0)=u\,(A+Bu)$$

$u=a_1$ என்று அடைப்புக்குள் பிரதியிட,

$$k-f(0)=u\,(A+Ba_1)$$

$$\therefore\ u=\frac{k-f(0)}{A+B\,a_1}=a_2 \text{ எனக் கொள்க.}$$

ஆகவே, u-இன் இரண்டாவது தோராய மதிப்பு $= a_2 = \dfrac{k-f(0)}{A+Ba_1}$

இவ்வாறு, இதற்கு அடுத்த தோராய மதிப்பு $a_3 = \dfrac{k-f(0)}{A+Ba_2+Ca_2^2}$

என்று காணலாம். இதுபோன்று தொடர்ந்து செய்து வந்தால் துல்லியத்தை நெருங்கிய u-இன் மதிப்பைப் பெறலாம். —1/4க்கும் 1/4 க்குமிடையேயுள்ள u-இன் மதிப்பைக் காண நியூட்டன் - ஸ்டெர்லிங் வாய்பாடு பயன்படுகிறது. ஆனால் 1/4 க்கும் 3/4 க்குமிடையேயுள்ள u-இன் மதிப்பைக் காண பெஸ்ஸல் வாய்பாடு சிறந்ததாகும்.

மாதிரி 99

கீழ்க்காணும் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி y=18600க்குரிய x-இன் மதிப்பினைக் காண்க.

x :	52	53	54	55	56
y :	19231	18868	18519	18182	17855

நாம் காண வேண்டிய x-இன் மதிப்பு 53க்கும் 54க்குமிடையில் இருக்கும் என்பது பட்டியலிலிருந்து தெளிவாகிறது. ஆகவே, x=54ஐ ஆதியாகக் கொள்வோம்.

அதாவது, $a=54,\ h=1$

$$\therefore\ u=\frac{x-a}{h}=\frac{x-54}{1}$$

கீழ்க்கண்டவாறு வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைகிறது.

x	u	f (u)	$\triangle f(u)$	$\triangle^2 f(u)$	$\triangle^3 f(u)$	$\triangle^4 f(u)$
52	—2	19231				
			—363			
53	—1	18868		14		
			—349		—2	
54	0	18519		12		0
			—337		—2	
55	1	18182		10		
			—327			
56	2	17855				

முதல் தோராயமாக, நியூட்டனின் முன்வேக வாய்பாட்டிலிருந்து,

$$f(u)=f(0)+u\,\Delta f(0)$$
$$18600=18519+u(-337)$$
$$\therefore\ u=\frac{18600-18519}{-337}=-0{\cdot}24$$

இது $-1/4$ க்கும் $1/4$ க்குமிடையேயிருப்பதால், ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$f(u)=f(0)+u\left[\frac{\Delta f(-1)+\Delta f(0)}{2}\right]+\frac{u^2}{2}\Delta^2 f(-1)$$
$$+\frac{u(u^2-1)}{6}\left[\frac{\Delta^3 f(-2)+\Delta^3 f(-1)}{2}\right]+\cdots\cdots\cdots$$

இங்கு $f(u)=18600$, $f(0)=18519$.

$$\frac{\Delta f(-1)+\Delta f(0)}{2}=\frac{-349-337}{2}=-343.$$
$$\Delta^2 f(-1)=12.$$
$$\frac{\Delta^3 f(-2)+\Delta^3 f(-1)}{2}=\frac{-2-2}{2}=-2.$$

இம் மதிப்புக்களை ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

$$18600=18519+u(-343)+\frac{u^2}{2}(12)+\frac{u(u^2-1)}{6}(-2)$$
$$=18519-\frac{1028}{3}u+6u^2-\frac{1}{3}u^3$$

$=f(0)+Au+Bu^2+Cu^3$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\ k=18600,\ f(0)=18519,$$
$$A=-\frac{1028}{3},\ B=6,\ C=-\frac{1}{3}$$

முதல் தோராயமாக, $a_1=\dfrac{k-f(0)}{A}=\dfrac{18600-18519}{-1028/3}$

$$=-0{\cdot}23.$$

அடுத்த தோராயமாக, $a_2=\dfrac{k-f(0)}{A+Ba_1}$

$$=\frac{18600-18519}{\frac{-1028}{3}+6(-0{\cdot}28)}$$
$$=-0{\cdot}236.$$

மூன்றுவது தோராயமாக, $a_3=\dfrac{k-f(0)}{A+Ba_2+Ca_2^2}$

$$=\frac{18600-18519}{\frac{-1028}{3}+6(-0\cdot236)+(-\frac{1}{3})(-0\cdot236)^2}$$

$$=-0\cdot2354.$$

ஆகவே, $\dfrac{x-54}{1}=-0\cdot2354.$

$$\therefore\ x=54-0\cdot2354$$
$$=53\cdot7646.$$

மாதிரி 100

எதிர்மார் இடைச்செருகல் மூலம் $x^3+x^2+x-100$ இன் நேர் மூலத்தைக் காண்க. (சென்னை '62 செப்)

$f(x)=x^3+x^2+x-100$ எனக் கொள்க.

$$f(4)=64+16+4-100<0$$
$$f(5)=125+25+5-100>0.$$

ஆகவே, $f(x)=0$ இன் நேர் மூலம் 4க்கும் 5க்கும் இடையேயுள்ளது.

எனவே, $x=4\cdot0, 4\cdot1, 4\cdot2, 4\cdot3, 4\cdot4,$......ஆகிய மதிப்புக்களுக்குரிய $f(x)$ இன் மதிப்புக்களடங்கிய பட்டியலை அமைக்கவும்.

x:	4·0	4·1	4·2	4·3	4·4
f(x):	−16	−10·169	−4·072	2·297	8·944

பட்டியலிலிருந்து $f(x)=0$ இன் நேர் மூலம் 4·2க்கும் 4·3க்குமிடையேயிருப்பதாக அறிகிறோம். ஆகவே, $x=4\cdot2$-ஐ ஆதியாகக் கொண்டு $u=\dfrac{x-4\cdot2}{0\cdot1}$ என்று எழுதி வேறுபாட்டுப் பட்டியலமைக்கவும்.

x	u	f(u)	△ f(u)	△² f(u)	△³ f(u)	△⁴ f(u)
4·0	−2	−16				
			5·831			
4·1	−1	−10·169		0·266		
			6·097		0·006	
4·2	0	−4·072		0·272		0
			6·369		0·006	
4·3	1	2·297		0·278		
			6·647			
4·4	2	8·944				

நியூட்டனின் வாய்பாட்டின் மூலம், u இன் முதல் தோராய மதிப்பு $f(u) = f(0) + u\triangle f(0)$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து காணப் படுகிறது.

அதாவது, $0 = -4{\cdot}072 + u\,(6{\cdot}097)$

$$\therefore \quad u = \frac{4{\cdot}072}{6{\cdot}097} = 0{\cdot}6$$

இம் மதிப்பு 3/4 ஐ விடக் குறைவாகயிருப்பதால், பெஸ்ஸல் வாய் பாட்டைப் பயன்படுத்தவும்.

$$f(u) = \tfrac{1}{2}\,[\,f(0) + f(1)\,] + (u-\tfrac{1}{2})\,\triangle f(0)$$
$$+ \frac{u\,(u-1)}{2\,!}\left[\triangle^2 f(0) + \triangle^2 f(-1)\right] + \frac{(u-\frac{1}{2})\,u\,(u-1)}{3\,!}\,\triangle^3 f(-1)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 = \tfrac{1}{2}\,[\,-4{\cdot}072 + 2{\cdot}297\,] + (u-\tfrac{1}{2})\,(6{\cdot}369)$$
$$+ \frac{u\,(u-1)}{2}\left[\frac{0{\cdot}272 + 0{\cdot}278}{2}\right] + \frac{(u-\frac{1}{2})\,u\,(u-1)}{6}\,(0{\cdot}006)$$
$$= -0{\cdot}8875 + 6{\cdot}369\,(u-\tfrac{1}{2}) + 0{\cdot}1375\,u\,(u-1)$$
$$+ 0{\cdot}001\,(u^3 - 1{\cdot}5\,u^2 + 0{\cdot}5\,u)$$
$$= -0{\cdot}8875 + 6{\cdot}369\,u - 3{\cdot}1845 + 0{\cdot}1375\,u^2 - 0{\cdot}1375\,u$$
$$+ 0{\cdot}001\,u^3 - 0{\cdot}0015\,u^2 + 0{\cdot}0005\,u$$
$$= -4{\cdot}0720 + 6{\cdot}2320\,u + 0{\cdot}1360\,u^2 + 0{\cdot}001\,u^3.$$

முதல் தோராயமாக,

$$0 = -4{\cdot}0720 + 6{\cdot}2320\,u.$$

$$\therefore \quad u = \frac{4{\cdot}0720}{6{\cdot}2320} = 0{\cdot}65 = a_1.$$

அடுத்த தோராயமாக,

$$0 = -4{\cdot}0720 + u\,[\,6{\cdot}2320 + 0{\cdot}1360\,u\,]$$

அடைப்புக்குள் $u = a_1 = 0{\cdot}65$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore \quad 0 = -4{\cdot}0720 + u\,[\,6{\cdot}2320 + 0{\cdot}1360\,(0{\cdot}65)\,]$$
$$= -4{\cdot}0720 + 6{\cdot}3204\,u$$

$$\therefore \quad u = \frac{4{\cdot}0720}{6{\cdot}3204} = 0{\cdot}644 = a_2.$$

மூன்றுவது தோராயமாக,

$$0 = 4{\cdot}0720 + u\,[\,6{\cdot}2320 + 0{\cdot}1360\,u + 0{\cdot}001\,u^2\,]$$

அடைப்புக்குள் $u = a_2 = 0{\cdot}644$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore\quad 0 = -4{\cdot}0720 + u\,[6{\cdot}2320 + 0{\cdot}1360\,(0{\cdot}644) + 0{\cdot}001\,(0{\cdot}644)^2]$$
$$= -4{\cdot}0720 + u[6{\cdot}2320 + 0{\cdot}08758 + 0{\cdot}00041]$$
$$= -4{\cdot}0720 + 6{\cdot}31999\,u$$

$$\therefore\quad u = \frac{4{\cdot}0720}{6{\cdot}31999} = 0{\cdot}6443.$$

$$\therefore\quad \frac{x - 4{\cdot}2}{0{\cdot}1} = 0{\cdot}6443$$

$$\therefore\quad x = 4{\cdot}2 + 0{\cdot}06443$$
$$= 4{\cdot}26443.$$

7.3 மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகளை நீக்கும் முறை (Method of elimination of third differences)

மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் ஏறத்தாழ சமமாகவிருப்பின், அவற்றை மாறிலியாக வைத்துக் கொண்டு, நான்காவதும் அதற்கு மேற்பட்ட நிலை வேறுபாடுகளையும் புறக்கணித்துவிடலாம். நியூட்டனின் முன்வேக வாய்பாட்டையோ அல்லது ஒரு பொருத்தமான மைய வேறுபாட்டு வாய்பாட்டையோ பயன்படுத்தி u-இல் ஒரு முப்படிச் சமன்பாட்டைப் பெறலாம். அதன்பின் u^3 உறுப்பினைக் கீழ்க்கண்டவாறு நீக்கினுல் ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு கிடைக்கும். இவ்வாறு கிடைக்கப் பெற்ற இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து u இன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

$$f(u) = f(0) + u\,\Delta f(0) + \frac{u\,(u-1)}{2!}\,\Delta^2 f(0) + \frac{u\,(u-1)\,(u-2)}{3!}\,\Delta^3 f(0) + \ldots\ldots\ldots$$

மேலும், $f(u) = E^{u-1} f(1) = (1+\Delta)^{u-1} f(1)$

$$= \left[1 + (u-1)\,\Delta + \frac{(u-1)\,(u-2)}{2!}\,\Delta^2 + \frac{(u-1)\,(u-2)\,(u-3)}{3!}\,\Delta^3 + \ldots\ldots\right] f(1)$$

அதாவது,

$$f(u) = f(1) + (u-1)\,\Delta f(1) + \frac{(u-1)\,(u-2)}{2!}\,\Delta^2 f(1) + \frac{(u-1)\,(u-2)\,(u-3)}{3!}\,\Delta^3 f(1) + \ldots\ldots\ldots$$

மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் ஏறக்குறைய சமமாகயிருப்பதால், அதற்கு மேற்பட்ட நிலை வேறுபாடுகளைப் புறக்கணித்தபின், கீழ்க் கண்ட சமன்பாடுகளைப் பெறுகிறோம்.

$$f(u)=f(0)+u\triangle f(0)+\frac{u(u-1)}{2!}\triangle^2 f(0)+\frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\triangle^3 f(0). \qquad (1)$$

$$f(u)=f(1)+(u-1)\triangle f(1)+\frac{(u-1)(u-2)}{2!}\triangle^2 f(1)+\frac{(u-1)(u-2)(u-3)}{3!}\triangle^3 f(1) \qquad (2)$$

இப்பொழுது $u=a$ ஐ u இன் தோராய மதிப்பெனக் கொள்க.

சமன்பாடு (2) ஐ a ஆல் பெருக்குக :

$$a\,f(u)=a\,f(1)+a(u-1)\triangle f(1)+\tfrac{1}{2}a(u-1)(u-2)\triangle^2 f(1)+\tfrac{1}{6}a(u-1)(u-2)(u-3)\triangle^3 f(1)$$

சமன்பாடு (1) ஐ (a−3) ஆல் பெருக்கவும்.

$$(a-3)f(u)=(a-3)f(0)+(a-3)u\triangle f(0)+\tfrac{1}{2}(a-3)u(u-1)\triangle^2 f(0)+\tfrac{1}{6}(a-3)u(u-1)(u-2)\triangle^3 f(0).$$

கழிக்கவும்.

$$3f(u)=a\,f(1)-(a-3)f(0)+a(u-1)\triangle f(1)-(a-3)u\triangle f(0)+\tfrac{1}{2}(u-1)[a(u-2)\triangle^2 f(1)-u(a-3)\triangle^2 f(0)]+\tfrac{1}{6}(u-1)(u-2)[a(u-3)\triangle^3 f(1)-u(a-3)\triangle^3 f(0)]$$

இப்பொழுது, $u=a$ ஆகயிருப்பதாலும், $\triangle^3 f(1)$, $\triangle^3 f(0)$ ஆகியவை ஏறக்குறைய சமமாகயிருப்பதாலும் கடைசி உறுப்பு மறைந்து விடுகிறது. ஆகவே u இல் ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இச் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து u இன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

மாதிரி 101

$x^3-4x+2=0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் 1க்கும் 2க்கும் இடையேயுள்ளது. ஏதாவது ஒரு எதிர்மார் இடைச் செருகல் முறையைப் பயன்படுத்தி அம் மூலத்தின் மதிப்பை மூன்று தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

(சென்னை' 70 ஏப்.)

$f(x)=x^3-4x+2$ எனக் கொள்க.

$f(1{\cdot}6)=-0{\cdot}304,\quad f(1{\cdot}7)=0{\cdot}113,$

ஆகவே, $f(x)=0$ இன் ஒரு மூலம் 1·6க்கும் 1·7க்குமிடையேயுள்ளது. கீழ்க்கண்டவாறு ஒரு பட்டியலை அமைக்கவும்.

x	f(x)
1·4	−0·856
1·5	−0·625
1·6	−0·304
1·7	0·113
1·8	0·632
1·9	1·259.

$f(x)=0$க்குரிய x இன் மதிப்பு 1·7 ஐ நெருங்கியிருப்பதால் 1·7 ஐ ஆதியாகக் கொள்ளவும். $\therefore\ a=1{\cdot}7,\ h=0{\cdot}1$

$$\therefore\ u=\frac{x-a}{h}=\frac{x-1{\cdot}7}{0{\cdot}1}\ .$$

கீழ்க்கண்ட வேறுபாட்டுப் பட்டியலை அமைக்கவும்.

x	u	f(u)	$\triangle f(u)$	$\triangle^2 f(u)$	$\triangle^3 f(u)$	$\triangle^4 f(u)$
1·4	−3	−0·856				
			0·231			
1·5	−2	−0·625		0·090		
			0·321		0·006	
1·6	−1	−0·304		0·096		0
			0·417		0·006	
1·7	0	0·113		0·102		0
			0·519		0·006	
1·8	1	0·632		0·108		
			0·627			
1·9	2	1·259				

நியூட்டனின் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி u இன் முதல் தோராய மதிப்பைக் காண்க.

$$f(u)=f(0)+u\ \triangle f(0)$$

$$0=0{\cdot}113+u\ (0{\cdot}519)$$

$$\therefore\ u=-\frac{0{\cdot}113}{0{\cdot}519}=-\ 0{\cdot}21=a$$ எனக் கொள்க.

$u=-0{\cdot}21$ என்பது $-1/4$க்கும் $1/4$க்குமிடையே யிருப்பதால் ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$f(u)=f(0)+u\left[\frac{\triangle f(0)+\triangle f(-1)}{2}\right]+\frac{u^2}{2}\triangle^2 f(-1)$$

$$+\frac{(u+1)u(u-1)}{6}\left[\frac{\triangle^3 f(-2)+\triangle^3 f(-1)}{2}\right] \quad \ldots \quad (1)$$

ஆதியை 0 இலிருந்து 1க்கு மாற்றினால்,

$$f(u) = f(1)+(u-1)\left[\frac{\triangle f(1)+\triangle f(0)}{2}\right]+\frac{(u-1)^2}{2}\triangle^2 f(0)$$

$$+\frac{u(u-1)(u-2)}{6}\left[\frac{\triangle^3 f(-1)+\triangle^3 f(0)}{2}\right] \quad \ldots \quad (2)$$

(2) ஐ a ஆல் பெருக்கி, அதிலிருந்து (1) ஐ (a—2) ஆல் பெருக்கி வந்ததைக் கழிக்க, கடைசி உறுப்புக்களின் மொத்தம் பூச்சிய மாகிறது.

$$\therefore \quad 2f(u) = a f(1) - (a-2) f(0)$$

$$+a(u-1)\left[\frac{\triangle f(1)+\triangle f(0)}{2}\right]-(a-2)u\left[\frac{\triangle f(0)+\triangle f(-1)}{2}\right]$$

$$+\frac{a(u-1)^2}{2}\triangle^2 f(0)-(a-2)\frac{u^2}{2}\triangle^2 f(-1)$$

இப்பொழுது மதிப்புக்களைப் பிரதியிடவும்.

$$0=(-0{\cdot}21)(0{\cdot}632)-(-2{\cdot}21)(0{\cdot}113)$$

$$+(-0{\cdot}21)(u-1)\left[\frac{0{\cdot}627+0{\cdot}519}{2}\right]-(-2{\cdot}21)u\left[\frac{0{\cdot}519+0{\cdot}417}{2}\right]$$

$$+(-0{\cdot}21)\frac{(u-1)^2}{2}(0{\cdot}108)-(-2{\cdot}21)\frac{u^2}{2}(0{\cdot}102)$$

$$=(-0{\cdot}21)(0{\cdot}632)+(2{\cdot}21)(0{\cdot}113)$$
$$-(u-1)(0{\cdot}21)(0{\cdot}573)+u(2{\cdot}21)(0{\cdot}468)$$
$$-(u-1)^2(0{\cdot}21)(0{\cdot}054)+u^2(2{\cdot}21)(0{\cdot}051)$$
$$=-0{\cdot}13272+0{\cdot}24973-0{\cdot}12033(u-1)$$
$$+1{\cdot}03428u-0{\cdot}01134(u^2-2u+1)+0{\cdot}11271u^2$$

அதாவது,

$$0{\cdot}10137u^2+0{\cdot}93663u+0{\cdot}22600=0.$$

$$\therefore \quad u=\frac{-0{\cdot}93663 \pm \sqrt{(0{\cdot}93663)^2-4(0{\cdot}10137)(0{\cdot}22600)}}{2(0{\cdot}10137)}$$

$$=\frac{-0{\cdot}93663 \pm \sqrt{0{\cdot}7855}}{0{\cdot}20274}$$

$$= \frac{-0{\cdot}93663 \pm 0{\cdot}88818}{0{\cdot}20274}$$ (நேர் அடையாளத்தைக் கொள்க)

$$= \frac{-0{\cdot}04845}{0{\cdot}20274}$$

$$= -\,0{\cdot}239$$

ஆகவே, $\frac{x-1{\cdot}7}{0{\cdot}1} = -0{\cdot}239$

$$\therefore \quad x = 1{\cdot}7 - 0{\cdot}0239$$
$$= 1{\cdot}6761$$

ஆகவே, மூன்று தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாக $f(x) = 0$ இன் நேர் மூலம் $= 1{\cdot}676$.

7.4 தொடரை முன்னுக்குப் பின்னாக மாற்றும் முறை (Method of reversal of series)

எந்த இடைச் செருகல் வாய்பாட்டையும் u இல் ஒரு அடுக்குத் தொடராக (Power Series) எழுதலாம். ஆகவே,

$f(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \ldots\ldots\ldots$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \frac{f(u) - a_0}{a_1} = u + \frac{a^2}{a_1} u^2 + \frac{a^3}{a_1} u^3 + \ldots\ldots\ldots$$

இப்பொழுது, $\frac{f(u - a_0)}{a_1} = v$, $\frac{a^2}{a_1} = b_2$, $\frac{a^3}{a_1} = b_3, \ldots$ என்று எழுதுக.

$$\therefore \quad v = u + b_2 u^2 + b_3 u^3 + \ldots\ldots\ldots$$

f (u) இன் மூன்ரும் நிலைக்கு மேற்பட்ட நிலை வேறுபாடுகளைப் புறக் கணித்தால்,

$v = u + b_2 u^2 + b_3 u^3$. என்று கிடைக்கும்.

இச் சமன்பாட்டைத் திருப்பிக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$u = c_0 + c_1 v + c_2 v^2 + c_3 v^3 + \ldots\ldots\ldots$$

அதாவது,

$$u = c_0 + c_1 (u + b_2 u^2 + b_3 u^3) + c_2 (u + b_2 u^2 + b_3 u^3)^2 + c_3 (u + b_2 u^2 + b_3 u^3)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

இரு பக்கங்களிலும் ஒத்த குணகங்களை ஒப்பிடவும்.

$$\therefore \; c_0 = 0,\; c_1 = 1,\; c_1 b_2 + c_2 = 0 \quad \therefore \; c_2 = -c_1 b_2 = -b_2 = -\frac{a_2}{a_1}$$

$$c_1 b_3 + 2 c_2 b_2 + c_3 = 0 \quad \therefore \; c_3 = -c_1 b_3 - 2 c_2 b_2$$
$$= -b_3 - 2\left(-\frac{a_2}{a_1}\right)\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

அதாவது; $c_3 = -\frac{a_3}{a_1} + \frac{2a_2^2}{a_1^2} = \left(\frac{2a_2^2}{a_1^2} - \frac{a_3}{a_1}\right)$

$$\therefore \quad u = v - \frac{a_2}{a_1} v^2 + \left(\frac{2a_2^2}{a_1^2} - \frac{a_3}{a_1}\right) v^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

இத் தொடரிலிருந்து u இன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

மாதிரி 102

கீழ்க்கண்ட மதிப்புக்களிலிருந்து f (x) = 2க்குரிய x இன் மதிப்பினைக் காண்க.

x	f(x)	
4·80	0·7511	
4·81	1·3617	
4·82	1·9785	
4·83	2·6015	
4·84	3·2307	(சென்னை '69 செப்.)

பட்டியலிலிருந்து f (x) = 2க்குரிய x இன் மதிப்பு 4·82க்கும் 4·83க்குமிடையிலிருக்கு மென்பதை அறிகிறோம். மேலும், f (x) = 2 என்பது 1·9785 ஐ நெருங்கியிருப்பதால் அதற்குரிய x இன் மதிப்பாகிய 4·82 ஐ ஆதியாகக் கொள்க.

$$\therefore \quad a = 4{\cdot}82 ; \quad h = 0{\cdot}01$$

$\therefore \quad u = \frac{x-a}{h} = \frac{x - 4{\cdot}82}{0{\cdot}01}$ என்று மாற்றி வேறுபாட்டுப் பட்டியலமைக்கவும் :

x	u	f (u)	$\triangle$ f (u)	$\triangle^2$ f (u)	$\triangle^3$ f (u)
4·80	−2	0·7511			
			0·6106		
4·81	−1	1·3617		0·0062	
			0·6168		0
4·82	0	1·9785		0·0062	
			0·6230		0
4·83	1	2·6015		0·0062	
			0·6292		
4·84	2	3·2307			

நியூட்டனின் முன்வேக வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி u இன் முதல் தோராய மதிப்பைக் காண்க.

$$f(u) = f(0) + u \triangle f(0)$$

$$2 = 1{\cdot}9785 + u\,(0{\cdot}6230)$$

$$\therefore\ u = \frac{2 - 1{\cdot}9785}{0{\cdot}6230} = 0{\cdot}03.$$

இது $-1/4$க்கும் $1/4$க்குமிடையே யிருப்பதால் ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தவும்.

$$f(u) = f(0) + u\left[\frac{\triangle f(0) + \triangle f(-1)}{2}\right] + \frac{u^2}{2}\triangle^2 f(-1) + \ldots\ldots$$

$$2 = 1{\cdot}9785 + u\left[\frac{0{\cdot}6230 + 0{\cdot}6168}{2}\right] + \frac{u^2}{2}\,(0{\cdot}0062)$$

$$= 1{\cdot}9785 + 0{\cdot}6199\,u + 0{\cdot}0031\,u^2$$

ஆகவே, $f(u) = 2,\ a_0 = 1{\cdot}9785,\ a_1 = 0{\cdot}6199,\ a_2 = 0{\cdot}0031,\ a_3 = 0.$

$$v = \frac{f(u) - a_0}{a_1} = \frac{2 - 1{\cdot}9785}{0{\cdot}6199} = \frac{0{\cdot}0215}{0{\cdot}6199} = 0{\cdot}03468.$$

$$c_2 = -\frac{a_2}{a_1} = -\frac{0{\cdot}0031}{0{\cdot}6199} = -0{\cdot}00500$$

$$c_3 = \frac{2a_2^2}{a_1^2} - \frac{a_3}{a_1} = \frac{2\,(0{\cdot}0031)^2}{(0{\cdot}6199)^2} - 0 = 0{\cdot}00005$$

$$\therefore\ u = v + c_2 v^2 + c_3 v^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= (0{\cdot}03468) - 0{\cdot}00500\,(0{\cdot}03468)^2 + (0{\cdot}00005)\,(0{\cdot}03468)^3$$

$$= 0{\cdot}03468 - 0{\cdot}000006 + 0{\cdot}000000$$

$$= 0{\cdot}034674$$

அதாவது, $\dfrac{x - 4{\cdot}82}{0{\cdot}01} = 0{\cdot}034674$

$$\therefore\ x = 4{\cdot}82 + 0{\cdot}00034674 = 4{\cdot}82034674.$$

அதாவது, $x = 4{\cdot}8203$ (நான்கு தசம இடங்களுக்கு).

பயிற்சி 21

1. இலக்ராஞ்சியின் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் மதிப்புக்களிலிருந்து $f(x) = 0$ மூலத்தைக் காண்க.

$$f(30) = -30,\ f(34) = -13,\ f(38) = 3,\ f(42) = 18.$$

2. கீழ்க்காணும் பட்டியல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதிலிருந்து $f(x) = 0$க்குரிய x-இன் மதிப்பினைக் காண்க.

x :	0	1	2	3
f (x) :	217	140	23	−6

3. $f(0)=16 \cdot 35$, $f(5)=14 \cdot 88$, $f(10)=13 \cdot 59$, $f(15)=12 \cdot 46$ என்றால் $f(x)=14 \cdot 00$க்குரிய x-இன் மதிப்பென்ன?

4. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலைப் பயன்படுத்தி $f(x)=18 \cdot 6$க்குரிய x-இன் மதிப்பினைக் காண்க.

x :	52	53	54	55	56
f(x) :	19·2	18·9	18·5	18·2	17·9

5. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலில் h என்பது கடல் மட்டத்திற்கு மேலுள்ள உயரத்தையும், p என்பது பாரமானியின் அழுத்தத்தையும் குறிக்கின்றன.

h :	0	2753	4763	6942	10593
p :	30	27	25	23	20

பாரமானியின் அழுத்தம் 29க்கும் 32க்குமுரிய உயரங்களைக் காண்க.

(சென்னை '61 செப்.)

6. எதிர்மார் இடைச்செருகல் என்றால் என்ன? $x^3+x-5=0$ இன் மெய் மூலத்தை இரண்டு தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

(சென்னை '65 ஏப்.)

7. $y=x^3+x-3$ இன் வரைபடத்தை வரைக. $y=0$ இன் மெய் மூலத்தை எதிர்மார் இடைச்செருகல் மூலம் காண்க.

(சென்னை '61 ஏப்., '64 ஏப்., '67 செப்.)

8. $x^3-2x-5=0$ இன் ஒரு மூலம் 2க்கும் 3க்குமிடையேயுள்ளது. எதிர்மார் இடைச்செருகல் மூலம் அம்மூலத்தைக் காண்க.

9. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து $x=10 \log_{10}x$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

x :	1·35	1·36	1·37	1·38
$\log_{10}x$:	0·1303	0·1335	0·1367	3·1399

(சென்னை '67 ஏப்.)

10. அடுத்தடுத்த தோராய முறைப்படி $2x-\log_{10}x=7$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

11. கீழ்க்காணும் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி $\sin\theta=0 \cdot 75$க்குரிய θ இன் மதிப்பினைப் பெறுக.

θ	$\sin\theta$
47°	0·73135
48°	0·74314
49°	0·75471
50°	0·76604
51°	0·77715

12. கீழ்க்காணும் பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து $f(x)=1/2$க்குரிய x-இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	0·45	0·46	0·47	0·48	0·49	0·50
f(x) :	0·475	0·484	0·493	0·502	0·511	0·520

13. $3x^3+2x-3=0$ இன் மெய் மூலத்தை எதிர்மார் இடைச்செருகல் மூலம் நான்கு தசம இடங்களுக்குக் காண்க. (சென்னை '59 செப்.)

14. எதிர்மார் இடைச்செருகல் முறையைப் பயன்படுத்தி $x^3-3x-7=0$ இன் நேர் மெய் மூலத்தை ஆறு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

(சென்னை '59 ஏப்.)

15. $x^3-15x+4=0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் 0·25ஐ நெருங்கியிருப்பதாகத் தெரிகிறது. ஒரு பொருத்தமான இடைச்செருகல் முறையைப் பின்பற்றி அம்மூலத்தைக் காண்க.

16. $x^3+2x-20=0$ இன் ஒரு மூலம் 2·4க்கும் 2·5க்கும் இடையேயுள்ளது. ஏதாவது ஒரு எதிர்மார் இடைச்செருகல் முறையைப் பயன்படுத்தி அம்மூலத்தின் மதிப்பை நான்கு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

8. இருமாறி இடைச்செருகல்
(Bivariate Interpolation)

8.1 இருமாறிச் சார்புகள் (Functions of two variables)

x, y ஆகியவற்றைச் சாராமாறிகளாகக் (independent variables) கொண்ட ஒரு சார்பு u_{xy} அல்லது f (x, y) அல்லது $u_{x:y}$ அல்லது f (x:y) என்று குறிக்கப்படுகிறது.

உதாரணம் : $u_{x:y} \equiv x^2+2xy+y^2+x+2y$

$$f(x:y) \equiv x^3-3axy+y^3+2x^2+y^2-x+y.$$

$u_{x:y}$ என்ற இருமாறிச் சார்பில் x, y ஆகிய இருமாறிகளும் ஒரே நேரத்தில் மாற வேண்டுமென்பதில்லை. x மாறுமலிருக்கும்போது y மாறலாம்; y மாறுமலிருக்கும்போது x மாறலாம்; அல்லது இரண்டுமே மாறலாம்.

$u_{x:y}$ என்ற ஒரு இருமாறிச் சார்பினைக் கருதுக. x-இன் மதிப்புக்கள் x, x+h, x+2h, ... என்றும், y-இன் மதிப்புக்கள் y, y+k, y+2k, ... என்றும் சம இடைவெளிகளில் மாறுவதாகக் கொள்வோம். x, y ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களுக்கேற்ப $u_{x:y}$ என்ற சார்பின் மதிப்புக்களும் கீழ்க்கண்டவாறு மாறும்.

$u_{x:y}$	$u_{x+h:y}$	$u_{x+2h:y}$	$u_{x+3h:y}$	...
$u_{x:y+k}$	$u_{x+h:y+k}$	$u_{x+2h:y+k}$	$u_{x+3h:y+k}$	...
$u_{x:y+2k}$	$u_{x+h:y+2k}$	$u_{x+2h:y+2k}$	$u_{x+3h:y+2k}$	...
$u_{x:y+3k}$	$u_{x+h:y+3k}$	$u_{x+2h:y+3k}$	$u_{x+3h:y+3k}$	...
...	...	...	...	
...	...	...	...	

இப்பொழுது x=0, y=0ஐ ஆதியாகவும், h=1, k=1 என்று x, y ஆகியவற்றின் சம இடைவெளிகளை 1 அலகு என்றும் எடுத்துக்

கொள்வோமேயானுல் மேற்கண்ட சார்பலன்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$u_{0:0}$	$u_{1:0}$	$u_{2:0}$	$u_{3:0}$	...	...
$u_{0:1}$	$u_{1:1}$	$u_{2:1}$	$u_{3:1}$	...	...
$u_{0:2}$	$u_{1:2}$	$u_{2:2}$	$u_{3:2}$	...	...
$u_{0:3}$	$u_{1:3}$	$u_{2:3}$	$u_{3:3}$	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

பொதுவாக, h, k என்பன x, y ஆகியவற்றின் சம இடைவெளிகளாக யிருந்தால், $x=a$, $y=b$ ஐ ஆதியாகவும் சம இடைவெளிகள் h, k ஆகியவற்றை x, y ஆகியவற்றின் 1 அலகு இடைவெளியென்றும் கொண்டு x, y ஆகிய மாறிகளை X, Y ஆகிய மாறிகளாக $X=\frac{x-a}{h}$, $Y=\frac{y-b}{k}$ என்ற தொடர்புகளின் மூலம் மாற்றிக் கொள்ளலாம்.

இப்பொழுது, y-இன் மதிப்பு மாருமலிருக்கும்போது x-இன் மதிப்பு 1 அலகு மாறுவதாகக் கொள்வோம். இவ்வாறு மாறுவதால் $u_{x:y}$ என்ற சார்பலன் $u_{x+1:y}$ என்று மாறும். இவ்வாறு $u_{x:y}$ என்ற சார்பலன் x-இன் மதிப்பை மட்டும் 1 அலகு இடைவெளியில் மாற்றுவதை E_x என்ற செயலியால் குறிக்கலாம்.

அதாவது, $E_x\, u_{x:y}=u_{x+1:y}$
$E_x\, u_{0:0}=u_{1:0}$
$E_x\, u_{5:4}=u_{6:4}$

இதுபோல், E_y என்ற செயலியானது, x-இன் மதிப்பு மாருமலிருக்கும் போது y-இன் மதிப்பு 1 அலகு மாறுவதைக் குறிக்கப் பயன்படுகிறது.

அதாவது, $E_y\, u_{0:0}=u_{0:1}$
$E_y\, u_{2:3}=u_{2:4}$
$E_y\, u_{x:y}=u_{x:y+1}$

மேலும், ஒரு மாறி இடைச்செருகலில் $\triangle$ என்ற செயலி வேறு பாட்டைக் குறிக்கப் பயன்பட்டது போலவே $\triangle_x$ என்ற செயலி y-ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு x-இன் அடுத்தடுத்த இரு மதிப்புக்களுக் குரிய $u_{x:y}$ இன் இரு சார்பலன்களின் வேறுபாட்டைக் குறிக்கப் பயன்படுகிறது.

அதாவது, $\triangle_x\, u_{0:0}=u_{1:0}-u_{0:0}$
$\triangle_x\, u_{3:4}=u_{4:4}-u_{3:4}$
$\triangle_x\, u_{x:y}=u_{x+1:y}-u_{x:y}$

இதுபோல் Δ_y என்ற செயலி, x-ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு y-இன் அடுத்தடுத்த இரு மதிப்புக்களுக்குரிய $u_{x:y}$ இன் இரண்டு சார்பலன்களின் வேறுபாட்டைக் குறிக்கப் பயன்படுகிறது.

அதாவது,
$$\Delta_y u_{0:0} = u_{0:1} - u_{0:0}$$
$$\Delta_y u_{7:10} = u_{7:11} - u_{7:10}$$
$$\Delta_y u_{x:y} = u_{x:y+1} - u_{x:y}$$

மேலும்,
$$\begin{aligned}
\Delta_x \Delta_y u_{0:0} &= \Delta_x (\Delta_y u_{0:0}) \\
&= \Delta_x (u_{0:1} - u_{0:0}) \\
&= \Delta_x u_{0:1} - \Delta_x u_{0:0} \\
&= (u_{1:1} - u_{0:1}) - (u_{1:0} - u_{0:0}) \\
&= u_{1:1} - u_{0:1} - u_{1:0} + u_{0:0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_y \Delta_x u_{0:0} &= \Delta_y (\Delta_x u_{0:0}) \\
&= \Delta_y (u_{1:0} - u_{0:0}) \\
&= \Delta_y u_{1:0} - \Delta_y u_{0:0} \\
&= (u_{1:1} - u_{1:0}) - (u_{0:1} - u_{0:0}) \\
&= u_{1:1} - u_{1:0} - u_{0:1} + u_{0:0} \\
&= \Delta_x \Delta_y u_{0:0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^2_x \Delta_y u_{0:0} &= \Delta^2_x (\Delta_y u_{0:0}) \\
&= \Delta^2_x (u_{0:1} - u_{0:0}) \\
&= \Delta^2_x u_{0:1} - \Delta^2_x u_{0:0} \\
&= \Delta_x (\Delta_x u_{0:1}) - \Delta_x (\Delta_x u_{0:0}) \\
&= \Delta_x (u_{1:1} - u_{0:1}) - \Delta_x (u_{1:0} - u_{0:0}) \\
&= \Delta_x u_{1:1} - \Delta_x u_{0:1} - \Delta_x u_{1:0} + \Delta_x u_{0:0} \\
&= (u_{2:1} - u_{1:1}) (u_{1:1} - u_{0:1}) - (u_{2:0} - u_{1:0}) + (u_{1:0} - u_{0:0}) \\
&= u_{2:1} - u_{1:1} - u_{1:1} + u_{0:1} - u_{2:0} + u_{1:0} + u_{1:0} - u_{0:0} \\
&= (u_{2:1} - 2\, u_{1:1} + u_{0:1}) - (u_{2:0} - 2\, u_{1:0} + u_{0:0})
\end{aligned}$$

பொதுவாக,

$$\overset{m}{E_x}\, u_{0:0} = u_{0+m:0} = u_{m:0}$$
$$\overset{n}{E_y}\, u_{0:0} = u_{0:0+n} = u_{0:n}$$
$$\overset{m}{E_x}\, \overset{n}{E_y}\, u_{0:0} = u_{0+m:0+n} = u_{m:n}$$

ஆனால், $E_x = 1 + \triangle_x$, $E_y = 1 + \triangle_y$

$$\therefore \quad u_{m:n} = (1+\triangle_x)^m (1+\triangle_y)^n u_{0:0}$$

$$= \left[1 + m\triangle x + \frac{m(m-1)}{\lfloor 2} \triangle^2{}_x + \dots\dots\dots\right]$$

$$\left[1 + n\triangle_y + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} \triangle^2{}_y + \dots\dots\dots\right] u_{0:0}$$

$$= \left[1 + (m)_1 \triangle_x + (m)_2 \triangle^2{}_x + \dots\dots\dots\right]$$

$$\left[1 + (n)_1 \triangle_y + (n)_2 \triangle^2{}_y + \dots\dots\dots\right] u_{0:0}$$

$$= \Big[1 + (m)_1 \triangle_x + (m)_2 \triangle^2{}_x + \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ (n)_1 \triangle_y + (m)_1 (n)_1 \triangle_x \triangle_y + (m)_2 (n)_1 \triangle^2{}_x \triangle_y + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ (n)_2 \triangle^2{}_y + (m)_1 (n)_2 \triangle_x \triangle^2{}_y + \dots\dots\dots$$

$$+ (n)_3 \triangle^3{}_y + \dots\dots\dots\Big] u_{0:0}$$

அதாவது,

$$u_{m:n} = u_{0:0} + [(m)_1 \triangle_x + (n)_1 \triangle_y] u_{0:0}$$
$$+ [(m)_2 \triangle^2{}_x + (m)_1 (n)_1 \triangle_x \triangle_y + (n)_2 \triangle^2{}_y] u_{0:0}$$
$$+ [(m)_3 \triangle^3{}_x + (m)_2 (n)_1 \triangle^2{}_x \triangle_y + (m)_1 (n)_2 \triangle_x \triangle^2{}_y + (n)_3 \triangle^3{}_y] u_{0:0}$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

இதுவே இருமாறி இடைச் செருகலுக்கான பொது வாய்பாடாகும். x-இல் r-ஆம் நிலை வேறுபாடு வரையிலும், y-இல் r-க்கு மேற்படாத நிலை வேறுபாடுகளும் இடைச் செருகல் மதிப்புக் காணத் தேவைப் பட்டால் $\triangle_x^{r+1}$ u-வும் x-இல் அதற்கு மேற்பட்ட நிலை வேறுபாடுகளும் அடங்கிய உறுப்புக்களைப் புறக்கணித்து விடலாம்.

மாதிரி 103

கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் $u_{x:y}$ இன் சில மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றிலிருந்து $u_{23:17}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

x	y=15	y=20	y=25
20	5·947	4·418	3·547
25	6·046	4·530	
30	6·144		

இங்கு x, y ஆகியவற்றின் வேறுபாட்டு இடைவெளி 5 ஆகும்.

அதாவது, $h=5,\ k=5.$

இப்பொழுது $x=20,\ y=15$ ஐ ஆதியாகக் கொண்டு வேறுபாட்டு இடைவெளியை 1 அலகு என மாற்றுக.

$\therefore\ a=20,\ b=15.$

ஆகவே, y என்ற மாறிகள் X, Y என்ற மாறிகளாகக் கீழ்க்காணும் தொடர்புகளின் மூலம் மாற்றப்படுகின்றன.

$$X=\frac{x-a}{h}=\frac{x-20}{5},$$

$$Y=\frac{y-b}{k}=\frac{y-15}{15}.$$

ஆகவே, $x=23,\ y=17$ ஆகயிருக்கும்போது,

$$X=\frac{23-20}{5}=\frac{3}{5}=0{\cdot}6$$

$$Y=\frac{17-15}{5}=\frac{2}{5}=0{\cdot}4$$

ஆகவே, x, $u_{23:17}$ என்று $U_{\cdot 6:\cdot 4}$ என்று மாறுகிறது. புதிய மாறிகளாகிய X, Y ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களடங்கிய அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

X	Y=0	Y=1	Y=2
0	$u_{0:0}=5{\cdot}947$	$u_{0:1}=4{\cdot}418$	$u_{0:2}=3{\cdot}547$
1	$u_{1:0}=6{\cdot}046$	$u_{1:1}=4{\cdot}530$	
2	$u_{2:0}=6{\cdot}144$		

கீழ்க்கண்டவாறு X-இன் வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்கலாம்.

$$\begin{array}{lll} u_{0:0}=5{\cdot}947 & & \\ & \Delta_X u_{0:0}=0{\cdot}099 & \\ u_{1:0}=6{\cdot}046 & & \Delta^2_X u_{0:0}=-0{\cdot}001 \\ & \Delta_X u_{1:0}=0{\cdot}098 & \\ u_{2:0}=6{\cdot}144 & & \end{array}$$

இதுபோல், Y இன் வேறுபாட்டுப்பட்டியல் வருமாறு:

$$\begin{array}{lll} u_{0:0}=5{\cdot}947 & & \\ & \Delta_Y U_{0:0}=-1{\cdot}529 & \\ u_{0:1}=4{\cdot}418 & & \Delta^2_Y U_{0:0}=0{\cdot}658 \\ & \Delta_Y U_{0:1}=-0{\cdot}871 & \\ u_{0:2}=3{\cdot}547 & & \end{array}$$

இப்பொழுது, $\Delta_X \Delta_Y U_{0:0} = U_{1:1} - U_{0:1} - U_{1:0} + U_{0:0}$

$$= 4{\cdot}530 - 4{\cdot}418 - 6{\cdot}046 + 5{\cdot}947$$

$$= 10{\cdot}477 - 10{\cdot}464$$

$$= 0{\cdot}013$$

$$\therefore\ U_{\cdot 6:\cdot 4} = \left[1 + (\cdot 6)_1 \Delta_X + (\cdot 6)_2 \Delta^2_X + \ldots\ldots\ldots\right]$$

$$\left[1 + (\cdot 4)_1 \Delta_Y + (\cdot 4)_2 \Delta^2_Y + \ldots\ldots\ldots\right] U_{0:0}$$

$$= \left[1 + \cdot 6 \Delta_x + \frac{(\cdot 6)(-\cdot 4)}{1{\cdot}2} \Delta^2_X + \ldots\ldots\ldots\right]$$

$$\left[1 + \cdot 4\ \Delta_Y + \frac{(\cdot 4)(-\cdot 6)}{1{\cdot}2} \Delta^2_Y + \ldots\ldots\ldots\right] U_{0:0}$$

$$= \left[1 + \cdot 6\ \Delta_X - \cdot 12\ \Delta^2_X + \ldots\ldots\ldots\right]$$

$$\left[1 + \cdot 4\ \Delta_Y - \cdot 12\ \Delta^2_Y + \ldots\ldots\ldots\right] U_{0:0}$$

$$= \Big[1 + \cdot 6\ \Delta_X - \cdot 12\ \Delta^2_X + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \cdot 4\ \Delta_Y + \cdot 24\ \Delta_X \Delta_Y + \ldots\ldots\ldots$$

$$- \cdot 12\ \Delta^2_Y - \ldots\ldots\ldots\Big] U_{0:0}$$

$$= U_{0:0} + \cdot 6\ \Delta_x U_{0:0} - \cdot 12\ \Delta^2_X U_{0:0} + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \cdot 4\ \Delta_Y U_{0:0} + \cdot 24\ \Delta_X \Delta_Y U_{0:0} + \ldots\ldots\ldots$$

$$- \cdot 12\ \Delta^2_Y U_{0:0} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 5{\cdot}947 + \cdot 6\ (\cdot 099) - \cdot 12\ (-0{\cdot}001) + \cdot 4\ (-1{\cdot}529)$$

$$+ \cdot 24\ (\cdot 013) - \cdot 12\ (\cdot 658) - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 5{\cdot}947 + 0{\cdot}0594 + 0{\cdot}00012 - 0{\cdot}6116 + 0{\cdot}00312 - 0{\cdot}07896$$

$$= 6{\cdot}00964 - 0{\cdot}69056$$

$$= 5{\cdot}31908.$$

மாதிரி 104

கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் சூரியனின் கோணவேற்றம் (a—altitude), நடுவரை விலக்கம் (δ—declination) ஆகியவற்றின் சில மதிப்புக்களும், அவற்றிற்குரிய நேரக்கோணம் (hour angle) h-இன் மதிப்புக்களும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றிலிருந்து

$\delta=12°$, $a=16°$ ஆகியவற்றிற்குரிய நேரக்கோணம் h-இன் மதிப்பை இடைச் செருகல் மூலம் காண்க.

	a=10° h	m	s	a=14° h	m	s	a=18° h	m	s	a=22° h	m	s
$\delta=20°$	6	11	26	5	50	17	5	29	27	5	8	48
15°	5	55	41	5	35	5	5	14	39	4	54	17
10°	5	40	16	5	19	56	4	59	37	4	39	17
5°	5	24	50	5	4	30	4	44	4	4	23	29
0°	5	9	5	4	48	29	4	27	39	4	6	28

δ ஐ மாறி x எனவும், a-ஐ மாறி y எனவும் h ஐ $u_{x:y}$ எனவும் கொள்க. $x=0°$, $y=10°$ ஐ ஆதியாகக் கொள்க.

$$\therefore \quad a=0, \ b=10$$

h=x இன் இடைவெளி=5°

k=y இன் இடைவெளி=4°.

$$\therefore \ X=\frac{x-a}{h}=\frac{x-0}{5°},$$

$$Y=\frac{y-b}{k}=\frac{y-10°}{10°}$$

என்ற தொடர்புகளின் மூலம் x, y-ஐ X, Y ஆக மாற்றுக. மாற்றப் பட்ட அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

	Y=0 h	m	s	Y=1 h	m	s	Y=2 h	m	s	Y=3 h	m	s
X=0	5	9	5	4	48	29	4	27	39	4	6	28
1	5	24	50	5	4	30	4	44	4	4	23	29
2	5	40	16	5	19	56	4	59	37	4	39	17
3	5	55	41	5	35	5	5	14	39	4	54	17
4	6	11	26	5	50	17	5	29	27	5	8	48

$\delta=12°$, $a=16°$ ஆகயிருக்கும்போது, $x=12°$, $y=16°$.

$$\therefore \ X=\frac{12°-0°}{5°}=2{\cdot}4$$

$$Y=\frac{16°-10°}{4°}=1{\cdot}5$$

$\therefore$ $U_{2\cdot4\,:\,1\cdot5}$ இன் மதிப்பைக் காண வேண்டும்.

X-இன் வேறுபாட்டுப் பட்டியல் வருமாறு :

$U_{0:0}=5\ 9\ 5$			
	$\Delta_X U_{0:0}=0\ 15\ 45$		
$U_{1:0}=5\ 24\ 50$		$\Delta_X U_{0:0}=-0\ 0\ 19$	
	$\Delta_X U_{1:0}=0\ 15\ 26$		$\Delta^3_X U_{0:0}=0\ 0\ 18$
$U_{2:0}=5\ 40\ 16$		$\Delta_X U_{1:0}=-0\ 0\ 1$	
	$\Delta_X U_{2:0}=0\ 15\ 25$		$\Delta^3_X U_{1:0}=0\ 0\ 21$
$U_{3:0}=5\ 55\ 41$		$\Delta_X U_{2:0}=\ 0\ 0\ 20$	
	$\Delta_X U_{3:0}=0\ 15\ 45$		
$U_{4:0}=6\ 11\ 26$			

Y-இன் வேறுபாட்டுப் பட்டியல் வருமாறு :

$U_{0:0}=5\ 9\ 5$			
	$\Delta_Y U_{0:0}=-0\ 20\ 36$		
$U_{0:1}=4\ 48\ 29$		$\Delta^2_Y U_{0:0}=-0\ 0\ 14$	
	$\Delta_Y U_{0:1}=-0\ 20\ 50$		$\Delta^3_Y U_{0:0}=-0\ 0\ 7$
$U_{0:2}=4\ 27\ 39$		$\Delta^2_Y U_{0:1}=-0\ 0\ 21$	
	$\Delta_Y U_{0:2}=-0\ 21\ 11$		
$U_{0:3}=4\ 6\ 28$			

$$\begin{aligned}\Delta_X\ \Delta_Y\ U_{0:0} &= U_{1:1}-U_{0:1}-U_{1:0}+U_{0:0}\\ &=(5\ 4\ 30)-(4\ 48\ 29)-(5\ 24\ 50)+(5\ 9\ 5)\\ &=(10\ 13\ 35)-(10\ 13\ 19)\\ &=0\ 0\ 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^2_X\ \Delta_Y\ U_{0:0} &= (U_{2:1}-2\,U_{1:1}+U_{0:1})-(U_{2:0}-2\,U_{1:0}+U_{0:0})\\ &=[(5\ 19\ 56)-2\,(5\ 4\ 30)+(4\ 48\ 29)]\\ &\qquad -[(5\ 40\ 16)-2\,(5\ 24\ 50)+(5\ 9\ 5)]\end{aligned}$$

$$=[(10\ 8\ 25)-(10\ 9\ 0)]-[(10\ 49\ 21)-(10\ 49\ 40)]$$
$$=-(0\ 0\ 35)+(0\ 0\ 19)$$
$$=-(0\ 0\ 16)$$

$$\Delta_X\ \Delta^2_Y\ U_{0:0}=(U_{1:2}-2\ U_{1:1}+U_{1:0})-(U_{0:2}-2\ U_{0:1}+U_{0:0})$$
$$=[(4\ 44\ 4)-2\ (5\ 4\ 30)+(5\ 24\ 50)]$$
$$-[(4\ 27\ 39)-2\ (4\ 48\ 29)+(5\ 9\ 5)]$$
$$=[(10\ 8\ 54)-(10\ 9\ 0)]-[(9\ 36\ 44)-(9\ 36\ 58)]$$
$$=-(0\ 0\ 6)+(0\ 0\ 14)$$
$$=(0\ 0\ 8)$$

$$\therefore\ U_{2\cdot 4\,:\,1\cdot 5}=[1+(2\cdot 4)_1\ \Delta_X+(2\cdot 4)_2\ \Delta^2_X+(2\cdot 4)_3\ \Delta^3_X+\ldots\ldots]\times$$
$$[1+(1\cdot 5)_1\ \Delta_Y+(1\cdot 5)_2\ \Delta^2_Y+(1\cdot 5)_3\ \Delta^3_Y+\ldots]\ U_{0:0}$$

$$=[1+2\cdot 4\ \Delta_X+\frac{(2\cdot 4)\ (1\cdot 4)}{2}\Delta^2_X+$$
$$\frac{(2\cdot 4)\ (1\cdot 4)\ (\cdot 4)}{6}\Delta^3_X+\ldots\ldots]\times$$

$$[1+1\cdot 5\ \Delta_Y+\frac{(1\cdot 5)\ (\cdot 5)}{2}\Delta^2_Y+$$
$$\frac{(1\cdot 5)\ (\cdot 5)\ (-\cdot 5)}{6}\Delta^3_Y+\ldots\ldots]\ U_{0:0}$$

$$=[1+2\cdot 4\ \Delta_X+1\cdot 68\ \Delta^2_X+0\cdot 224\ \Delta^3_X+\ldots\ldots]\times$$
$$[1+1\cdot 5\ \Delta_Y+0\cdot 375\ \Delta^2_Y-0\cdot 0625\ \Delta^3_Y+\ldots]\ U_{0:0}$$

$$=[1+2\cdot 4\ \Delta_X+1\cdot 68\ \Delta^2_X+0\cdot 224\ \Delta^3_X+\ldots\ldots$$
$$+1\cdot 5\ \Delta_Y+3\cdot 6\ \Delta_X\ \Delta_Y+2\cdot 52\ \Delta^2_X\ \Delta_Y+\ldots\ldots$$
$$+0\cdot 375\ \Delta^2_Y+0\cdot 9\ \Delta_X\ \Delta^2_Y-0\cdot 0625\ \Delta^3_Y+\ldots\ldots]\ U_{0:0}$$

$$=U_{0:0}+2\cdot 4\ \Delta_X\ U_{0:0}+1\cdot 68\ \Delta^2_X\ U_{0:0}$$
$$+0\cdot 224\ \Delta^3_X\ U_{0:0}$$
$$+1\cdot 5\ \Delta_Y\ U_{0:0}+3\cdot 6\ \Delta_X\ \Delta_Y\ U_{0:0}$$
$$+2\cdot 52\ \Delta^2_X\ \Delta_Y\ U_{0:0}$$
$$+0\cdot 375\ \Delta^2_Y\ U_{0:0}+0\cdot 9\ \Delta_X\ \Delta^2_Y\ U_{0:0}$$
$$-0\cdot 625\ \Delta^3_Y\ U_{0:0}-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=(5\ 9\ 5)+(2\cdot 4)\ (0\ 15\ 45)+(1\cdot 68)\ (-0\ 0\ 19)$$
$$+(0\cdot 224)\ (0\ 0\ 18)+(1\cdot 5)\ (-0\ 20\ 36)$$
$$+(3\cdot 6)\ (0\ 0\ 16)+(2\cdot 52)\ (-0\ 0\ 16)$$
$$+(0\cdot 375)\ (-0\ 0\ 14)+(0\cdot 9)\ (0\ 0\ 8)$$
$$-(0\cdot 0625)\ (-0\ 0\ 7)$$

$$=(5\ 9\ 5)+(0\ 37\ 48)-(0\ 0\ 32)+(0\ 0\ 4)$$
$$-(0\ 30\ 54)+(0\ 0\ 57)-(0\ 0\ 40)$$
$$-(0\ 0\ 5)+(0\ 0\ 7)+(0\ 0\ 0)$$
$$=(5\ 48\ 1)-(0\ 32\ 11)$$
$$=(5\ 15\ 50)$$
$$=5^{h}\ 15^{m}\ 50^{s}$$

8.2 ஒருமாறி இடைச்செருகல் முறையை இருமுறை பயன் படுத்துதல் (Double application of single interpolation)

$U_{x:y}$ என்ற இருமாறிச் சார்பினைக் கருதுக. $x=x_1$, $y=y_1$ என்ற மதிப்புக்களுக்குரிய $U_{x1:y1}$ என்ற மதிப்பினைக் காண வேண்டுமெனக் கொள்வோம். முதலில், மாறி x-க்குச் சாதாரண இடைச்செருகல் முறையைப் பயன்படுத்தி $U_{x_1:y}$ இன் மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டும். பின்னர், மாறி y-க்கு இடைச்செருகல் முறையைப் பயன்படுத்தி $U_{x_1:y_1}$ இன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

மாதிரி 105

கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் சூரியனின் கோண வேற்றம்—a (altitude), நடுவரை விலக்கம்—δ (declination) ஆகியவற்றின் சில மதிப்புக்களும், அவற்றிற்குரிய நேரக் கோணம்—h (hour angle) இன் மதிப்புக்களும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றிலிருந்து $\delta=12°$, $a=16°$ ஆகியவற்றிற்குரிய நேரக் கோணம்—h இன் மதிப்பை இடைச்செருகல் மூலம் காண்க.

	a=10°			a=14°			a=18°			a=22		
	h	m	s	h	m	s	h	m	s	h	m	s
$\delta=20°$	6	11	26	5	50	17	5	29	27	5	8	48
15°	5	55	41	5	35	5	5	14	39	4	54	17
10°	5	40	16	5	19	56	4	59	37	4	39	17
5°	5	24	50	5	4	30	4	44	4	4	23	29
0°	5	9	5	4	48	29	4	27	39	4	6	28

நடுவரை விலக்கம் δ-ஐ x எனவும், கோணவேற்றம் a-ஐ y எனவும் கொள்க. எனவே, $U_{x:y}$ என்பது நடுவரை விலக்கம் x ஆகவும், கோணவேற்றம் y ஆகவும் இருக்கும்போது நேரக் கோணம் h-இன் மதிப்பைக் குறிக்கும். இப்பொழுது, நடுவரை

விலக்கம் $\delta = x = 12^\circ$ ஆகவும், கோணவேற்றம் $a = x = 16^\circ$ ஆகவும் இருக்கும்போது நேரக்கோணம் $h = u_{12:16}$ இன் மதிப்பைக் காண வேண்டும்.

நாம் காண வேண்டிய y-இன் மதிப்பாகிய 16° என்பது 14°-ஐ நெருங்கியிருப்பதால் $y = 14^\circ, 18^\circ, 22^\circ$ ஆகிய மதிப்புக்களை மட்டும் கருதி $U_{12:14}$, $U_{12:18}$, $U_{12:22}$ ஆகிய மதிப்புக்களை முதலில் பெற வேண்டும். பின்னர் இம் மதிப்புக்களிலிருந்து $U_{12:16}$ இன் மதிப்பைப் பெற வேண்டும்.

$U_{12:14}$ இன் மதிப்பைப் பெற, கீழ்க்காணும் வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்க வேண்டும்.

x	$U_{x:14}$ h m s	$\Delta U_{x:14}$ h m s	$\Delta^2 U_{x:14}$ h m s	$\Delta^3 U_{x:14}$ h m s
15°	5 35 5			
		—0 15 9		
10°	5 19 56		—0 0 17	
		—0 15 29		—0 0 18
5°	5 4 30		—0 0 35	
		—0 16 1		
0°	4 48 29			

$x = 15^\circ$ ஐ ஆதியாகக் கொள்ளவும்

இங்கு $h = -5^\circ$

$$\therefore \quad X = \frac{x-a}{h} = \frac{x-15^\circ}{-5}$$

$$\therefore \ x = 12 \text{ ஆனல், } X = \frac{12^\circ - 15^\circ}{-5} = 0{\cdot}6$$

ஆகவே, நியூட்டனின் இடைச் செருகல் வாய்பாட்டிலிருந்து,

$$U_{12:14} = (5\ 35\ 5) + (0{\cdot}6)\,(-0\ 15\ 9) + \frac{(0{\cdot}6)\,(-0{\cdot}4)}{2}\,(-0\ 0\ 17)$$

$$+ \frac{(0{\cdot}6)\,(-0{\cdot}4)\,(-1{\cdot}4)}{6}(-0\ 0\ 18)$$

$$= (5\ 35\ 5) - (0\ 9\ 5) + (0\ 0\ 2) - (0\ 0\ 1)$$

$$= (5\ 35\ 7) - (0\ 9\ 6)$$

$$= (5\ 26\ 1)$$

$$= 5^{h}\ 26^{m}\ 1^{s}$$

இதுபோல், $U_{x:18}$ இன் வேறுபாட்டுப்பட்டியலமைத்து $U_{12:16}$ இன் மதிப்பைக் காணவும்.

x	$U_{x:18}$ h m s	$\Delta U_{x:18}$ h m s	$\Delta^2 U_{x:18}$ h m s	$\Delta^3 U_{x:18}$ h m s
15	5 14 39			
		—0 15 2		
10	4 59 37		—0 0 31	
		—0 15 33		—0 0 21
5	4 44 4		—0 0 52	
		—0 16 25		
0	4 27 39			

$$x=12 \text{ ஆனால், } X=\frac{12-15}{-5}=0{\cdot}6$$

$$U_{12:18}=(5\ 14\ 39)+(0{\cdot}6)(-0\ 15\ 2)+\frac{(0{\cdot}6)(-0{\cdot}4)}{2}(-0\ 0\ 31)$$
$$+\frac{(0{\cdot}6)(-0{\cdot}4)(-1{\cdot}4)}{6}(-0\ 0\ 21)$$
$$=(5\ 14\ 39)-(0\ 9\ 1)+(0\ 0\ 3)-(0\ 0\ 1)$$
$$=(5\ 14\ 42)-(0\ 9\ 2)$$
$$=(5\ \ 5\ 40)$$
$$=5^{h}\ 5^{m}\ 40^{s}$$

$U_{x:22}$ இன் வேறுபாட்டுப் பட்டியல் வருமாறு.

x	$U_{x:22}$ h m s	$\Delta U_{x:22}$ h m s	$\Delta^2 U_{x:22}$ h m s	$\Delta^3 U_{x:22}$ h m s
15	4 54 17			
		—0 15 0		
10	4 39 17		—0 0 48	
		—0 15 48		—0 0 25
5	4 23 29		—0 0 13	
		—0 17 1		
0	4 6 28			

$$\therefore\ U_{12:22}=(4\ 54\ 17)+(0{\cdot}6)\,(-0\ 15\ 0)+\frac{(0{\cdot}6)\,(-0{\cdot}4)}{2}\,(-0\ 0\ 48)$$

$$+\frac{(0{\cdot}6)\,(-0{\cdot}4)\,(-1{\cdot}4)}{6}\,(-0\ 0\ 25)$$

$$=(4\ 54\ 17)-(0\ 9\ 0)+(0\ 0\ 5)-(0\ 0\ 1)$$

$$=(4\ 54\ 22)-(0\ 9\ 1)$$

$$=(4\ 45\ 21)$$

$$=4^{h}\ 45^{m}\ 21^{s}$$

ஆகவே, $U_{12:14} = 5^{h}\ 26^{m}\ 1^{s}$

$U_{12:11} = 5^{h}\ 5^{m}\ 40^{s}$

$U_{12:22} = 4^{h}\ 45^{m}\ 21^{s}$

என்ற மதிப்புக்கள் கிடைக்கப்பட்டுள்ளன. இம் மதிப்புக்களில் $x=12$ என்பது மாறிலியாகும். $y=14$, $y=18$, $y=22$ என்பன y இன் மூன்று மதிப்புக்களாகும். இம் மூன்று மதிப்புக்களுக்குரிய $U_{12:y}$ இன் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இம் மூன்று மதிப்புக்களி லிருந்து வேறுபாட்டுப் பட்டியலமைத்து $y=16$க்குரிய $U_{12:16}$ இன் மதிப்பைப் பெறவேண்டும்.

x	$U_{12:y}$			$\Delta U_{12:y}$			$\Delta^2 U_{12:y}$		
	h	m	s	h	m	s	h	m	s
14	5	26	1						
				—0	20	21			
18	5	5	40				0	0	2
				—0	20	19			
22	4	45	21						

$b=14$, $k=4^\circ$; $y=16^\circ$.

$$Y=\frac{y-b}{k}=\frac{y-14^\circ}{4^\circ}$$

$$\therefore\ y=16^\circ \text{ ஆனல், } Y=\frac{16^\circ-14^\circ}{4^\circ}=\frac{2}{4}=0{\cdot}5$$

நியூட்டனின் இடைச் செருகல் வாய்பாட்டிலிருந்து,

$$U_{12:16}=(5\ 26\ 1)+(0{\cdot}5)(-0\ 20\ 21)+\frac{(0{\cdot}5)(-0{\cdot}5)}{2}(0\ 0\ 2)$$

$$=(5\ 26\ 1)-(0\ 10\ 10{\cdot}5)-(0\ 0\ {\cdot}25)$$

$$=(5\ 26\ 1)-(0\ 10\ 11)$$

$$=(5\ 15\ 50)$$

$$=5^{h}\ 15^{m}\ 50^{s}.$$

பயிற்சி 22

1. கீழ்க்காணும் மதிப்புக்களிலிருந்து $U_{23:17}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

$U_{20:15}=6{\cdot}004$ $U_{20:20}=4{\cdot}304$ $U_{20:25}=3{\cdot}325$

$U_{25:15}=6{\cdot}029$ $U_{25:20}=4{\cdot}346$

$U_{30:15}=6{\cdot}075$

2. கீழ்க்காணும் அட்டவணை விவரங்களைக் கொண்டு 23 வயதில் 17 ஆண்டுக் காலத்திற்குரிய கட்டணத்தை இடைச் செருகல் மூலம் கணக்கிடுக.

வயது	கட்டணம் 15ஆண்டு	20 ஆண்டு	25 ஆண்டு
20	5·947	4·418	3·547
25	6·046	4·530	
30	6·144		

3. கீழ்க்காணும் மதிப்புக்களிலிருந்து $U_{42:52}$, $U_{44:51}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் கணக்கிடுக.

$U_{35:55}=10{\cdot}020$; $U_{35:50}=11{\cdot}196$; $U_{35:45}=12{\cdot}019$

$U_{40:55}=\ 9{\cdot}796$; $U_{40:50}=10{\cdot}894$; $U_{40:45}=11{\cdot}641$

$U_{45:55}=\ 9{\cdot}583$; $U_{45:50}=10{\cdot}591$; $U_{45:45}=11{\cdot}243$

4. கீழ்க்காணும் அட்டவணையில், x, y ஆகியவற்றின் சில மதிப்புக்களுக்குரிய

$$f(x{:}y)=\frac{e^{xy}-1}{x}$$

என்ற சார்பின் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இடைச் செருகல் மூலம் f(0·044 : 22·5) இன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

x	y=20	y=22	y=24	y=26
0·035	28·9644	33·1362	37·6105	42·4092
0·040	30·6385	35·2725	40·2924	45·7304
0·045	32·4356	37·5830	43·2151	49·3776
0·050	34·3656	40·0833	46·4023	53·3859

9. எண்சார் வகையிடல்
(Numerical Differentiation)

9.1 வகையீட்டுச் செயலி-D (Differential Operator-D)

வகைநுண் கணிதத்தில் (Differential Calculus) ஒரு சார்பின் வகையீடுகளைக் (differentials) காணும் முறைகளைப் பற்றிப் படித்திருக்கிறோம். x-ஐ மாறியாகக் கொண்ட ஒரு சார்பின் வகையீடு காண $\frac{d}{dx}$ என்ற செயலியைப் பயன்படுத்துகிறோம். இச் செயலியை D என்றும் குறிக்கலாம். ஆகவே, $y = f(x)$ என்ற சார்புத் தொடர்பில் இச் செயலியைச் செயல்படுத்தினால் முதல்நிலை வகைக் கெழு (First order derivative) கிடைக்கிறது. அதாவது, $D_y = \frac{d}{dx}(y) = \frac{dy}{dx}$ என்ற வகைக் கெழு கிடைக்கிறது. இவ்வகைக் கெழுவை y' அல்லது $f'(x)$ என்றும் எழுதலாம். ஆகவே $D_y = y' = f'(x)$ ஆகும்.

இம் முதல்நிலை வகைக் கெழுவை அடுத்தடுத்து வகையிட இரண்டாம், மூன்றும், ... நிலை வகைக் கெழுக்கள் கிடைக்கின்றன. அவை முறையே D^2, D^3, ... என்ற செயலிகளால் குறிக்கப்படுகின்றன. y அல்லது f (x) இன் இரண்டாம், மூன்றும், ... நிலை வகைக் கெழுக்கள் முறையே y'', y'', ... அல்லது $f''(x)$, $f''(x)$, ... என்றும் குறிக்கப்படுகின்றன.

மேலும், $D^2{}_y = D(D_y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$,

$$D^3{}_y = D(D^2{}_y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3},$$

....

என்றும் எழுதப்படுகின்றன.

9.2 எண்சார் வகையிடல்

f (x) என்ற சார்பின் அமைப்பு தெரிந்தால் x-இன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு f (x) இன் வகையீட்டுக் கெழு (differential coefficient)வைக் காண f (x)ஐ நேரடியாக வகையிட்டு, x-இன் அந்த மதிப்பைப் பிரதியிடலாம். ஆனால் பட்டியல்படுத்தப்பட்ட ஒரு சார்பின் வகைக் கெழுவைக் காண முதலில் அச்சார்பின் வகைக் கெழுவைக் காண வேண்டும். பின்னர் அவ்வமைப்பிலிருந்து மேற்கூறப்பட்ட முறையில் வகைக் கெழுவைக் காண வேண்டும். இவ்வாறு வகைக் கெழு காணும் முறைக்கு எண்சார் வகையீடு காணும் முறை என்று பெயர். ஆகவே, கொடுக்கப் பட்டுள்ள பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து x-இன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்குரிய f (x) இன் பல நிலை வகையீட்டுக் கெழுக்களையும் காணும் முறைக்கு எண்சார் வகையிடல் என்று பெயர்.

9.2.1 சார்பின் வகைக் கெழு (Derivative of a function)

நியூட்டன்-கிரிகோரி வாய்பாட்டைக் கருதுக.

$$f(a+xh) = f(a) + x\,\Delta f(a) + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(a) + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 f(a) + \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{f(a+xh)-f(a)}{xh} = \frac{1}{h}\left[\Delta f(a) + \frac{(x-1)}{2!}\Delta^2 f(a) + \frac{(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 f(a) + \ldots\ldots\right]$$

xh இன் மதிப்பு பூச்சியத்தை நெருங்குமாறு x-இன் மதிப்பை மிகச் சிறியதாக எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\text{இடது பக்கம்} = \underset{xh \to 0}{\text{எல்லை}} \; \frac{f(a+xh)-f(a)}{xh} = f'(a)$$

ஆகவே,

$$f'(a) = \frac{1}{h}\left[\Delta f(a) + \frac{x-1}{2!}\Delta^2 f(a) + \frac{(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 f(a) + \ldots\ldots\right]$$

x மிகச் சிறியதாதலால் x-ஐயும் x-இன் படிகளையும் புறக்கணித்து விடலாம். ஆகவே,

$$f'(a)=\frac{1}{h}\left[\triangle f(a)+\frac{(-1)}{2!}\triangle^2 f(a)+\frac{(-1)(-2)}{3!}\triangle^3 f(a)+\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{h}\left[\triangle f(a)-\frac{1}{2}\triangle^2 f(a)+\frac{1}{3}\triangle^3 f(a)-\frac{1}{4}\triangle^4 f(a)+\ldots\ldots\ldots\right] \quad (2)$$

இப்பொழுது சமன்பாடு (1)ஐக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதி, வகைநுண் கணித முறைப்படி அடுத்தடுத்து வகையிட்டால் நாம் கீழ்க்கண்ட தொடர்புகளைப் பெறுகிறோம்.

$$f(a+xh)=f(a)+x\triangle f(a)+\frac{(x^2-x)}{2!}\triangle^2 f(a)+\frac{(x^3-3x^2+2x)}{3!}\triangle^3 f(a)+\frac{(x^4-6x^3+11x^2-6x)}{4!}\triangle^4 f(a)+\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore\ hf'(a+xh)=\triangle f(a)+\frac{(2x-1)}{2!}\triangle^2 f(a)+\frac{(3x^2-6x+2)}{3!}\triangle^3 f(a)+\frac{4x^3-18x^2+22x-6}{4!}\triangle^4 f(a)+\ldots\ldots\ldots$$

இதுபோன்று,

$$h^2 f''(a+xh)=\triangle^2 f(a)+(x-1)\triangle^3 f(a)+\frac{(6x^2-18x+11)}{12}\triangle^4 f(a)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

இவ்வாறு மற்ற உயர்நிலை வகையீடுகளையும் காணலாம்.

மேற்கண்ட முதல், இரண்டாம் நிலை வகையீடுகளின் சமன்பாடு களில் x = 0 என்று பிரதியிட்டால் நாம் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைப் பெறுகிறோம்.

$$h\,f'(a)=\Delta f(a)-\frac{1}{2}\Delta^2 f(a)+\frac{1}{3}\Delta^3 f(a)-\frac{1}{4}\Delta^4 f(a)+\frac{1}{5}\Delta^5 f(a)-\ldots\ldots\ldots$$

$$h^2 f''(a)=\Delta^2 f(a)-\Delta^3 f(a)+\frac{11}{12}\Delta^4 f(a)-\frac{5}{6}\Delta^5 f(a)+\frac{137}{180}\Delta^6 f(a)-\ldots\ldots\ldots$$

இவற்றிற்கு அடுத்தடுத்த நிலை வகையீடுகளையும் நாம் இவ்வாறு காணலாம்.

$$h^3 f'''(a)=\Delta^3 f(a)-\frac{3}{2}\Delta^4 f(a)+\frac{7}{4}\Delta^5 f(a)-\frac{15}{8}\Delta^6 f(a)+\ldots\ldots\ldots$$

$$h^4 f^{iv}(a)=\Delta^4 f(a)-2\Delta^5 f(a)+\frac{17}{6}\Delta^6 f(a)-\ldots\ldots\ldots$$

$$h^5 f^{v}(a)=\Delta^5 f(a)-\frac{5}{2}\Delta^6 f(a)+\ldots\ldots\ldots$$

9.2.2 Δ-க்கும் D-க்குமுள்ள தொடர்பு

மேற்கண்ட வகையீடுகளை Δ-க்கும் D-க்குமுள்ள தொடர்பின் உதவியாலும் பெறலாம்.

$f(a+h)$ஐ டெயிலரின் தேற்றத்தின் (Taylor's theorem) உதவியால் விரித்தெழுதவும்.

$$f(a+h)=f(a)+h\,f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a)+\ldots\ldots\ldots$$

$f'(a)$, $f''(a)$, ... ஆகியவற்றை $D\,f(a)$, $D^2 f(a)$, ... என்று எழுதலாம். ஆகவே,

$$f(a+h)=f(a)+h\,D\,f(a)+\frac{h^2}{2!}D^2 f(a)+\frac{h^3}{3!}D^3 f(a)+\ldots\ldots\ldots$$

$$=\left(1+h\,D+\frac{h^2 D^2}{2!}+\frac{h^3 D^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots\right)f(a)$$

$$=e^{hD}f(a).$$

ஆனால், $f(a+h)=E\,f(a)=(1+\Delta)\,f(a)$.

$$\therefore \quad (1+\triangle)\, f(a) = e^{hD} \cdot f(a)$$

$$\therefore \quad 1+\triangle = e^{hD}$$

$$\therefore \quad hD = \log_e (1+\triangle)$$

$$= \triangle - \frac{\triangle^2}{2} + \frac{\triangle^3}{3} - \frac{\triangle^4}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \quad D = \frac{1}{h}\left[\triangle - \frac{\triangle^2}{2} + \frac{\triangle^3}{3} - \frac{\triangle^4}{4} + \ldots\ldots\ldots\right]$$

$$\therefore \quad D\, f(x) = \frac{1}{h}\left[\triangle - \frac{\triangle^2}{2} + \frac{\triangle^3}{3} - \frac{\triangle^4}{4} + \ldots\ldots\ldots\right] f(x)$$

$$= \frac{1}{h}\left[\triangle f(x) - \frac{1}{2}\triangle^2 f(x) + \frac{1}{3}\triangle^3 f(x) - \frac{1}{4}\triangle^4 f(x) + \ldots\ldots\ldots\right]$$

$$D^2 f(x) = \frac{1}{h^2}\left[\triangle - \frac{\triangle^2}{2} + \frac{\triangle^3}{3} - \frac{\triangle^4}{4} + \ldots\ldots\ldots\right]^2 f(x)$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[\triangle^2 - \triangle^3 + \frac{11}{12}\triangle^4 - \frac{5}{6}\triangle^5 + \ldots\ldots\right] f(x)$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[\triangle^2 f(x) - \triangle^3 f(x) + \frac{11}{12}\triangle^4 f(x) - \frac{5}{6}\triangle^5 f(x) + \ldots\ldots\ldots\right]$$

பொதுவாக, $D^n f(x) = \frac{1}{h^n}\left[\triangle - \frac{\triangle^2}{2} + \frac{\triangle^3}{3} - \frac{\triangle^4}{4} + \ldots\ldots\ldots\right]^n f(x)$

மாதிரி 106

கீழ்க்காணும் பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து $x = 300$ இல் $\log_e x$-இன் முதல், இரண்டாம் வகைக் கெழுக்களைக் காண்க.

x	$\log_e x$
300	5·703782
301	5·707110
302	5·710427
303	5·713733
304	5·717028
305	5·720312
306	5·723585
307	5·726847

முதலில்வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்கவும்.

x	$\log_e x$	$\triangle$	$\triangle^2$	$\triangle^3$
300	5·703782			
		0·003328		
301	5·707110		−0·000011	
		0·003317		0
302	5·710427		−0·000011	
		0·003306		0
303	5·713733		−0·000011	
		0·003295		0
304	5·717028		−0·000011	
		0·003284		0
305	5·720312		−0·000011	
		0·003273		0
306	5·723585		−0·000011	
		0·003262		
307	5·726847			

$$D\,f(x)=\frac{1}{h}\left[\triangle f(x)-\frac{1}{2}\triangle^2 f(x)+\frac{1}{3}\triangle^3 f(x)-\ldots\ldots\ldots\right]$$

இங்கு $h=1$, $\triangle f(x)=\triangle f(300)=0{\cdot}003328$,

$$\triangle^2 f(300)=-0{\cdot}000011,\ \ \triangle^3 f(300)=0.$$

$$\therefore\ \ f'(300)=\frac{1}{1}\left[0{\cdot}003328-\frac{1}{2}(-0{\cdot}000011)+0\right]$$

$$=0{\cdot}003328+0{\cdot}0000055$$

$$=0{\cdot}0033335.$$

$$D^2 f(x)=\frac{1}{h^2}\left[\triangle^2 f(x)-\triangle^3 f(x)+\frac{11}{12}\triangle^4 f(x)-\ldots\ldots\right]$$

$$\therefore\ \ f''(300)=-0{\cdot}000011$$

9.3 எண்சார் வகையீட்டு வாய்பாடுகள்

நியூட்டன்-கிரிகோரி இடைச் செருகல் வாய்பாட்டிலிருந்து எண்சார் வகையீட்டிற்கான வாய்பாடுகளைக் கண்டோம். இப்பொழுது மற்ற இடைச் செருகல் வாய்பாடுகளிலிருந்து எண்சார் வகையீட்டிற்கான வாய்பாடுகளைப் பெறுவோம்.

(i) நியூட்டன்–கிரிகோரி பின்முக வாய்பாட்டைக் கருதுக :

$$f[a+(n+t)h] = f(a+nh) + \frac{t}{1!}\nabla f(a+nh)$$
$$+ \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f(a+nh)$$
$$+ \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\nabla^3 f(a+nh)$$
$$+ \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\nabla^4 f(a+nh) + \ldots\ldots\ldots$$
$$= \left[1 + t\nabla + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\nabla^3 + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\nabla^4 + \ldots\ldots\right] f(a+nh)$$

இப்பொழுது $t = \dfrac{x-(a+nh)}{h}$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore\ f(x) = \left[1 + t\nabla + \frac{t^2+t}{2}\nabla^2 + \frac{t^3+3t^2+2t}{6}\nabla^3 + \frac{t^4+6t^3+11t^2+6t}{24}\nabla^3 + \ldots\ldots\right] f(a+nh)$$

இப்பொழுது இரு பக்கங்களிலும் x ஐக் குறித்து வகையிடவும்.

$$t = \frac{x-(a+nh)}{h}$$

$$\therefore\quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h}.$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{d}{dx}\left[1 + t\nabla + \frac{t^2+t}{2}\nabla^2 + \frac{t^3+3t^2+2t}{6}\nabla^3 + \frac{t^4+6t^3+11t^2+6t}{24}\nabla^4 + \ldots\ldots\right] f(a+nh)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[1 + t\nabla + \frac{t^2+t}{2}\nabla^2 + \frac{t^3+3t^2+2t}{6}\nabla^3 + \frac{t^4+6t^3+11t^2+6t}{24}\nabla^4 + \ldots\ldots\ldots\right] f(a+nh)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\left[\nabla+\frac{2t+1}{2}\nabla^2+\frac{3t^2+6t+2}{6}\nabla^3+\frac{4t^3+18t^2+22t+6}{24}\nabla^4+\dots\dots\right]f(a+nh)\cdot\frac{1}{h}$$

அதாவது,

$$f'(x)=\frac{1}{h}\left[\nabla+\frac{2t+1}{2}\nabla^2+\frac{3t^2+6t+2}{6}\nabla^3+\frac{2t^3+9t^2+11t+3}{12}\nabla^4+\dots\dots\right]f(a+nh)$$

$x=a+nh$ ஆனால் $t=0$. ஆகவே,

$$f'(a+nh)=\frac{1}{h}\left[\nabla+\frac{1}{2}\triangle^2+\frac{1}{3}\nabla^3+\frac{1}{4}\nabla^4+\dots\dots\right]f(a+nh)$$

இப்பொழுது $f'(x)$ ஐ மீண்டும் x ஐக் குறித்து வகையிடவும்.

$$\therefore f''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\nabla^2+(t+1)\nabla^3+\frac{6t^2+18t+11}{12}\nabla^4+\dots\dots\right]f(a+nh)$$

$x=a+nh$ ஆனால் $t=0$.

$$\therefore f''(a+nh)=\frac{1}{h^2}\left[\nabla^2+\nabla^3+\frac{11}{12}\nabla^4+\dots\dots\right]f(a+nh)$$

இவ்வாறு மற்ற உயர்நிலை வகையீடுகளையும் காணலாம்.

குறிப்பு:

$f'(a+nh)$ இன் வாய்பாட்டில் $a+nh=x$ என்று பிரதியிட்டு $h=1$ எனக் கொண்டால், D, ∇ ஆகிய செயலிகளின் தொடர்பைப் பெறலாம்.

$$f'(a+nh)=\frac{1}{h}\left[\nabla+\frac{1}{2}\nabla^2+\frac{1}{3}\nabla^3+\frac{1}{4}\nabla^4+\dots\dots\right]f(a+nh).$$

$a+nh=x$, $h=1$ ஆகவே,

$$f'(x)=\left[\nabla+\frac{1}{2}\nabla^2+\frac{1}{3}\nabla^3+\frac{1}{4}\nabla^4+\dots\dots\right]f(x)$$

அதாவது, $D\,f(x)=\left[\nabla+\frac{1}{2}\nabla+\frac{1}{3}\nabla^3+\frac{1}{4}\nabla^4+\dots\dots\right]f(x)$

$$\therefore D=\nabla+\frac{1}{2}\nabla^2+\frac{1}{3}\nabla^3+\frac{1}{4}\nabla^4+\dots\dots$$

(ii) நியூட்டன்-ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டைக் கருதுக.

சம இடைவெளி h இல் x இன் மதிப்புக்களைக் கொண்டு பட்டியல் படுத்தப்பட்ட f(x) என்ற சார்பினைக் கருதுக. a ஐ ஆதியாகக் கொண்டு $u=\frac{x-a}{h}$ என்று மாற்றவும். f(x) என்பது F(u) ஆக மாறுவதாகக் கொள்க.

நியூட்டன்-ஸ்டெர்லிங் வாய்பாடு வருமாறு :

$$F(u)=F(0)+\frac{u}{1!}\left[\frac{\Delta F(0)+\Delta F(-1)}{2}\right]+\frac{u^2}{2!}\Delta^2 F(-1)$$

$$+\frac{u(u^2-1^2)}{3!}\left[\frac{\Delta^3 F(-1)+\Delta^3 F(-2)}{2}\right]$$

$$+\frac{u^2(u^2-1^2)}{4!}\Delta^4 F(-2)$$

$$+\frac{u(u^2-1^2)(u^2-2^2)}{5!}\left[\frac{\Delta^5 F(-2)+\Delta^5 F(-3)}{2}\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

இப்பொழுது, இரு பக்கங்களிலும் xஐக் குறித்து வகையீடு செய்க.

$$\text{இங்கு } u=\frac{x-a}{h}$$

$$\therefore \frac{du}{dx}=\frac{1}{h}$$

மேலும் $f(x)=F(u)$ ஆகயிருக்கும்.

$$\therefore f'(x)=F'(u)\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{h}F'(u)\cdot$$

$$\therefore f'(x)=\frac{1}{h}\left[\frac{\Delta F(0)+\Delta F(-1)}{2}+u\,\Delta^2 F(-1)\right.$$

$$+\frac{3u^2-1}{6}\cdot\frac{\Delta^3 F(-1)+\Delta^3 F(-2)}{2}+\frac{4u^3-2u}{24}\Delta^4 F(-2)$$

$$\left.+\frac{5u^4-15u^2+4}{120}\cdot\frac{\Delta^5 F(-2)+\Delta^5 F(-3)}{2}+\ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{h}\Big[\frac{\Delta F(0) + \Delta F(-1)}{2} + u\,\Delta^2 F(-1) + \frac{3u^2-1}{6} \cdot \frac{\Delta^3 F(-1) + \Delta^3 F(-2)}{2} + \frac{u(2u^2-1)}{12}\Delta^4 F(-2) + \frac{5u^4-15u^2+4}{120} \cdot \frac{\Delta^5 F(-2) + \Delta^5 F(-3)}{2} + \ldots\ldots\Big]$$

இப்பொழுது x=a ஆனால், u=0 ஆகும்.

$$\therefore\ f'(a) = \frac{1}{h}\Big[\frac{\Delta F(0) + \Delta F(-1)}{2} - \frac{1}{6}\,\frac{\Delta^3 F(-1) + \Delta^3 F(-2)}{2} + \frac{1}{30}\,\frac{\Delta^5 F(-2) + \Delta^5 F(-3)}{2} + \ldots\ldots\Big]$$

x=a இல் f(x) இன் வகைக் கெழு காண இவ்வாய்பாடு மிகவும் பயன்படுகிறது.

இப்பொழுது f′ (x) இன் வாய்பாட்டை மீண்டும் வகையீடு செய்தால் f″ (x) இன் வாய்பாடு கிடைக்கும்.

$$f'(x) = \frac{1}{h}\Big[\frac{\Delta F(0) + \Delta F(-1)}{2} + u\,\Delta^2 F(-1) + \frac{3u^2-1}{6} \cdot \frac{\Delta^3 F(-1) + \Delta^3 F(-2)}{2} + \frac{u(2u^2-1)}{12}\Delta^4 F(-2) + \frac{5u^4-15u^2+4}{120} \cdot \frac{\Delta^5 F(-2) + \Delta^5 F(-3)}{2} + \ldots\ldots\Big]$$

$$\therefore\ f''(x) = \frac{1}{h^2}\Big[\Delta^2 F(-1) + u \cdot \frac{\Delta^3 F(-1) + \Delta^3 F(-2)}{2} + \frac{6u^2-1}{12}\Delta^4 F(-2) + \frac{u(2u^3-3)}{12} \cdot \frac{\Delta^5 F(-2) + \Delta^5 F(-3)}{2} + \ldots\ldots\Big]$$

$x=a$ ஆனால், $u=0$.

$$\therefore \quad f''(a)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 F(-1)-\frac{1}{12}\Delta^4 F(-2)+\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

இவ்வாறு $f(x)$ இன் மற்ற உயர்நிலை வகையீடுகளையும் காணலாம்.

(iii) நியூட்டன்-பெஸ்ஸல் வாய்பாட்டைக் கருதுக :

சம இடைவெளி h இல் x இன் மதிப்புக்களைக் கொண்டு பட்டியல் படுத்தப்பட்ட $f(x)$ என்ற சார்பினைக் கருதுக. a யை ஆதியாகக் கொண்டு $u=\frac{x-a}{h}$ என்று மாற்றுக. $f(x)$ என்பது $F(u)$ ஆக மாறுவதாகக் கொள்க. $\therefore f(x)=F(u)$ ஆகயிருக்கும்.

நியூட்டன்-பெஸ்ஸல் வாய்பாடு வருமாறு :

$$F(u)=\frac{F(0)+F(1)}{2}+(u-\tfrac{1}{2})\,\Delta F(0)$$
$$+\frac{u(u-1)}{2!}\cdot\frac{\Delta^2 F(-1)+\Delta^2 F(0)}{2}$$
$$+\frac{u(u-\frac{1}{2})(u-1)}{3!}\Delta^3 F(-1)$$
$$+\frac{(u+1)u(u-1)(u-2)}{4!}\,\frac{\Delta^4 F(-2)+\Delta^4 F(-1)}{2}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

இப்பொழுது, இரு பக்கங்களிலும் x ஐக் குறித்து வகையீடு செய்யவும்.

இங்கு, $u=\frac{x-a}{h}$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{h}$$

மேலும், $f(x)=F(u)$

$$\therefore \quad f'(x)=F'(u)\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=F'(u)\cdot\frac{1}{h}$$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{1}{h}\Big[\triangle F(0)+\frac{2u-1}{2}\cdot\frac{\triangle^2 F(-1)+\triangle^2 F(0)}{2}$$
$$+\frac{3u^2-3u+\frac{1}{2}}{6}\cdot\triangle^3 F(-1)$$
$$+\frac{4u^3-6u^2-2u+2}{24}\cdot\frac{\triangle^4 F(-2)+\triangle^4 F(-1)}{2}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]$$

$$=\frac{1}{h}\Big[\triangle F(0)+\frac{2u-1}{2}\cdot\frac{\triangle^2 F(-1)+\triangle^2 F(0)}{2}$$
$$+\frac{6u^2-6u+1}{12}\triangle^3 F(-1)$$
$$+\frac{2u^3-3u^2-u+1}{12}\cdot\frac{\triangle^4 F(-2)+\triangle^4 F(-1)}{2}+\ldots\ldots\Big]$$

இப்பொழுது, $x=a$ ஆனுல், $u=o$ ஆகும்.

$$\therefore\ f'(a)=\frac{1}{h}\Big[\triangle F(0)-\frac{\triangle^2 F(-1+\triangle^2 F(0)}{4}+\frac{1}{12}\triangle^3 F(-1)$$
$$+\frac{\triangle^4 F(-2)+\triangle^4 F(-2)}{24}+\ldots\ldots\Big]$$

இப்பொழுது $f'(x)$ இன் வாய்பாட்டை மீண்டும் வகையீடு செய்க.

$$\therefore\ f''(x)=\frac{1}{h^2}\Big[\frac{\triangle^2 F(-1)+\triangle^2 F(0)}{2}+\frac{2u-1}{2}\triangle^3 F(-1)$$
$$+\frac{6u^2-6u-1}{12}\cdot\frac{\triangle^4 F(-2)+\triangle^4 F(-1)}{2}+\ldots\ldots\Big]$$

$x=a$ ஆனுல் $u=0$ ஆகும்.

$$\therefore\ f''(a)=\frac{1}{h^2}\Big[\frac{\triangle^2 F(-1)+\triangle^2 F(0)}{2}-\frac{1}{2}\triangle^3 F(-1)$$
$$-\frac{\triangle^4 F(-2)+\triangle^4 F(-1)}{24}+\ldots\ldots\ldots\Big]$$

இவ்வாறு $f(x)$ இன் மற்ற உயர்நிலை வகையீடுகளையும் காணலாம்.

(iv) நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டு வாய்பாட்டைக் கருதுக :

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\,f(x_0, x_1)+(x-x_0)(x-x_1)\,f(x_0, x_1, x_2)$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\,f(x_0, x_1, x_2, x_3)+\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

இதில் $a_0 = x - x^0$, $a_1 = x - x_1$, $a_2 = x - x_2$,........... என்று பிரதியிடுக.

$$\therefore\ f(x) = f(x_0) + a_0 f(x_0, x_1) + a_0 a_1 f(x_0, x_1, x_2) + a_0 a_1 a_2 f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

இரு பக்கங்களிலும் x ஐக் குறித்து வகையீடு செய்க.

a_0, a_1, a_2,......... என்பவைகளின் வகையீடுகள் யாவும் 1 ஆகும்.

$$\therefore\ f'(x) = f(x_0, x_1) + (a_0 + a_1) f(x_0 x_1, x_2) + (a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_0) f(x_0, x_1, x_2, x^3) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

இதுதான் $f'(x)$ இன் வாய்பாடாகும். இவ்வாய்பாட்டில் $x = 0$ என்று பிரதியிட $f'(0)$ இன் வாய்பாட்டைப் பெறுகிறோம்.

அதாவது,

$$f^i(0) = f(x_0, x_1) - (x_0 + x_1) f(x_0, x_1, x_2) + (x_0, x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_0) f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

இப்பொழுது, $f'(x)$ இன் வாய்பாட்டை மீண்டும் xஐக் குறித்து வகையீடு செய்யவும்.

$$\therefore\ f''(x) = 2 f(x_0, x_1, x_2) + 2(a_0 + a_1 + a_2) f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \ldots\ldots$$

இதில் $x = 0$ என்று பிரதியிட $f''(0)$ இன் வாய்பாடு கிடைக்கிறது. அதாவது,

$$f''(0) = 2 f(x_0, x_1, x_2) - 2(x_0 + x_1 + x_2)\ f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \ldots\ldots\ldots$$

இவ்வாறு $f(x)$ இன் மற்ற உயர்நிலை வகையீடுகளையும் காணலாம். அசம இடை வெளிகளில் பட்டியல் படுத்தப்பட்ட $f(x)$ இன் வகையீடுகளைக் காண மேற்கண்ட நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டு வகையீட்டு வாய்பாடுகள் பயன்படுகின்றன.

மாதிரி 107

கீழ்க்கண்ட மதிப்புக்களிலிருந்து u'_0 இன் மதிப்பைத் தோராயமாகக் காண்க.

x :	0	1	2	3	4
u_x :	768	913	1039	1143	1225

(சென்னை'68 ஏப்.)

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$	$\Delta^4 u_x$
0	768				
		145			
1	913		−19		
		126		−3	
2	1039		−22		3
		104		0	
3	1143		−22		
		82			
4	1225				

நியூட்டனின் முன்வேக வாய்பாட்டிலிருந்து

$$f'(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta f(x)-\frac{1}{2}\Delta^2 f(x)+\frac{1}{3}\Delta^3 f(x)-\frac{1}{4}\Delta^4 f(x)+\ldots\ldots\right]$$

$$\therefore\ u'_0=\frac{1}{1}\left[\Delta u_0-\frac{1}{2}\Delta^2 u_0+\frac{1}{3}\Delta^3 u_0-\frac{1}{4}\Delta^4 u_0+\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$=1\left[145-\frac{1}{2}(-19)+\frac{1}{3}(-3)-\frac{1}{4}(3)\right]$$

$$=145+9{\cdot}5-1-0{\cdot}75$$

$$=152{\cdot}75.$$

மாதிரி 108

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களிலிருந்து $x=15$ இல் $\sqrt{x}$ இன் முதல் இரண்டாம் வகைக் கெழுக்களைக் காண்க.

x:	15	17	19	21	23	25
$f(x)=\sqrt{x}$:	3·873	4·123	4·359	4·583	4·797	5·000

(II பி.இ.'67 மார்ச்.)

முதலில் வேறு பாட்டுப் பட்டியலமைக்கவும்.

x	f (x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
15	3·873					
		0·250				
17	4·123		−0·014			
		0·236		0·002		
19	4·359		−0·012		−0·001	
		0·224		0·001		0·002
21	4·583		−0·011		0·001	
		0·213		0·002		
23	4·796		−0·009			
		0·204				
25	5·000					

நியூட்டனின் முன்வேக வாய்பாட்டிலிருந்து,

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta f(x) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(x) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(x) - \frac{1}{4}\Delta^4 f(x) + \frac{1}{5}\Delta^5 f(x) - \ldots\ldots\right]$$

இங்கு $x = 15$, $h = 2$.

$$\therefore\ f'(15) = \frac{1}{2}\left[\Delta f(15) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(15) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(15) - \frac{1}{4}\Delta^4 f(15) + \frac{1}{5}\Delta^5 f(15) - \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0{\cdot}250 - \frac{1}{2}(-0{\cdot}014) + \frac{1}{3}(0{\cdot}002) - \frac{1}{4}(-0{\cdot}001) + \frac{1}{5}(0{\cdot}002)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0{\cdot}250 + 0{\cdot}007 + 0{\cdot}000667 + 0{\cdot}00025 + 0{\cdot}0004\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[0{\cdot}258317\right]$$

$$= 0{\cdot}129158.$$

$$f''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\triangle^2 f(x)-\triangle^3 f(x)+\frac{11}{12}\triangle^4 f(x)-\frac{5}{6}\triangle^5 f(x)+\ldots\ldots\right]$$

$$\therefore\ f''(15)=\frac{1}{4}\left[\triangle^2 f(15)-\triangle^3 f(15)+\frac{11}{12}\triangle^4 f(15)-\frac{5}{6}\triangle^5 f(15)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-0{\cdot}014-0{\cdot}002+\frac{11}{12}(-0{\cdot}001)-\frac{5}{6}(0{\cdot}002)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[-0{\cdot}014-0{\cdot}002-0{\cdot}000925-0{\cdot}001667\right]$$

$$-0{\cdot}008648.$$

மாதிரி 109

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களிலிருந்து u'_x ஐக் காண்க.

x :	0	1	2	3	4
u_x :	1	1	15	40	85

(சென்னை ' 69 செப்.)

<u>நியூட்டன்—கிரிகோரி வாய்பாட்டிலிருந்து,</u>

$$h\,f'(a+xh)=\triangle f(a)+\frac{2x-1}{2!}\triangle^2 f(a)+\frac{3x^2-6x+2}{3!}\triangle^3 f(a)+\frac{4x^3-18x^2+22x-6}{4!}\triangle^4 f(a)+\ldots\ldots$$

$a=0,\ h=1$ என்று பிரதியிட,

$$f'(x)=\triangle f(0)+\frac{2x-1}{2}\triangle^2 f(0)+\frac{3x^2-6x+2}{6}\triangle^3(0)+\frac{2x^3-9x^2+11x-3}{12}\triangle^4 f(0)+\ldots\ldots$$

ஆகவே, வேறுபாட்டுப் பட்டியலை அமைக்கவும்.

x	u_x	$\triangle u_x$	$\triangle^2 u_x$	$\triangle^3 u_x$	$\triangle^4 u_x$
0	1				
		0			
1	1		14		
		14		−3	
2	15		11		12
		25		9	
3	40		20		
		45			
4	85				

$$\therefore\ u_x = \triangle u_0 + \frac{2x-1}{2}\triangle^2 u_0 + \frac{3x^2-6x+2}{6}\triangle^3 u_0 + \frac{2x^3-9x^2+11x-3}{12}\triangle^4 u_0$$

$$= 0 + \frac{2x-1}{2}(14) + \frac{3x^2-6x+2}{6}(-3) + \frac{2x^3-9x^2+11x-3}{12}(12)$$

$$= 7(2x-1) - \frac{1}{2}(3x^2-6x+2) + (2x^3-9x^2+11x-3)$$

$$= 2x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 28x + 11.$$

மாதிரி 110

$f(0)=5$; $f(1)=15$; $f(2)=57$;

$x=0$ இல் $f'(x)=4$; $x=2$ இல் $f'(x)=72$;

$\triangle^3 f(0)$, $\triangle^4 f(0)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

முதலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புக்களுக்கு வேறுபாட்டுப் பட்டியலை அமைக்கவும்.

x	f (x)	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$
0	5		
		10	
1	15		32
		42	
2	57		

நியூட்டனின் முன்வேக வாய்பாட்டிலிருந்து,

$$f'(x) = \Delta f(0) + \frac{2x-1}{2}\Delta^2 f(0) + \frac{3x^2-6x+2}{6}\Delta^3 f(0) + \frac{4x^3-18x^2+22x-6}{24}\Delta^4 f(0) + \ldots\ldots\ldots$$

$x=0$ ஆனால் $f'(0)=4$.

$$\therefore\ f'(0) = \Delta f(0) - \tfrac{1}{2}\Delta^2 f(0) + \tfrac{1}{3}\Delta^3 f(0) - \tfrac{1}{4}\Delta^4 f(0) + \ldots\ldots\ldots$$

ஐந்தாவதும் அதற்கு மேற்பட்ட நிலை வேறுபாடுகளையும் பூச்சியமாகக் கொண்டால்,

$$4 = 10 - \tfrac{1}{2}(32) + \tfrac{1}{3}\Delta^3 f(0) - \tfrac{1}{4}\Delta^4 f(0)$$

$$\therefore\ \tfrac{1}{3}\Delta^3 f(0) - \tfrac{1}{4}\Delta^4 f(0) = 10$$

அல்லது, $4\Delta^3 f(0) - 3\Delta^4 f(0) = 120$ ... ... (1)

$x=2$ ஆனால், $f'(2)=72$.

$$f'(2) = \Delta f(0) + \tfrac{3}{2}\Delta^2 f(0) + \tfrac{1}{3}\Delta^3 f(0) - \tfrac{1}{12}\Delta^4 f(0)$$

$$72 = 10 + \tfrac{3}{2}(32) + \tfrac{1}{3}\Delta^3 f(0) - \tfrac{1}{12}\Delta^4 f(0)$$

$$\therefore\ \tfrac{1}{3}\Delta^3 f(0) - \tfrac{1}{12}\Delta^4 f(0) = 14$$

அல்லது, $4\Delta^3 f(0) - \Delta^4 f(0) = 168$ ... ... (2)

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

$$\Delta^3 f(0) = 48,\quad \Delta^4 f(0) = 24.$$

மாதிரி 111

கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து $f'(0{\cdot}9)$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0
f (x) :	0·3438	0·8762	1·4770	2·1741	3·0014	4·0000

(சென்னை '62 செப்.)

$x=0{\cdot}9$ ஆனது பட்டியலின் இறுதியில் இருப்பதால் நியூட்டன்-கிரிகோரியின் பின்முக வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்துக. ஆகவே, முதலில் பின்முக வேறுபாட்டுப் பட்டியலமைக்கவும்.

x	f (x)	∇f (x)	∇^2 f (x)	∇^3 f (x)	∇^4 f (x)	∇^5 f (x)
0·5	0·3438					
		0·5324				
0·6	0·8762		0·0684			
		0·6008		0·0279		
0·7	1·4770		0·0963		0·0060	
		0·6971		0·0339		0·0012
0·8	2·1741		0·1302		0·0072	
		0·8273		0·0411		
0·9	3·0014		0·1713			
		0·9986				
1·0	4·0000					

$$f'(x)=\frac{1}{h}\left[\nabla+\frac{2t+1}{2}\nabla^2+\frac{3t^2+6t+2}{6}\nabla^3+\frac{2t^3+9t^2+11t+3}{12}\nabla^4+\dots\dots\right]f(a+nh)$$

இங்கு $a+nh=1{\cdot}0,\ x=0{\cdot}9,\ h=0{\cdot}1$

$$\therefore t=\frac{x-(a+nh)}{h}=\frac{0{\cdot}9-1{\cdot}0}{0{\cdot}1}=-1$$

$$\therefore f'(0{\cdot}9)=\frac{1}{0{\cdot}1}\left[\nabla-\frac{1}{2}\nabla^2-\frac{1}{6}\nabla^3-\frac{1}{12}\nabla^4-\dots\dots\right]f(1{\cdot}0)$$

$$=\frac{1}{0{\cdot}1}\left[\nabla f(1{\cdot}0)-\frac{1}{2}\nabla^2 f(1{\cdot}0)-\frac{1}{6}\nabla^3 f(1{\cdot}0)-\frac{1}{12}\nabla^4 f(1{\cdot}0)-\dots\dots\right]$$

$$=\frac{1}{0{\cdot}1}\left[(0{\cdot}9986)-\frac{1}{2}(0{\cdot}1713)-\frac{1}{6}(0{\cdot}0411)-\frac{1}{12}(0{\cdot}0072)-\dots\dots\right]$$

$$=\frac{1}{0{\cdot}1}[0{\cdot}9986-0{\cdot}08565-0{\cdot}00685-0{\cdot}0006-\dots\dots]$$

$$=\frac{1}{0{\cdot}1}[0{\cdot}9055]$$

$$=9{\cdot}055$$

மாதிரி 112

f (x) என்ற சார்பு கீழ்க்கண்ட பட்டியலால் வரையறுக்கப் பட்டால் f′ (0·55) இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6
f (x) :	1·000	1·101	1·220	1·362	1·528	1·721	1·943

(சென்னை '63 ஏப்.)

0·55 என்பது பட்டியலின் இறுதியிருப்பதால், நியூட்டன்-கிரிகோரியின் பின்முக வேறுபாட்டைப் பயன்படுத்த வேண்டும். ஆகவே, முதலில் பின்முக வேறுபாட்டுப் பட்டியலமைக்கவும்.

x	f (x)	$\nabla f(x)$	$\nabla^2 f(x)$	$\nabla^3 f(x)$	$\nabla^4 f(x)$	$\nabla^5 f(x)$
0	1·000					
		0·101				
0·1	1·101		0·018			
		0·119		0·005		
0·2	1·220		0·023		−0·004	
		0·142		0·001		0·006
0·3	1·362		0·024		0·002	
		0·166		0·003		−0·003
0·4	1·528		0·027		−0·001	
		0·193		0·002		
0·5	1·721		0·029			
		0·222				
0·6	1·943					

$$f'(x)=\frac{1}{h}\left[\nabla+\frac{2t+1}{2}\nabla^2+\frac{3t^2+6t+2}{6}\nabla^3+\frac{2t^3+9t^2+11t+3}{12}\nabla^4+\ldots\ldots\right]f(a+nh)$$

இங்கு $a+nh=0{\cdot}6$, $h=0{\cdot}1$, $x=0{\cdot}55$.

$$\therefore\ t=\frac{x-(a+nh)}{h}=\frac{0{\cdot}55-3{\cdot}6}{0{\cdot}1}=-0{\cdot}5$$

$$\therefore f'(0{\cdot}55)=\frac{1}{0{\cdot}1}\left[\nabla-\frac{1}{24}\nabla^3-\frac{1}{24}\nabla^4-\ldots\ldots\right]f(0{\cdot}6)$$

$$=\frac{1}{0\cdot1}\left[\nabla f(0\cdot6)-\frac{1}{24}\nabla^3 f(0\cdot6)-\frac{1}{24}\nabla^4 f(0\cdot6)\right]$$

$$=\frac{1}{0\cdot1}\left[0\cdot222-\frac{1}{24}(0\cdot002)-\frac{1}{24}(-0\cdot001)\right]$$

$$=\frac{1}{0\cdot1}[0\cdot222-0\cdot00008+0\cdot00004]$$

$$=2\cdot2196.$$

மாதிரி 113

பெஸ்ஸல் வாய்பாட்டிலிருந்து

$$\frac{d}{dx}(u_{x+\frac{1}{2}})=\triangle u_0+x\frac{\triangle^2u_{-1}+\triangle^2u_3}{2}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{24}\right)\triangle^3u_{-1}+\ldots\ldots$$

என்ற சூத்திரத்தை வருவிக்கவும்; கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து $x=\frac{3}{4}$ க்கு அவ்வகையீட்டைக் கணிக்கவும்.

x :	−1	0	1	2	
u_x :	81	92	101	109	(சென்னை '68 செப்.)

பெஸ்ஸல்லின் இடைச் செருகல் வாய்பாடு வருமாறு :

$$u_x=\frac{u_0+u_1}{2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\triangle u_0+\frac{x(x-1)}{2!}\left[\frac{\triangle^2u_{-1}+\triangle^2u_0}{2}\right]$$

$$=\frac{x(x-\frac{1}{2})(x-1)}{3!}\triangle^3 U_{-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

இரு பக்கமும் x ஐக்குறித்து வகையீடு காண்க :

$$\frac{d}{dx}(u_x)=\triangle u_0+\frac{2x-1}{2}\left[\frac{\triangle^2u_{-1}+\triangle^2u_0}{2}\right]+\frac{6x^2-6x+1}{12}\triangle^3u_{-1}+\ldots..$$

இப்பொழுது x ஐ $x+\frac{1}{2}$ ஆக மாற்றவும்.

$$\therefore\frac{d}{dx}(u_{x+\frac{1}{2}})=\triangle U_0+x\frac{\triangle^2u_{-1}+\triangle^2u_0}{2}$$

$$+\frac{6(x^2+x+\frac{1}{4})+6(x+\frac{1}{2})+1}{12}\triangle^3u_{-1}+\ldots\ldots\ldots$$

$$=\triangle u_0+x\frac{\triangle^2u_{-1}+\triangle^2u_0}{2}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{24}\right)\triangle^3u_{-1}+\ldots..$$

இவ்வாய்பாட்டில் $x=\frac{3}{4}$ என்று பிரதியிட,

$$x=\tfrac{3}{4} \text{ இல் } \frac{d}{dx}(u_{x+\frac{1}{2}})=\Delta u_0+\frac{3}{8}(\Delta^2 u_{-1}+\Delta^2 u_0)+\frac{23}{96}\Delta^3 u_{-1}+\dots\dots$$

இனி, கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலுக்கு வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்கவும்.

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$
−1	81			
		11		
0	92		−2	
		9		1
1	101		−1	
		8		
2	109			

ஆகவே $x=\frac{3}{4}$,

$$\frac{d}{dx}(u_{x+\frac{1}{2}})=9+\frac{3}{8}(-2-1)+\frac{23}{96}(1)$$
$$=9-1.125+0.2396$$
$$=8.1146.$$

மாதிரி 114

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து $x=1$ இல் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

x	y
0.7	0.644218
0.8	0.717356
0.9	0.783327
1.0	0.841471
1.1	0.891207
1.2	0.932039
1.3	0.963558

1.0 ஐ ஆதியாகக் கொண்டு $u=\frac{x-1.0}{0.1}$ என்று மாற்றி வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்கவும்.

u	F (u)	△F (u)	△²F (u)	△³F (u)	△⁴F (u)	△⁵F (u)	△⁶F (u)
−3	0·644218						
		0·073138					
−2	0·717356		−0·007167				
		0·065971		−0·000660			
−1	0·783327		−0·007827		0·000079		
		0·058144		−0·000581		0·000006	
0	0·841471		−0·008408		0·000085		−0·000004
		0·049736		−0·000496		0·000002	
1	0·891207		−0·008904		0·000087		
		0·040832		−0·000409			
2	0·932039		−0·009313				
		0·031519					
3	0·963558						

ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டிலிருந்து,

$$F'(0) = \frac{\triangle F(0) + \triangle F(-1)}{2} - \frac{1}{6}\left[\frac{\triangle^3 F(-1) + \triangle^3 F(-2)}{2}\right] + \frac{1}{30}\left[\frac{\triangle^5 F(-2) + \triangle^5 F(-3)}{2}\right] - \cdots\cdots$$

$$= \frac{0{\cdot}049736 + 0{\cdot}058144}{2} - \frac{1}{12}\left[-0{\cdot}000496 - 0{\cdot}000581\right] + \frac{1}{60}\left[0{\cdot}000002 + 0{\cdot}000006\right]$$

$$= 0{\cdot}053940 + 0{\cdot}000089$$

$$= 0{\cdot}054029$$

ஆனல் $f'(x) = \frac{1}{h} F'(u)$

இங்கு $x = 1{\cdot}0 \quad \therefore\ u = \frac{1 - 1.0}{0{\cdot}2} = 0.$

$$\therefore\ f'(1)=\frac{1}{0\cdot1}F'(0)$$
$$=\frac{1}{0\cdot1}(0\cdot054029)$$
$$=0\cdot54029.$$

மாதிரி 115

கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து $f'(0\cdot03)$, $f''(0\cdot03)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

x:	0·00	0·01	0·02	0·03	0·04	0·05
f(x):	0·8862	0·8762	0·8662	0·8562	0·8463	0·8363

(சென்னை '61 செப்.)

0·03 ஐ ஆதியாகக் கொண்டு $u=\frac{x-0\cdot03}{0\cdot03}$ என்று மாற்றி வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்கவும்.

u	F(u)	△F(u)	△²F(u)	△³ F (u)	△⁴F(u)	△⁵F(u)
−3	0·8862					
		−0·0100				
−2	0·8762		0·0000			
		−0·0100		0·0000		
−1	0·8662		0·0000		0·0001	
		−0·0100		0·0000		−0·0004
0	0·8562		0·0001		−0·0003	
		−0·0099		−0·0002		
1	0·8463		−0·0001			
		−0·0100				
2	0·8363					

ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டிலிருந்து

$$F'(0)=\frac{\triangle F(0)+\triangle F(-1)}{2}-\frac{1}{6}\left[\frac{\triangle^3 F(-1)+\triangle^3 F(-2)}{2}\right]+\ldots..$$
$$=\frac{-0\cdot0099-0\cdot0100}{2}-\frac{1}{12}\left[-0\cdot0002+0\cdot0001\right]$$
$$=-0\cdot00995+0\cdot000008$$
$$=-0\cdot009942$$

ஆனல் $f'(x) = \frac{1}{h}F'(u) = \frac{1}{0{\cdot}01}F'(u)$

$x = 0{\cdot}03$ என்ருல் $u = 0$. ஆகவே,

$$f'(0{\cdot}03) = \frac{1}{0{\cdot}01}\cdot F'(0) = \frac{-0{\cdot}009942}{0{\cdot}01} = -0{\cdot}9942$$

மேலும்,

$$\begin{aligned} F''(0) &= \triangle^2 F(-1) - \tfrac{1}{12}\triangle^4 F(-2) + \dots\dots\dots \\ &= 0{\cdot}0001 - \tfrac{1}{12}(-0{\cdot}0003) \\ &= 0{\cdot}0001 + 0{\cdot}000025 \\ &= 0{\cdot}000125 \end{aligned}$$

ஆனல் $f''(x) = \frac{1}{h^2}F''(u) = \frac{F''(u)}{0{\cdot}0001}$

$$\begin{aligned} \therefore\ f''(0{\cdot}03) &= \frac{F''(0)}{0{\cdot}0001} \\ &= \frac{0{\cdot}000125}{0{\cdot}0001} \\ &= 1{\cdot}25. \end{aligned}$$

மாதிரி 116

ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி

$$\frac{du_x}{dx} = \frac{2}{3}\left(u_{x+1} - u_{x-1}\right) - \frac{1}{12}\left(u_{x+2} - u_{x-2}\right) + \dots\dots\dots$$

என்று நிரூபிக்க.

ஸ்டெர்லிங் வாய்பாடு வருமாறு :

$$u_x = u_0 + \frac{x}{1!}\left[\frac{\triangle u_0 + \triangle u_{-1}}{2}\right] + \frac{x^2}{2!}\triangle^2 u_{-1} + \frac{x(x^2-1^2)}{3!}\left[\frac{\triangle^3 u_{-1} + \triangle^3 u_{-2}}{2}\right] + \dots\dots\dots\dots$$

இரு பக்கங்களிலும் x ஐக் குறித்து வகையீடு செய்க.

$$\frac{d}{dx}(u_x) = \frac{\triangle u_0 + \triangle u_{-1}}{2} + x\triangle^2 u_{-1} + \frac{3x^2-1}{6}\cdot\frac{\triangle^3 u_{-1} + \triangle^3 u_{-2}}{2} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

இப்பொழுது $x=0$ என்று பிரதியிடவும்.

$$u'_0 = \frac{\Delta u_0 + \Delta u_{-1}}{2} - \frac{1}{12}\left(\Delta^3 u_{-1} + \Delta^3 u_{-2}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ஆனால்
$$\begin{aligned}\Delta u_0 + \Delta u_{-1} &= (E-1)\,u_0 + (E-1)\,u_{-1}\\ &= E\,u_0 - u_0 + Eu_{-1} - u_{-1}\\ &= u_1 - u_0 + u_0 - u_{-1}\\ &= u_1 - u_{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^3 u_{-1} + \Delta^3 u_{-2} &= \Delta^3\,(u_{-1} + u_{-2})\\ &= (E-1)^3\,(u_{-1} + u_{-2})\\ &= (E^3 - 3\,E^2 + 3\,E - 1)\,(u_{-1} + u_{-2})\\ &= E^3\,(u_{-1} + u_{-2}) - 3\,E^2\,(u_{-1} + u_{-2})\\ &\qquad + 3\,E\,(u_{-1} + u_{-2}) - (u_{-1} + u_{-2})\\ &= (u_2 + u_1) - 3\,(u_1 + u_0)\\ &\qquad + 3\,(u_0 + u_{-1}) - (u_{-1} + u_{-2})\\ &= (u_2 - u_{-2}) - 2\,(u_1 - u_{-1})\end{aligned}$$

ஆகவே,

$$\begin{aligned}u'_0 &= \tfrac{1}{2}\,(u_1 - u_{-1}) - \tfrac{1}{12}\,[(u_2 - u_{-2}) - 2\,(u_1 - u_{-1})] + \ldots\ldots\ldots\\ &= \tfrac{1}{2}\,(u_1 - u_{-1}) + \tfrac{1}{6}\,(u_1 - u_{-1}) - \tfrac{1}{12}\,(u_2 - u_{-2}) + \ldots\ldots\ldots\\ &= \tfrac{2}{3}\,(u_1 - u_{-1}) - \tfrac{1}{12}\,(u_2 - u_{-2}) + \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

ஆதியை 0-இலிருந்து xக்கு மாற்றவும்.

$$\therefore\ u'_x = \tfrac{2}{3}\,(u_{x+1} - u_{x-1}) - \tfrac{1}{12}\,(u_{x+2} - u_{x-2}) + \ldots\ldots\ldots$$

மாதிரி 117

அசம இடைவெளிகளுக்குரிய வகையீட்டு வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து $f'(4)$, $f''(4)$, ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

x :	1	2	4	8	10
f (x) :	0	1	5	21	27

x இன் மதிப்புக்கள் அசம இடைவெளிகளிலிருப்பதால் வகுபட்ட வேறுபாட்டுப் பட்டியலை அமைக்கவும்.

x	f (x)	Δ f (x)	Δ^2 f (x)	Δ^3 f (x)	Δ^4 f (x)
1	0				
		1			
2	1		0·3333		
		2		0	
4	5		0·3333		−0·00694
		4		−0·0625	
8	21		−0·1667		
		3			
10	27				

வகுபட்ட வேறுபாட்டுப் பட்டியலிலிருந்து,

$$f'(x) = \Delta f(x_0) + (a_0 + a_1)\, \Delta^2 f(x_0) + (a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_0)\, \Delta^3 f(x_0)$$
$$+ (a_0 a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 a_0 + a_3 a_1 a_0)\, \Delta^4 f(x_0) + \ldots\ldots$$

இங்கு $x = 4$; $a_0 = x - x_0 = 4 - 1 = 3$

$a_1 = x - x_1 = 4 - 2 = 2$

$a_3 = x - x_2 = 4 - 4 = 0$

$a_4 = x - x_3 = 4 - 8 = -4$

$\Delta f(x_0) = 1$, $\Delta^2 f(x_0) = 0{\cdot}3333$, $\Delta^3 f(x_0) = 0$, $\Delta^4 f(x_0) = -0{\cdot}00694$

$$\therefore \quad f'(4) = 1 + 5\,(0{\cdot}3333) + 0 + (-24)\,(-0{\cdot}00694)$$
$$= 1 + 1{\cdot}6665 + 0{\cdot}16652$$
$$= 2{\cdot}83302$$

$$f''(x) = 2\, \Delta^2 f(x_0) + 2\,(a_0 + a_1 + a_2)\, \Delta^3 f(x_0)$$
$$+ 2\,(a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_0 + a_0 a_2 + a_3 a_1)\, \Delta^4 f(x_0)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \quad f''(4) = 2\,(0{\cdot}3333) + 2\,(5)\,(0) + 2\,(-14)\,(-0{\cdot}00694)$$
$$= 0{\cdot}6666 + 0{\cdot}19432$$
$$= 0{\cdot}86092.$$

பயிற்சி 23

1. கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் f(x) இன் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றிலிருந்து $f'(0)$ இன் மதிப்பைத் தோராயமாகப் பெறுக.

x :	0	1	2	3	4	5
f(x) :	43	40	38	42	45	50

(சென்னை '68 செப்.)

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள f(x) இன் மதிப்புக்களிலிருந்து f′(0) இன் மதிப்பைத் தோராயமாகப் பெறுக.

x:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(x):	488	516	545	574	602	630	658	686	714	742

(சென்னை '67 ஏப்.)

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து x=500 இல் $\log_e x$ இன் முதல், இரண்டாம் நிலை வகையீட்டுக் குணகங்களைக் காண்க.

x	$\log_e x$
500	6·214608
510	6·234411
520	6·253829
530	6·272877
540	6·291569
550	6·309918

4. கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து x=1 இல் dy/dx ஐக் காண்க.

x	y
1	0·198669
2	0·295520
3	0·389418
4	0·479425
5	0·564642
6	0·644217

(சென்னை '60 செப்., '64 செப்.)

5. எண்சார் வகையீடு காண ஒரு வாய்பாடு நிறுவுக. அவ் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட பட்டியலிலிருந்து f′(1·10) இன் மதிப்பைப் பெறுக.

x	f(x)
1·05	1·25386
1·06	1·26996
1·07	1·28619
1·08	1·30254
1·09	1·31903
1·10	1·33565

(சென்னை '61 ஏப்.)

6. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலிலிருந்து f′(0·85) இன் மதிப்பைக் காண்க.

x	f(x)
0	0·12750
0·2	0·13327
0·4	0·13941
0·6	0·14590
0·8	0·15275
1·0	0·15996

(சென்னை '63 செப்.)

7. கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து $f'(1\cdot85)$ ஐக் காண்க.

x	f(x)
1·0	−2·0000
1·2	−1·2442
1·4	−0·3763
1·6	0·2867
1·8	0·4666
2·0	0·0000

(சென்னை '62 ஏப்.)

8. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலிலிருந்து $f'(0\cdot04)$ ஐ மதிப்பிடுக.

x :	0·01	0·02	0·03	0·04	0·05	0·06
f(x) :	0·1023	0·1047	0·1071	0 1096	0·1122	0·1148

(ஆக்ரா எம். ஏ. '65)

9. $u_6 = 1\cdot556$, $u_7 = 1\cdot690$, $u_9 = 1\cdot908$, $u_{12} = 2\cdot158$ என்றால் வகுபட்ட வேறுபாடுகளைக் கொண்டு $x = 8$ இல் $\frac{du_x}{dx}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

(சென்னை '65 ஏப்.)

10. கீழ்க்காணும் மதிப்புக்களிலிருந்து அசம இடைவெளிகளுக்குரிய வகையீட்டு வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $x=5$ இல் $f'(x)$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	0	2	3	4	7	9
f(x) :	4	26	58	112	466	922

10. மீப்பெரிதும் மீச்சிறிதும்

(Maximum and Minimum)

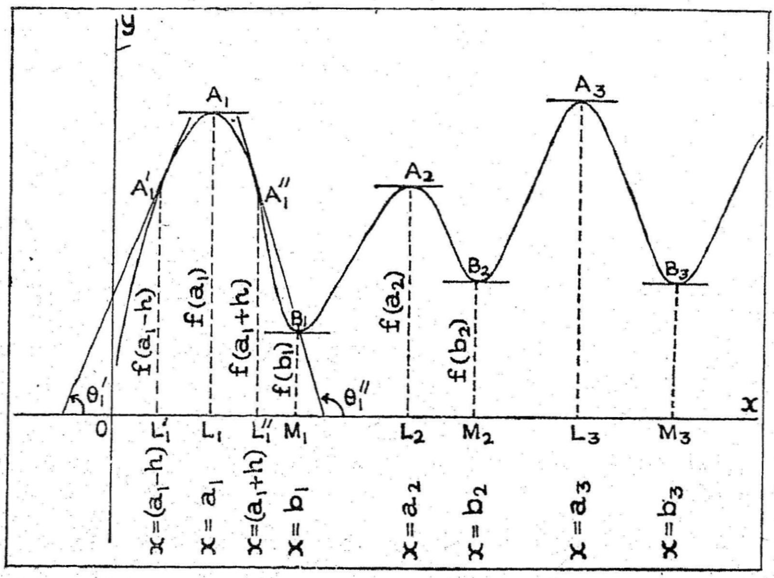
10.1 மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களுக்கான நிபந்தனைகள் (Conditions for maximum and minimum values)

$y=f(x)$ என்ற சார்பினைக் கருதுக. இச்சார்பில், x எடுத்துக் கொள்ளும் ஒவ்வொரு மதிப்புக்குமேற்ப அதற்குரிய ஒரு மதிப்பினை y பெறுகிறது. அவ்வாறு பெறப்படும் மதிப்புக்களில் சில மதிப்புக்கள் அவற்றையடுத்து நெருங்கியுள்ள மதிப்புக்களைவிட அதிகமாகவோ அல்லது குறைவாகவோயிருப்பதைக் காணலாம். இவ்வாறு $f(x)$ இன் ஒரு மதிப்பு அதனையடுத்து நெருங்கியுள்ள மதிப்புக்களை விட அதிகமானதாகயிருப்பின் அம்மதிப்பு $f(x)$ இன் மீப்பெரு (maximum) மதிப்பு எனப்படும். அதாவது, h என்பது ஒரு மிகச் சிறிய நேரெண்ணுனால், $x=a-h$, $x=a+h$ என்பன $x=a$ ஐ நெருங்கிய x-இன் மதிப்புக்களாகும். இம்மதிப்புக்களுக்குரிய y-இன் மதிப்புக்கள் முறையே $f(a-h)$, $f(a+h)$ ஆகும். $f(a)$ என்பது y-இன் மீப்பெரு மதிப்பானுல் இவ்விரு அடுத்துள்ள மதிப்புக்களும் $f(a)$-ஐவிடக் குறைவாக யிருக்கும்.

அதாவது, $f(a-h) < f(a) > f(a+h)$ ஆகும். இதுபோல், $f(a)$ என்பது y-இன் மீச்சிறு (minimum) மதிப்பானுல் $f(a-h)$, $f(a+h)$ ஆகிய மதிப்புக்கள் $f(a)$-ஐவிட அதிகமாக யிருக்கும்.

அதாவது, $f(a-h) < f(a) > f(a+h)$ ஆகும். இவ்வாறு ஒரு சார்பின் ஒரு மதிப்பு மீப்பெரிதாகவோ அல்லது மீச்சிறிதாகவோ யிருக்க வேண்டுமாயின், அம் மதிப்பை அதனையடுத்து நெருங்கி யுள்ள மதிப்புக்களுடன் மட்டுமே ஒப்பிட்டுப் பார்க்கின்ருேம். ஆகவே, $f(a)$ என்பது $f(x)$ இன் மீப்பெரு மதிப்பானுல், அது $f(x)$ பெறக்கூடிய எல்லா மதிப்புக்களைவிடவும் அதிகமாகயிருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. அதையடுத்து நெருங்கியுள்ள மதிப்புக் களைவிட அதிகமானதாகயிருந்தால் போதும். இதுபோல், $f(a)$

என்பது f(x) இன் மீச்சிறு மதிப்பானுல், அது f(x) பெறக்கூடிய எல்லா மதிப்புக்களைவிடவும் குறைவானதாகயிருக்க வேண்டுமென்பதில்லை; அதனையடுத்து நெருங்கியுள்ள மதிப்புக்களைவிடக் குறைவானதாகயிருந்தால் போதும். ஆகவே, ஒரு சார்பின் மதிப்புக்களில் பல மதிப்புக்கள் மீப்பெரு மதிப்புக்களாகவோ, அல்லது மீச்சிறு மதிப்புக்களாகவோ யிருக்கக்கூடிய சாத்திய மேற்படுகின்றது. $y=f(x)$ என்ற சார்பின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களை அச்சார்பின் வளைவை ஒரு வரை படத்தில் வரைந்தும் காணலாம். கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாதிரி வரை படத்தில் (படம்-15) A_1, A_2, A_3 என்பன $y=f(x)$ இன் மீப்பெரு மதிப்புக்களிருக்குமிடங்களையும், B_1, B_2, B_3 என்பன $y=f(x)$ இன் மீச்சிறு மதிப்புக்களிருக்குமிடங்களையும் குறிக்கின்றன. A_1, A_2, A_3 ஆகிய புள்ளிகளின் நிலைத் தூரங்கள் (ordinates) அச்சார்பின் மீப்பெரு மதிப்புக்களையும் B_1, B_2, B_3 ஆகிய புள்ளிகளின் நிலைத் தூரங்கள் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்புக்களையும் குறிக்கின்றன.



படம் 16

அதாவது, $A_1 L_1=f(a_1)$, $A_2 L_2=f(a_2)$, $A_3 L_3=f(a_3)$ ஆகியவை $y=f(x)$ இன் மீப்பெரு மதிப்புக்களாகும். $B_1M_1=f(b_1)$, $B_2 M_2=f(b_2)$, $B_3 M_3=f(b_3)$ ஆகியவை $y=f(x)$ இன் மீச்சிறு மதிப்புக்களாகும். படத்திலிருந்து $f(a_1-h) < f(a_1) > f(a_1+h)$

என்பதைத் தெளிவாகக் காணலாம். $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ ஆகிய புள்ளிகள் $y=f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளிகள் (turning points) ஆகும். இத்திரும்பற் புள்ளிகளில் $y=f(x)$ இன் வளைவுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் (tangents) x-அச்சுக்கு இணையாகயிருப்பதைக் காணலாம். எனவே, அத் தொடுகோடுகளின் சரிவுகள் (slopes) பூச்சியமாகின்றன. ஆனால், $y=f(x)$ என்ற சார்பின் வளைவிற்கு $x=x_1$ என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சரிவு $f'(x_1)$ என்று நாம் அறிவோம். ஆகவே, $f'(a_1)=f'(a_2)=f'(a_3)=0$; $f'(b_1)=f'(b_2)=f'(b_3)=0$ ஆகின்றன. பொதுவாக, $y=f(x)$ என்ற சார்பு $x=x_1$ என்ற புள்ளியில் மீப்பெரு மதிப்பை அல்லது மீச்சிறு மதிப்பைப் பெற வேண்டுமானல் $f'(x_1)=0$ ஆக வேண்டு மென்று தெரிகிறது.

மேலும், $x=a_1-h$, $x=a_1+h$-க்குரிய A_1', A_1'' என்ற புள்ளிகளைக் கருதுக. இப்புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடுகோடுகளுக்கும் x-அச்சுக்குமிடையேயுள்ள கோணங்களை முறையே θ_1', θ_1'' என்று கொள்க. ஆகவே, இத் தொடுகோடுகளின் சரிவுகள் முறையே $\tan\theta_1'$, $\tan\theta_2''$ ஆகும். படத்திலிருந்து, θ_1' என்பது குறுங்கோணம் என்றும், θ_1'' என்பது விரிகோணம் என்றும் அறிகிறோம். ஆகவே, $\tan\theta_1'$ என்பது நேரெண்ணுகவும், $\tan\theta_1''$ என்பது எதிரெண்ணுகவுமிருக்கும். அதாவது, $f'(a_1-h)$ என்பது நேரெண்ணுகவும், $f'(a_1+h)$ என்பது எதிரெண்ணுகவுமிருக்கும். மேலும் $f'(a_1)=0$ என்று கண்டோம். ஆகவே, x-இன் மதிப்பு (a_1-h)இலிருந்து a_1 வழியே (a_1+h)க்குக் கூடும்போது $f'(x)$ இன் மதிப்பு நேரெண்ணிலிருந்து பூச்சியத்தின் வழியே எதிரெண்ணுக மாறுகிறது. அதாவது, $f'(x)$ என்பது $x=a_1$ க்குப் பக்கத்தில் ஒரு "குறையுஞ் சார்பு" (decreasing function) என்று தெரிகிறது. ஆகவே, $x=a_1$ இல் $f'(x)$ இன் வகைக்கெழு (differential coefficient) எதிர் அடையாளமுள்ளதாகயிருக்கும்.

அதாவது, $x=a_1$ இல் $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஒரு எதிரெண்ணுகும்.

அதாவது, $f''(a_1) < 0$.

ஆகவே, $y=f(x)$ என்ற சார்பு $x=a_1$ இல் மீப்பெரு மதிப்பைப் பெற வேண்டுமாயின் கீழ்க்கண்ட இரண்டு நிபந்தனையைப் பூர்த்தி செய்ய வேண்டும்.

(i) $x=a_1$ இல் $y=f(x)$ இன் முதல் வகையீடு பூச்சியமாக வேண்டும். அதாவது, $f'(a_1)=0$ ஆக வேண்டும்.

(ii) $x=a_1$ இல் $y=f(x)$ இன் இரண்டாம் நிலை வகையீடு எதிர் அடையாளமுள்ளதாகயிருக்க வேண்டும். அதாவது, $f''(a_1) < 0$ ஆகயிருக்க வேண்டும்.

இவ்விரு நிபந்தனைகளும் பூர்த்தியானுல், $f(a_1)$ என்பது $y=f(x)$ இன் ஒரு மீப்பெரு மதிப்பாகும்.

இதுபோன்று, $y=f(x)$ என்ற சார்பு $x=b_1$ இல் மீச்சிறிதாக யிருக்க வேண்டுமாயின் அச் சார்பு கீழ்க்கண்ட இரண்டு நிபந்தனை களையும் பூர்த்தி செய்ய வேண்டும் என்பதைக் காணலாம்.

(i) $x=b_1$ இல் $y=f(x)$ இன் முதல் வகையீடு பூச்சியமாக வேண்டும். அதாவது, $f'(b_1)=0$ ஆக வேண்டும்.

(ii) $x=b_1$ இல் $y=f(x)$ இன் இரண்டாம் நிலை வகையீடு நேர் அடையாளமுள்ளதாகயிருக்க வேண்டும். அதாவது, $f''(b_1) > 0$ ஆகயிருக்க வேண்டும்.

இவ்விரு நிபந்தனைகளும் பூர்த்தியானுல் $f(b_1)$ என்பது $y=f(x)$ இன் ஒரு மீச்சிறு மதிப்பாகும்.

10.2 மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைக் காணல்

$y=f(x)$ என்ற சார்பின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைக் காண வேண்டுமெனக் கொள்வோம். மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களுக் குரிய x-இன் மதிப்புக்களில் $f(x)$ இன் முதல் வகையீடு பூச்சியமாகு மாதலால், $y=f(x)$ஐ வகையீடு செய்து $\frac{dy}{dx} = f'(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டை அமைத்து, அதன் மூலங்களைக் காண வேண்டும். $x=a, b$ என்பன $f'(x)=0$ இன் மூலங்களெனக் கொள்க. ஆகவே, $x=a$, $x=b$ ஆகியவற்றிற்குரிய $f(x)$ இன் மதிப்புக்கள் மீப்பெரி தாகவோ அல்லது மீச்சிறிதாகவோ இருக்க வேண்டும். பின்னர், $f'(x)$ஐ மீண்டும் வகையீடு செய்து $f''(x)$ஐக் காண வேண்டும். $f''(x)$ இல் $x=a$, $x=b$ ஆகிய மதிப்புக்களைத் தனித்தனியே பிரதி யிட்டு $f''(a)$, $f''(b)$ ஆகிய மதிப்புக்களைப் பெற வேண்டும். இம் மதிப்புக்களில் எதிர் அடையாளமுள்ளது மீப்பெரு மதிப்புக்குரிய தாகவும், நேர் அடையாளமுள்ளது மீச்சிறு மதிப்புக்குரியதாகவும் இருக்கும். அதாவது, $f''(a) < 0$ என்ருல் $x=a$ இல் $f(x)$ மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறுகிறது என்று தெரிந்து கொள்ளலாம். மேலும் $f(a)$ என்பது $f(x)$ இன் மீப்பெரு மதிப்பாகும். இதுபோல், $f''(b) > 0$ என்ருல் $x=b$ இல் $f(x)$ மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறது என்று தெரிந்து கொள்ளலாம். மேலும் $f(b)$ என்பது $f(x)$ இன் மீச்சிறு மதிப்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$f(x)=x^3+3x^2-9x+6$$

என்ற சார்பின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைக் காண வேண்டு மெனக் கொள்வோம். இருபக்கமும் x ஐக்குறித்து வகையிட்டு, பூச் சியத்திற்குச் சமன்படுத்தி, அச்சமன் பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

$$f'(x)=3x^2+6x-9=0$$

அதாவது, $3(x^2+2x-3)=0$

$$3(x-1)(x+3)=0$$

$$\therefore x=1, -3.$$

ஆகவே, $x=1, -3$ ஆகிய மதிப்புக்களில் f (x) மீப்பெரு மதிப்பையோ அல்லது மீச்சிறு மதிப்பையோ பெறுகிறது. இப் பொழுது, $f'(x)$ ஐ மீண்டும் x ஐக் குறித்து வகையிடவும்.

$$f''(x)=3(2x+2)=6(x+1)$$

$x=1$ இல் $f''(x)=f''(1)=6(1+1)=12>0$.

$\therefore x=1$ இல் f (x) மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறது.

ஆகவே, f (x) இன் மீச்சிறு மதிப்பு $=f(1)=1+3-9+6=1$

$x=-3$ இல் $f''(x)=f''(-3)=6(-3+1)=-12<0$.

$\therefore x=-3$ இல் f (x) மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறுகிறது.

ஆகவே, f (x) இன் மீப்பெருமதிப்பு $=f(-3)=-27+27+27+6=33$

10.3. எண்ணியல் முறையில் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைக் காணல்

f (x) இன் அமைப்புக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் மேற்கூறப்பட்ட முறையில் f (x) இன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைக் காணலாம். ஆனால் f (x) இன் அமைப்புக் கொடுக்கப்படாமல் அதற்குப் பதிலாக, x இன் சில மதிப்புக்களுக்குரிய f (x) இன் மதிப்புக்களடங்கிய பட்டி யல் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் f (x) இன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக் களைக்காண எண்ணியல் முறை (numerical method) பயன் படுத்தப் படுகிறது. கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் மதிப்புக்களிலிலிருந்து முதலில் f (x) இன் அமைப்பைக் காண வேண்டும். பின்னர், மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முறையில் f (x) இன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக் களைப் பெறலாம். பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து f (x) இன் அமைப்பைக் காண ஏதாவது ஒரு பொருத்தமான இடைச் செருகல் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்த வேண்டும். முதலில் கொடுக்கப் பட்டுள்ள மதிப்புக்களுக்குச் சாதாரண வேறுபாட்டுப் பட்டிய லமைக்க வேண்டும். ஏதாவது ஒரு நிலை வேறுபாடுகள் யாவும்

மாறிலியாகயிருந்தால், நியூட்டனின் முன்வேக வாய்பாட்டைப் பயன் படுத்தி f(x) இன் அமைப்பைக் காணலாம். ஆனால் எந்த நிலை வேறுபாடுகளும் மாறிலியாகயில்லாவிடில், கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலில் எந்த இடத்தில் f(x) இன் மதிப்புக் குறைந்து கொண்டே வந்து கூடத் தொடங்குகிறதோ அல்லது கூடிக் கொண்டே வந்து குறையத் தொடங்குகிறதோ அந்தத் திரும்பு மதிப்பைக் (turning value) காண வேண்டும். அத்திரும்பு மதிப்பையடுத்து முறையே f(x) இன் மீச்சிறு மதிப்போ அல்லது மீப்பெரு மதிப்போ அமைந்திருக்கும். பின்னர், அத்திரும்பு மதிப்புக்குரிய x இன் மதிப்பை ஆதியாகக் கொண்டு வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைத்து, ஸ்டெர்லிங் அல்லது பெஸ்ஸல்-இன் மைய வேறுபாட்டு வாய்பாட்டைப் பயன் படுத்தி f(x) இன் அமைப்பைக் காண வேண்டும். பின்னர், மேற் கூறப்பட்ட முறையில் f(x) இன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைக் காணலாம். கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாதிரிக் கணக்குகளில் இம் முறை நன்கு விளக்கப்பட்டுள்ளது.

மாதிரி 118

கீழே பட்டியல் படுத்தப் பட்ட சார்பு f(x) இன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைக் காண்க.

x :	0	1	2	3	4	5
f(x) :	0	0·25	0	2·25	16·00	56·25

(சென்னை '62 ஏப்., 64 செப்.)

முதலில் வேறுபாட்டுப் பட்டியலை அமைக்கவும்.

x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0	0				
		0·25			
1	0·25		—0·50		
		—0·25		3·0	
2	0		2·50		6·00
		2·25		9·00	
3	2·25		11·50		6·00
		13·75		15·00	
4	16·00		26·50		
		40·25			
5	56·25				

நான்காம் நிலை வேறுபாடுகள் மாறிலியாகயிருப்பதால், f (x) ஒரு நான்காம் படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். ஆகவே,

நியூட்டனின் முன்வேக வாய்பாட்டிலிருந்து,

$$f(x)=f(0)+x\Delta f(0)+\frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(0)+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 f(0)+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}\Delta^4 f(0)$$

$$=0+0{\cdot}25x+\frac{x(x-1)}{2}(-0{\cdot}50)+\frac{x(x-1)(x-2)}{6}(3)+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}(6)$$

$$=0{\cdot}25x-0{\cdot}25x(x-1)+\frac{1}{2}x(x-1)(x-2)+\frac{1}{4}(x-1)(x-2)(x-3)$$

இருபக்கங்களிலும் x ஐக் குறித்து வகையீடு செய்யவும்.

$$f'(x)=0{\cdot}25-0{\cdot}25(2x-1)+\frac{1}{2}(3x^2-6x+2)+\frac{1}{4}x(4x^3-18x^2+22x-6)$$

$$=0{\cdot}50-0{\cdot}50x+\frac{1}{2}(3x^2-6x+2)+\frac{1}{2}(2x^3-9x^2+11x-3)$$

$$=0{\cdot}50-0{\cdot}50x+\frac{1}{2}(2x^3-6x^2+5x-1)$$

$$=\frac{1}{2}(2x^3-6x^2+4x)$$

மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்புக்கு $f'(x)=0$.

$\therefore\ 2x^3-6x^2+4x=0.$

அதாவது, $2x(x^2-3x+2)=0.$

$2x(x-1)(x-2)=0.$

$\therefore\ x=0,\ 1,\ 2.$

மேலும், $f''(x)=\frac{1}{2}(6x^2-12x+4)=3x^2-6x+2.$

$x=0$ ஆனால், $f''(0)=2>0.$

$\therefore$ $x=0$ இல் $f(x)$ இன் மீச்சிறு மதிப்பு $=f(0)=0.$

$x=1$ ஆனுல், $f''(1)=3-6+2=-1<0$

$\therefore$ $x=1$ இல் f (x) இன் மீப்பெரு மதிப்பு$=f(1)=0{\cdot}25$.

$x=2$ ஆனுல், $f''(2)=12-12+2=2>0$.

$\therefore$ $x=2$ இல் f (x) இன் மீச்சிறு மதிப்பு$=f(2)=0{\cdot}50-0{\cdot}50=0$.

மாதிரி 119

கீழே பட்டியல் படுத்தப்பட்டுள்ள f (x) இன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைக் காண்க.

x :	—0·5	0·5	1·5	2·5	3·5
f(x) ;	—13·125	—1·875	—0·375	—0·375	1·875

(சென்னை 62 செப்.)

முதலில் வேறுபாட்டுப் பட்டியலை அமைக்கவும்.

x	f (x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
—0·5	—13·125			
		11·250		
0·5	— 1·875		—9	
		2·250		6
1·5	0·375		—3	
		—0·750		6
2·5	—0·375		3	
		2·250		
3·5	1·875			

மூன்ரும் நிலை வேறுபாடுகள் மாறிலியாகயிருப்பதால், f (x) ஒரு மூன்ரும் படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

$a=-0{\cdot}5$ ஐ ஆதியாகக் கொண்டு $u=\dfrac{x-a}{h}=\dfrac{x+0{\cdot}5}{1}$ என்று மாற்றி நியூட்டனின் முன்வேக வாய்பாட்டைப் பயன் படுத்துக.

$$f(x)=f(a)+u\,\Delta f(a)+\frac{u(u-1)}{2}\Delta^2 f(a)+\frac{u(u-1)(u-2)}{6}\Delta^3 f(a).$$

$=\mathbf{F}(u)$ எனக் கொள்க.

இருபக்கமும் x ஐக் குறித்து வகையிடவும்.

$$\therefore\ f'(x)=F'(u)\ \frac{d_y}{d_x}=F'(u).\ \frac{1}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\left[\triangle f(a)+\frac{(2u-1)}{2}\triangle^2 f(a)\right.$$

$$\left.+\frac{(3u^2-6u+2)}{6}\triangle^3 f(a)\right]$$

மீண்டும் x ஐக் குறித்து வகையிடவும்.

$$f''(x)=\frac{1}{h^2}\ .\ F''(u)$$

$$=\frac{1}{h^2}\left[\triangle^2 f(a)+(u-1)\triangle^3 f(a)\right]$$

மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்புக்கு $f'(x)=0$.

$$\therefore\ \frac{1}{h}\left[\triangle f(a)+\frac{(2u-1)}{2}\triangle^2 f(a)+\frac{(3u^2-6u+2)}{6}\triangle^3 f(a)\right]=0.$$

இங்கு $a=-0{\cdot}5$; $\triangle f(a)=11{\cdot}250$, $\triangle^2 f(a)=-9$; $\wedge^3 f(a)=6$.

$$\therefore\ 11{\cdot}25-\frac{9}{2}(2u-1)+(3u^2-6u+2)=0$$

அதாவது, $3u^2-15u+17{\cdot}75=0$.

$$\therefore\ u=\frac{15\pm\sqrt{225-213}}{6}$$

$$=\frac{15\pm2\sqrt{3}}{6}=3{\cdot}077,\ \ 1{\cdot}923.$$

$u=x+0{\cdot}5 \quad \therefore \quad x=u-0{\cdot}5.$

$\therefore\ u=3{\cdot}077$ ஆனால் $x=3{\cdot}077-0{\cdot}5=2{\cdot}577$

$u=1{\cdot}923$ ஆனால் $x=1{\cdot}923-0{\cdot}5=1{\cdot}423.$

இப்பொழுது, $f''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\triangle^2 f(a)+(u-1)\ \triangle^3 f(a)\right]$

$$=\frac{1}{1}\left[-9+(u-1)\,6\right]$$

$$=6u-15.$$

$\therefore\ u=3{\cdot}077$ ஆனால், $f''(x)=6\ (3{\cdot}077)-15=18{\cdot}462-15>0.$

$\therefore\ u=3{\cdot}077$ அல்லது $x=2{\cdot}577$ ஆகயிருக்கும்போது

f (x) இன் மதிப்பு மீச்சிறிதாகிறது. ஆகவே,

x=2·577 இல் f(x) இன் மீச்சிறு மதிப்பு=

$$f(a)+u\,\Delta f(u)+\frac{u(u-1)}{2}\Delta^2 f(a)+\frac{u(u-1)(u-2)}{6}\Delta^3 f(a)$$

$$=-13{\cdot}125+(3{\cdot}077)\,(11{\cdot}25)+\frac{(3{\cdot}077)\,(2{\cdot}077)}{2}(-9)+\frac{(3{\cdot}077)\,(2{\cdot}077)\,(1{\cdot}077)}{6}(6)$$

$$=-13{\cdot}125+34{\cdot}61625-28{\cdot}75918+6{\cdot}88303$$

$$=-0{\cdot}3849.$$

x= 1·423 ஆகயிருக்கும்போது, u=1·923.

$$\therefore\ f''(x)=6\,(1{\cdot}923)-15=11{\cdot}538-15<0.$$

∴ u=1·923 அல்லது x=1·423 ஆகயிருக்கும்போது f (x) இன் மதிப்பு மீப் பெரிதாகிறது.

x=1·423 இல் f (x) மீப் பெரு மதிப்பு=

$$=-13{\cdot}125+(1{\cdot}923)\,(11{\cdot}25)+\frac{(1{\cdot}923)\,(0{\cdot}923)}{2}(-9)+\frac{(1{\cdot}923)\,(0{\cdot}923)\,(-0{\cdot}077)}{6}(6)$$

$$=-13{\cdot}125+21{\cdot}63375-7{\cdot}98718-0{\cdot}13667$$

$$=0{\cdot}3849$$

மாதிரி 120

கீழே பட்டியல் படுத்தப்பட்டுள்ள சார்பு f (x) இன் மீப் பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைக் காண்க.

x :	0	0·2	0·4	0·6	0·8	1·0	1·2	1·4
f (x) :	1·23	0·32	−0·35	−0·05	0·08	1·25	1·01	0·00

(சென்னை '63 செப்.)

f (x) இன் மதிப்பு—0·35 வரை இறங்கிச் சென்று பின் ஏறத் தொடங்குகின்றது. ஆகவே, x=0·4 இன் அருகே f (x) மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறது. மேலும், 1·25 வரை ஏறிக் கொண்டிருக்கும் மதிப்பு அதன் பின்னர் இறங்கத் தொடங்குகிறது. ஆகவே, x=1·0 இன் அருகே f (x) மீப் பெரு மதிப்பைப் பெறுகிறது.

முதலில் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்போம். 0·4 ஆதியாகக் கொண்டு $u=\dfrac{x-0{\cdot}4}{0{\cdot}2}$ என்று மாற்றி வேறுபாட்டுப் பட்டியலமைக் கவும்.

x	u	f (x) = F (u)	△F (u)	△² F (u)	△³ F (u)	△⁴ F (u)
0	−2	1·23				
			−0·91			
0·2	−1	0·32		0·24		
			−0·67		0·73	
0·4	0	−0·35		0·97		−1·87
			0·30		−1·14	
0·6	1	−0·05		−0·17		2·35
			0·13		1·21	
0·8	2	0·08		1·04		−3·66
			1·17		−2·45	
1·0	3	1·25		−1·41		3·09
			−0·24		0·64	
1·2	4	1·01		−0·77		
			−1·01			
1·4	5	0·00				

நியூட்டன்-ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்துக.

$$f(x) = F(u) = F(0) + \frac{u}{1!}\left[\frac{\triangle F(0) + \triangle F(-1)}{2}\right] + \frac{u^2}{2!}\triangle^2 F(-1)$$

$$+ \frac{u(u^2-1^2)}{3!}\left[\frac{\triangle^3 F(-1) + \triangle^3 F(2)}{2}\right] + \frac{u^2(u^2-1^2)}{4!}\triangle^4 F(-2) + \ldots$$

இருபக்கங்களிலும் x ஐக் குறித்து வகையீடு செய்க.

$$u = \frac{x-a}{h}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{1}{h}$$

இப்பொழுது, $f(x) = F(u)$

$$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}F(u) = \frac{1}{h}F'(u)$$

$$\therefore h f'(x) = F'(u)$$

$$= \frac{\triangle F(0) + F(-1)}{2} + u \triangle^2 F(-1)$$

$$+ \frac{3u^2-1}{6}\left[\frac{\triangle^3 F(-1) + \triangle^3 F(-2)}{2}\right]$$

$$+ \frac{u(2u^2-1)}{12}\triangle^4 F(-2) + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{0{\cdot}30-0{\cdot}67}{2} + 0{\cdot}97\,u + \frac{3u^2-1}{6}\left[\frac{-1{\cdot}14+0{\cdot}73}{2}\right] + \frac{u\,(2u^2-1)}{12}(-1{\cdot}87)$$

$$= -0{\cdot}185 + 0{\cdot}97u - 0{\cdot}034\,(3u^2-1) - 0{\cdot}156u\,(2u^2-1)$$
$$= -0{\cdot}312u^3 - 0{\cdot}102u^2 + 1{\cdot}126u - 0{\cdot}151$$

மீச்சிறு மதிப்புக்கு $f'(x)=0$. ஆகவே,

$$0{\cdot}312u^3 + 0{\cdot}102u^2 - 1{\cdot}126u + 0{\cdot}151 = 0$$

அல்லது, $312u^3 + 102u^2 - 1126u + 151 = 0$

முதல் தோராயமாக, $-1126u + 151 = 0$

$$\therefore\ u = \frac{151}{1126} = 0{\cdot}1342 = u_1$$ எனக் கொள்க

இரண்டாவது தோராயமாக,

$$102u^2 - 1126u + 151 = 0$$
$$u\,(102u - 1126) = -151$$

அடைப்புக்குள் $u = u_1 = 0{\cdot}1342$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore\ u\,[102(0{\cdot}1342) - 1126] = -151$$
$$u\,(13{\cdot}6884 - 1126) = -151$$
$$-1112{\cdot}3116u = -151$$
$$u = \frac{151}{1112{\cdot}3116}$$
$$= 0{\cdot}1358 = u_2$$ எனக் கொள்க.

மூன்றாவது தோராயமாக,

$$u\,(312u^2 + 102u - 1126) = -151$$

$$\therefore\ u = \frac{-151}{312u^2 + 102u - 1126}$$
$$= \frac{-151}{312\,(0{\cdot}1358)^2 + 102\,(0{\cdot}1358) - 1126}$$
$$= 0{\cdot}1365$$

ஆனால் $u = \frac{x-0{\cdot}4}{0{\cdot}2}$

$$\therefore\ x = 0{\cdot}2u + 0{\cdot}4$$
$$= 0{\cdot}2\,(0{\cdot}1365) + 0{\cdot}4$$
$$= 0{\cdot}4273$$

$\therefore$ f (x) இன் மீச்சிறு மதிப்பு $= f(0{\cdot}4273) = F(0{\cdot}1365)$.

$$= -0{\cdot}35 + 0{\cdot}1365\,(-0{\cdot}185) + \tfrac{1}{2}(0{\cdot}1365)^2\,(0{\cdot}97)$$
$$+ \tfrac{1}{6}\,(0{\cdot}1865)\,[(0{\cdot}1365)^2 - 1]\,(-0{\cdot}205)$$
$$+ \tfrac{1}{24}\,(0{\cdot}1365)^2\,[(0{\cdot}1365)^2 - 1]\,(-1{\cdot}87)$$
$$= -0{\cdot}3602$$

f (x) இன் மீப்பெரு மதிப்பைக் காண x = 1 ஐ ஆதியாகக் கொண்டு, $u = \dfrac{x-1}{0{\cdot}2}$ என்று மாற்றி வேறுபாட்டுப் பட்டியலமைக்கவும்.

x	u	f (x) = F (u)	$\triangle F(u)$	$\triangle^2 F(u)$	$\triangle^3 F(u)$	$\triangle^4 F(u)$
0	−5	1·23				
			—0·91			
0·2	—4	0·32		0·24		
			—0·67		0·73	
0·4	—3	—0·35		0·97		−1·87
			0·30		—1·14	
0·6	—2	—0·05		—0·17		2·35
			0·13		1·21	
0·8	—1	0·08		1·04		—3·66
			1·17		—2·45	
1·0	0	1·25		—1·41		3·09
			−0·24		0·64	
1·2	1	1·01		−0·77		
			−1·01			
1·4	2	0·00				

நியூட்டன்-ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டிலிருந்து,

$$h\,f'(x) = \frac{\triangle F(0) + \triangle F(-1)}{2} + u\,\triangle^2 F(-1)$$
$$+ \frac{3u^2-1}{6}\left[\frac{\triangle^3 F(-1) + \triangle^3 F(-2)}{2}\right]$$
$$+ \frac{u\,(2u^2-1)}{12}\triangle^4 F(-2) + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{-0{\cdot}24 + 1{\cdot}17}{2} + u\,(-1{\cdot}41) + \frac{1}{12}\,(3u^2-1)\left[0{\cdot}64 - 2{\cdot}45\right]$$
$$+ \frac{1}{12}u\,(2u^2-1)\,(3{\cdot}09)$$
$$= 0{\cdot}465 - 1{\cdot}41u - 0{\cdot}1508\,(3u^2-1) + 0{\cdot}2575u\,(2u^2-1)$$
$$= 0{\cdot}5150u^3 - 0{\cdot}4524u^2 - 1{\cdot}6675u + 0{\cdot}6158$$

மீப்பெரு மதிப்புக்கு $f'(x)=0$ ஆகயிருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \quad 5150u^3-4524u^2-16675u+6158=0.$$

முதல் தோராயமாக, $-16675u+6158=0$

$$\therefore \; u=\frac{6158}{16675}=0{\cdot}3693.$$
$$=u_1.$$

இரண்டாவது தோராயமாக,

$$-4524u^2-16675u+6158=0.$$
$$4524u^2+16675u=6158$$

அதாவது, $u\,(4524u_1+16675)=6158$

$$\therefore \; u=\frac{6158}{4524\,(0{\cdot}3693)+16675}$$
$$=0{\cdot}3356=u_2.$$

மூன்ருவது தோராயமாக,

$$u\;(5150u_2^2-4524\,u_2-16675)=-6158$$

$$\therefore \quad u=\frac{-6158}{5150\,(0{\cdot}3356)^2-4524\,(0{\cdot}3356)-16675}$$
$$=0{\cdot}3496$$

$$\therefore \quad x=0{\cdot}2u+1=1{\cdot}0699$$

$x=1{\cdot}0699$ இல் $f(x)$ இன் மீப்பெரு மதிப்பு $=f\,(1{\cdot}0699)=F\,(0{\cdot}3496)$

$$=1{\cdot}25+(0{\cdot}3496)\left[\frac{-0{\cdot}24+1{\cdot}17}{2}\right]+\frac{(0{\cdot}3496)^2}{2}(-1{\cdot}41)$$
$$+\frac{1}{12}(0{\cdot}3496)\,[(0{\cdot}3496)^2-1]\,[0{\cdot}64-2{\cdot}45]$$
$$+\frac{1}{24}(0{\cdot}3496)^2\,[(0{\cdot}3496)^2-1]\,(3{\cdot}09)$$
$$=1{\cdot}3569.$$

மாதிரி 121

கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து $f(x)$ இன் மீப்பெரு மதிப்பினைக் காண்க.

x:	1	2	3	4	5	6	7
f(x):	4774	4968	5104	5183	5208	5181	5104

(சென்னை '68 ஏப்.)

f (x) இன் மதிப்பு 5208 வரை ஏறிக்கொண்டே சென்று பின் இறங்கத் தொடங்குகின்றது. எனவே, f (x) இன் மீப்பெரு மதிப்பு x=5 ஐ நெருங்கியுள்ளது. ஆகவே, x=5 ஐ ஆதியாகக் கொண்டு, $u=\frac{x-5}{1}$ என்று மாற்றி வேறுபாட்டுப் பட்டியலமைக்கவும்.

x	u	f(x)=F(u)	△F(u)	△² F(u)	△³ F(u)	△⁴ F(u)	△⁵ F(u)
1	−4	4774					
			194				
2	−3	4968		−58			
			136		1		
3	−2	5104		−57		2	
			79		3		−3
4	−1	5183		−54		−1	
			25		2		1
5	0	5208		−52		0	
			−27		2		
6	1	5181		−50			
			−77				
7	2	5104					

நியூட்டன்-பெஸ்ஸல் வாய்பாட்டிலிருந்து,

$$f(x)=F(u)=\frac{F(0)+F(1)}{2}+(u-\tfrac{1}{2})\,\triangle F(0)$$
$$+\frac{u(u-1)}{2!}\left[\frac{\triangle^2 F(-1)+\triangle^2 F(0)}{2}\right]$$
$$+\frac{u(u-\frac{1}{2})(-1)}{3!}\triangle^3 F(-1)$$
$$+\frac{(u+1)\,u\,(u-1)\,(u-2)}{4!}\left[\frac{\triangle^4 F(-2)+\triangle^4 F(-1)}{2}\right]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

இரு பக்கங்களிலும் x ஐக் குறித்து வகையிடவும்.

$$h\,f'(x)=F'(u)=\triangle F(0)+\frac{2u-1}{2}\left[\frac{\triangle^2 F(-1)+\triangle^2 F(0)}{2}\right]$$
$$+\frac{6u^2-6u+1}{12}\triangle^3 F(-1)+\ldots\ldots\ldots$$

$$= -27 + \frac{2u-1}{2}\left[\frac{-52-50}{2}\right] + \frac{6u^2-6u+1}{12}\ (2)$$

$$= -27 - \frac{51}{2}\ (2u-1) + \frac{1}{6}\ (6u^2-6u+1)$$

மீப்பெரு மதிப்புக்கு $f'(x)=0$ ஆகயிருக்கவேண்டும்.

$$\therefore\ 0 = -27 - \frac{51}{2}\ (2u-1) + \frac{1}{6}\ (6u^2-6u+1)$$

$$0 = -162 - 153\ (2u-1) + 6u^2 - 6u + 1$$

$$\therefore\ 6u^2 - 312u - 8 = 0$$

$$3u^2 - 156u - 4 = 0$$

$$\therefore\ u = -0{\cdot}02563$$

$$\therefore\ x = 5 - 0{\cdot}02563$$

$$= 4{\cdot}97437$$

$\therefore$ $x=4{\cdot}97437$ இல் $f(x)$ இன் மீப்பெரு மதிப்பு $=f(4{\cdot}97437)$

$$= F(-0{\cdot}02563)$$

$$= \frac{5208+5182}{2} + (-0{\cdot}52563)\ (-27)$$

$$+ \frac{(-0{\cdot}02563)\ (-1{\cdot}02563)}{6}\left[\frac{-52-50}{2}\right]$$

$$+ \frac{(0{\cdot}02563)\ (-0{\cdot}52563)\ (-1{\cdot}02563)}{6}\ (2) + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 5195 + 14{\cdot}19201 - 0{\cdot}67050 - 0{\cdot}00461$$

$$= 5208{\cdot}5169$$

மாதிரி 122

$3x^4-4x^3-6x^2-24x+1$ என்ற சார்பிற்கு $x=1{\cdot}5$க்கும், $x=2{\cdot}5$க்குமிடையே $0{\cdot}1$ சம இடைவெளி மதிப்புக்களில் ஒரு வேறுபாட்டுப் பட்டியலமைக்கவும். பட்டியல் படுத்தப்பட்ட மதிப்புக்களிலிந்து x இன் எந்த மதிப்புக்கு அச்சார்பு மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறதென்பதையும் அந்த மீச்சிறு மதிப்பையும் காண்க.

(சென்னை ’66 செப்.)

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 24x + 1$$

$$f(1{\cdot}5) = 3\ (1{\cdot}5)^4 - 4\ (1{\cdot}5)^3 - 6\ (1{\cdot}5)^2 - 24(1{\cdot}5) + 1 = -46{\cdot}8125$$

இதுபோன்று $f(1\cdot6)=-49\cdot4832$; $f(1\cdot7)=-51\cdot7357$;
$f(1\cdot8)=-53\cdot4752$; $f(1\cdot9)=-54\cdot5997$;
$f(2\cdot0)=-55\cdot0000$; $f(2\cdot1)=-54\cdot5597$;
$f(2\cdot2)=-53\cdot1552$; $f(2\cdot3)=-50\cdot6557$;
$f(2\cdot4)=-46\cdot9232$; $f(2\cdot5)=-41\cdot8125$.

இம் மதிப்புக்களைக் கொண்டு கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியல் அமைக்கவும்.

f (x) இன் மதிப்பு —55·0000 வரை இறங்கிப் பின் ஏறுகிறது. ஆகவே, x = 2 இன் அருகில் f (x) மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறது.

ஆகவே, x = 2 ஐ ஆதியாகக் கொண்டு $u=\frac{x-2}{0\cdot1}$ என்று மாற்றி வேறுபாட்டுப் பட்டியலமைக்கவும்.

x	u	f (x)=F(u)	△F(u)	△²F(u)	△³F(u)	△⁴F(u)
1·5	—5	—46·8125				
			—2·6707			
1·6	—4	—49·4832		0·4182		
			—2·2525		0·0948	
1·7	—3	—51·7357		0·5130		0·0072
			—1·7395		0·1020	
1·8	—2	—53·4752		0·6150		0·0072
			—1·1245		0·1092	
1·9	—1	—54·5997		0·7242		0·0072
			—0·4003		0·1164	
2·0	0	—55·0000		0·8406		0·0072
			0·4403		0·1236	
2·1	1	—54·5597		0·9642		0·0072
			1·4045		0·1308	
2·2	2	—53·1552		1·0950		0·0072
			2·4995		0·1380	
2·3	3	—50·6557		1·2330		0·0072
			3·7325		0·1452	
2·4	4	—46·9232		1·3782		
			5·1107			
2·5	5	—41·8125				

நியூட்டன்-ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டிலிருந்து,

$$hf'(x)=F'(u)=\frac{\triangle F(0)+\triangle F(-1)}{2}+u\,\triangle^2 F(-)$$

$$+\frac{3u^2-1}{6}\left[\frac{\triangle^3 F(-1)+\triangle^3 F(-2)}{2}\right]+\frac{u\,(2u^2-1)}{12}\triangle^4 F(-2)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$f'(x)=0$ என்று சமன்படுத்தி, பட்டியலிலிருந்து மதிப்புக்களைப் பிரதியிடவும்.

$$0=\frac{0\cdot4403-0\cdot4003}{2}+u\,(0\cdot8406)+\frac{3u^2-1}{12}\left[0\cdot1236+0\cdot1164\right]+\frac{u\,(2u^2-1)}{12}(0\cdot0072)$$

$$=0\cdot0200+0\cdot8406u+0\cdot0200\;(3u^2-1)+0\cdot0006u\;(2u^2-1)$$

அதாவது, $0\cdot0012u^3+0\cdot0600u^2+0\cdot8400u=0.$

அதாவது, $12u^3+600u^2+8400=0$

$\therefore\ u=0$ (மற்றவை கற்பனை மூலங்கள்)

$u=0$ என்றால் $x=2\cdot0.$

$\therefore\ x=2\cdot0$ இல் $f(x)$ இன் மதிப்பு மீச்சிறிதாகிறது.

$f(x)$ இன் மீச்சிறு மதிப்பு $=f(2\cdot0)=-55.$

பயிற்சி 24

1. கீழே பட்டியல் படுத்தப்பட்ட சார்பின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைக் காண்க.

x:	—2	—1	0	1	2	3
y:	54	41	10	—27	—58	—71

2. பட்டியல் படுத்தப்பட்ட ஒரு சார்பின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைக் காணும் முறையினை விளக்குக. கீழே பட்டியல் படுத்தப்பட்டிருக்கும் சார்பு y இன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைக் காண்க:

x:	—2	—1	0	1	2	3	4
y:	2	—0·25	0	—0·25	2	15·75	56

(சென்னை '60 ஏப்., 64 ஏப்.)

3. கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ள சார்பு, x இன் எந்த மதிப்புக்களுக்கு மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறது என்பதைக் காண்க. x இன் அம் மதிப்புக்களுக்குரிய சார்பின் மதிப்புக்களைப் பெறுக.

x:	0	0·2	0·4	0·6	0·8
f(x):	4·000	22·488	39·584	55·336	69·792

4. கீழே பட்டியல் படுத்தப்பட்ட y இன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைப் பெறுக.

x:	0	1	2	3	4	5
y:	0	0·25	0·10	—0·20	0	3·0

(சென்னை '60 செப்.)

5. கீழ்க் காணும் பட்டியலிலிருந்து f(x) இன் மீச்சிறு மதிப்பினைக் காண்க.

x:	0	1	2	3	4	5
f(x):	58	43	40	45	52	60

(சென்னை '68 செப்.)

6. கீழே பட்டியல் படுத்தப்பட்டுள்ள சார்பு f(x) ஆனது x இன் எந்த மதிப்புக்கு மீச்சிறிதாகிறதென்று காண்க.

x:	3	4	5	6	7	8
f(x):	—205	—240	—259	—262	—250	—224

சென்னை '69 செப்.)

7. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு y ஆனது x இன் எந்த மதிப்புக்கு மீச்சிறிதாகிறதென்று காண்க:

x:	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7
y:	0·918	0·898	0·887	0·886	0·894	0·909

(சென்னை '69 ஏப்.)

8. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலிலிருந்து f(x) இன் மீப்பெரு மதிப்பினைக் காண்க

x:	0·4	0·6	0·8	1·0	1·2	1·4	1·6	1·8
f(x):	—3·26	—0·82	0·35	1·38	2·62	0·65	0·02	—0·20

(சென்னை '63 ஏப்.)

9. கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து f(x) இன் மீச்சிறு மதிப்பைத் தோராயமாகக் காண்க.

x:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(x):	890	844	769	668	541	389	401	462	495	530

(சென்னை '67 ஏப்.)

10. $f(x)=x^3-5x^2+6x+1$ என்ற முப்படிச் சார்புக்கு $x=2$ க்கும் $x=3$ க்கு மிடையே 0·1 சம இடைவெளி மதிப்புக்களில் ஒரு வேறுபாட்டுப் பட்டியலமைத்து $x=2\cdot5$ ஐ நெருங்கிய x இன் எந்த மதிப்புக்கு f(x) மீச்சிறிதாகிறதென்பதைக் காண்க. அச்சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பையும் காண்க.

(சென்னை '65 ஏப்.)

11. எண்சார் தொகையிடல்
(Numerical Integration)

11.1 வரையறுத்த தொகை (Definite Integral)

f (x) என்ற தொகையிடத்தக்க (integrable) சார்பிணைக் கருதுக. $\int f(x)\,dx$ என்பது f (x) இன் வரையருத் தொகை (indefinite integral)யைக் குறிக்கும். இவ்வரையருத் தொகையை F (x) என்று வைத்துக் கொண்டால்,

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

ஆகும். f (x)ஐத் தொகை சார்பு (integrand) என்று அழைக்கிறோம். x=a, x=b ஆகிய மதிப்புக்களுக்குரிய F (x) இன் மதிப்புக்கள் முறையே F (a), F (b) ஆகும். இம்மதிப்புக்களின் வித்தியாசமாகிய F (b) − F (a) என்பது x=a முதல் x=b வரை f (x) இன் வரையறுத்த தொகை (definite integral) எனப்படுகிறது. இவ்வரையறுத்த தொகை

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

என்று குறிக்கப்படுகின்றது. ஆகவே,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

F (b) −F (a) என்பது F (x) இன் இரு மதிப்புக்களுக்கிடையேயான வித்தியாசமாகும். இவ்வித்தியாசம் வழக்கமாக

$$\left[F(x) \right]_a^b$$

என்று எழுதப்படுகிறது. இதில் b என்பது மேல் எல்லை (upper limit) என்றும் a என்பது கீழ் எல்லை (lower limit) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. ஆகவே, $\int_a^b f(x)\,dx$ என்ற வரையறுத்த

தொகை காண முதலில் F (x) என்ற அதன் வரையருத் தொகையைக் காண வேண்டும். பின் x-இன் மேல், கீழ் எல்லை மதிப்புக்களாகிய b, a ஆகியவற்றை F (x) இல் தனித்தனியே பிரதியிட்டுக் கிடைக்கும் மதிப்புக்களாகிய F (b), F (a) ஆகியவற்றி லிருந்து வேண்டிய வரையறுத்த தொகையை F (b) — F (a) என்று காணலாம். இது தொகை நுண் கணிதத்தில் (Integral Calculus) கொடுக்கப்பட்டுள்ள முறையாகும். ஆனால் இம்முறையை எல்லாச் சார்புகளுக்கும் பயன்படுத்த இயலாது. ஏனெனில், ஒரு சார்பின் வரையருத் தொகையையே காண முடியாவிடில் அல்லது f (x) இன் அமைப்புக் கொடுக்கப்படாமல் அதன் பட்டியல் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அதன் வரையறுத்த தொகையை இம் முறையில் காண முடியாதென்பது நன்கு விளங்கும். ஆனால் a, b ஆகிய எல்லைகளுக்கிடையேயுள்ள x-இன் மதிப்புக்களுக்குரிய f (x) இன் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் $\int_a^b f(x)$ இன் மதிப்பை எண்சார் முறையில் காண முடியும். இவ்வாறு பட்டியல் படுத்தப்பட்ட ஒரு சார்பின் வரையறுத்த தொகையைக் காணும் முறைக்கு எண்சார் தொகையிடல் (Numerical Integration) என்று பெயர். இங்கு விவரிக்கப்பட்டிருக்கின்ற எண்சார் தொகையிடும் முறைகள் யாவும் செயல் முறையில் மிகவும் பயன்படுவதோடு நடைமுறை முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவையாகும்.

11.2 எண்சார் தொகையிடல் (Numerical integration)

ஒரு சார்பின் பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து அச்சார்பின் வரையறுத்த தொகையைத் தோராயமாகக் காணும் முறைக்கு எண்சார் தொகையிடல் என்று பெயர். இம் முறையில், கொடுக்கப் பட்டுள்ள தொகையீட்டு இடைவெளி (interval of integration)யைச் சம இடைவெளிகளில் பல சிறு சிறு இடைவெளி (sub-interval) களாகப் பிரித்து, ஏதாவது ஒரு இடைச் செருகல் வாய்பாட்டின் மூலம் காணப்பட்ட f (x) இன் அமைப்பினை ஒவ்வொரு சிறு இடை வெளியிலும் தொகையிட்டு, இவ்வாறு கணக்கிடப்பட்ட எல்லாத் தொகைகளையும் கூட்டி மொத்தத் தொகையைக் காண்கிறோம். இவ்வாறு காணப்படும் தொகையின் மதிப்புத் தோராயமாகவே யிருக்கும். ஆனால் சிறு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கையை அதிகப்படுத்துவதன் மூலம் தோராய மதிப்புத் துல்லியத்தை நெருங்குமாறு செய்யலாம். இடைச் செருகல் வாய்பாட்டின் மூலம் பெறப்படும் f (x) இன் அமைப்பினைக் கொண்டு $\int_a^b f(x)\,dx$ இன் தோராய மதிப்பினைக் காண f (x) இன் பட்டியல் மதிப்புக்களாலான

வாய்பாடுகள் பல நிறுவப்பட்டுள்ளன. இத்தகைய வாய்பாடுகளுக்கு பரப்பு காண் வாய்பாடுகள் (Quadrature Formulae) என்று பெயர்.

11.3 பரப்பு காண் வாய்பாடுகள் (Quadrature Formulae)

தொகைச் சார்பாகிய f (x) சம இடைவெளியில் பட்டியல் படுத்தப்பட்டிருந்தால், நியூட்டனின் முன்வேக வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி f (x) இன் அமைப்பினைப் பெறலாம். இப்பொழுது, f (x) ஐ (a, b) என்ற இடைவெளியில் தொகையிட வேண்டுமெனக் கொள்வோம். இடைவெளி (a, b)யை h இடைவெளியுள்ள n சிறு சம இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கவும். ஆகவே, $b=a+nh$ ஆகும். a-ஐ ஆதியாகக் கொண்டு $u=\dfrac{x-a}{h}$ என்று மாற்றுக.

இப்பொழுது, $x=a$ ஆனால், $u=0$ ஆகும்.
$x=b=a+nh$ ஆனால், $u=n$ ஆகும்.

ஆகவே, தொகையீட்டு இடைவெளியாகிய (a, b) என்பது (0, n) ஆக மாறுகிறது.

மேலும், $x=a+hu$.

$\therefore\ dx=h\,du.$

ஆகவே, $\int_a^b f(x)\,dx=h\int_0^n f(a+hu)\,du$ என்று மாறுகிறது.

ஆனால், நியூட்டனின் முன்வேக வாய்பாட்டிலிருந்து,

$$f(x)=f(a+hu)$$

$$=f(a)+\frac{u}{1!}\Delta f(a)+\frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(a)$$

$$+\frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 f(a)$$

$$+\frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!}\Delta^4 f(a)+\dots\dots\dots$$

ஆகவே, $\int_a^b f(x)\,dx=h\int_0^n f(a+hu)\,du$

$$=h\int_0^n [f(a)+u\Delta f(a)+\tfrac{1}{2}(u^2-u)\Delta^2 f(a)$$

$$+\tfrac{1}{6}(u^3-3u^2+2u)\Delta^3 f(a)$$

$$+\tfrac{1}{24}(u^4-6u^3+11u^2-6u)\Delta^4 f(u)+\dots.]\,du.$$

$$= h\left[u\,f(a)+\frac{u^2}{2}\Delta f(a)+\frac{1}{2}\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}\right)\Delta^2 f(a)\right.$$

$$+\frac{1}{6}\left(\frac{u^4}{4}-u^3+u^2\right)\Delta^3 f(a)$$

$$\left.+\frac{1}{24}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{3}{2}u^4+\frac{11}{3}u^3-3u^2\right)\Delta^4 f(u)+\ldots\ldots\right]_0^n$$

அதாவது,

$$\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = h\left[n\,f(a)+\frac{n^2}{2}\Delta f(a)+\frac{1}{2}\left(\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}\right)\Delta^2 f(a)\right.$$

$$+\frac{1}{6}\left(\frac{n^4}{4}-n^3+n^2\right)\Delta^3 f(a)$$

$$\left.+\frac{1}{24}\left(\frac{n^5}{5}-\frac{3}{2}n^4+\frac{11}{3}n^3-3n^2\right)\Delta^4 f(a)+\ldots\ldots\ldots\right]$$

இதுதான் சம இடைவெளிப் பட்டியலுக்கான பொதுவான பரப்புகாண் வாய்பாடாகும். இவ் வாய்பாட்டில் n க்கு 1, 2, 3,..... ஆகிய மதிப்புக்களை அளித்துப் பல பரப்புகாண் வாய்பாடுகளைப் பெறலாம்.

11.4 கோடகம் சார்ந்த விதி (Trapezoidal Rule)

$x=a,\ a+h,\ a+2h,\ldots,\ (a+nh)$ என்ற மதிப்புக்களுக்குரிய $y=f(x)$ என்ற தொகைச் சார்பின் மதிப்புக்களை $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ எனக் கொள்க. வரைபடத்தில் (படம்: 17) இந்த $(n+1)$ நிலைத் தூரங்களும் சம இடைவெளிகளிலிருக்கும்.

பொதுவான பரப்புகாண் வாய்பாட்டில் $n=1$ எனக் கொண்டால், $(a, a+h)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ இன் தொகை கிடைக்கும்.

அதாவது, $\int_a^{a+h} f(x)\,dx = h\left[f(a)+\frac{1}{2}\Delta f(a)\right]$

ஆனால், $f(a)=y_0;\quad \Delta f(a)=\Delta y_0=(y_1-y_0)$

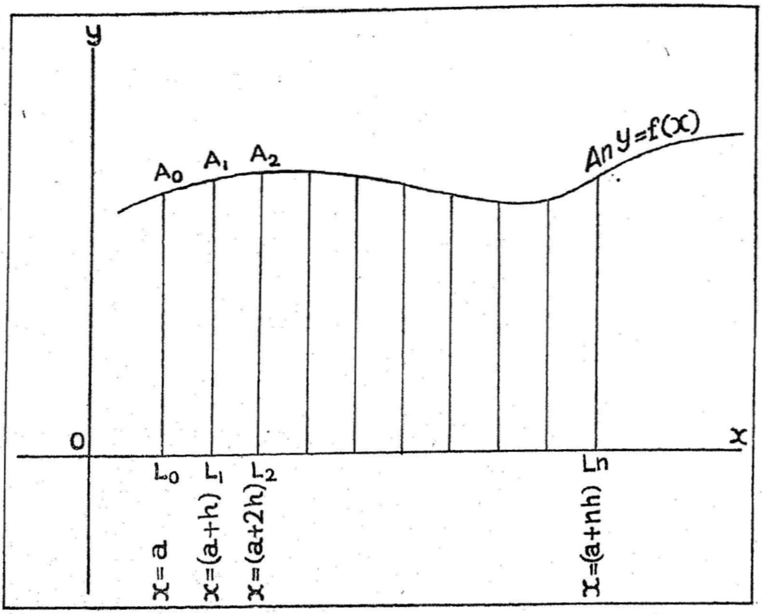
$$\therefore \int_a^{a+h} f(x)\,dx = h\left[y_0+\tfrac{1}{2}(y_1-y_0)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}h\left[2y_0+y_1-y_0\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}h\,(y_0+y_1)$$

= சரிவகம் $A_0\,L_0\,L_1\,A_1$ இன் பரப்பு

இது போன்று, (a+h, a+2h) என்ற இடைவெளியில் பரப்புகாண் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி f (x) ஐத் தொகையிடவும்.



படம் 17

$$\int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2} h\,(y_1+y_2) = \text{சரிவகம் } A_1 L_1 L_2 A_2.$$

இவ்வாறு $\int_{a+2h}^{a+3h} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2} h\,(y_2+y_3) = \text{சரிவகம் } A_2 L_2 L_3 A_3.$

....

$$\int_{a+(n-1)h}^{a+nh} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2} h\,(y_{n-1}+y_n) = \text{சரிவகம் } A_{n-1} L_{n-1} L_n A_n.$$

மேற்கண்ட தொகைகள் யாவற்றையும் கூட்டுக.

$$\int_{a}^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + \dots\dots + \int_{a+(n-1)h}^{a+nh} f(x)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2} h\,(y_0+y_1) + \tfrac{1}{2} h\,(y_1+y_2) + \dots\dots + \tfrac{1}{2} h\,(y_{n-1}+y_n)$$

அதாவது,

$$\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = h\left[\tfrac{1}{2}(y_0+y_n)+(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_{n-1})\right]$$

= எல்லாச் சரிவகங்களின் மொத்தப் பரப்பு.

ஆனால் $\int_a^{a+nh} f(x)\,dx$ என்பது $y=f(x)$ என்ற வளைவு, x-அச்சு, y_0, y_1, ஆகிய நிலைத் தூரங்கள் (ordinates) ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள $A_0\,L_0\,L_n\,A_n$ என்ற பரப்பளவைக் குறிக்கும். மேலே பெறப்பட்ட வாய்பாடு இப் பரப்பினை எல்லாச் சரிவகங்களின் மொத்தப் பரப்புக்குச் சமம் என்று காட்டுவதால், அவ் வாய்பாட்டிலிருந்து பெறப்படும் $f(x)$ இன் தொகையீடு தோராய மதிப்புடையதாகவேயிருக்கும். ஆயினும், சம இடைவெளித் தூரமாகிய h ஐ மிகச் சிறியதாகக் குறைப்பதன் மூலம் இத் தோராய மதிப்பைத் துல்லியமாக்கலாம்.

மாதிரி 123

கோடகம் சார்ந்த விதியைப் பயன்படுத்தி இடைவெளியை 9 சிறு சம இடைவெளிகளாகப் பிரித்து $\int_1^{10}\frac{dx}{x}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

இங்கு, $a=1,\ a+nh=10,\ n=9 \quad \therefore\ h=1.$

ஆகவே, சிறு இடைவெளிகளின் எல்லைகள் 1, 2, 3,........, 9, 10 ஆகும்.

$$y=f(x)=\frac{1}{x}$$

$\therefore\quad y_0=f(1)=1;\quad y_1=f(2)=\frac{1}{2};\quad y_2=f(3)=\frac{1}{3};\quad y_3=f(4)=\frac{1}{4};$
$y_4=f(5)=\frac{1}{5};\quad y_5=f(6)=\frac{1}{6};\quad y_6=f(7)=\frac{1}{7};\quad y_7=f(8)=\frac{1}{8};$
$y_8=f(9)=\frac{1}{9};\quad y_9=f(10)=\frac{1}{10}.$

$$\therefore\quad \int_1^{10}\frac{dx}{x}=h\left[\tfrac{1}{2}(y_0+y_n)+(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_{n-1})\right]$$

$$=1\left[\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{10}\right)+\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\tfrac{1}{9}\right)\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}(1+0{\cdot}1)+0{\cdot}5+0{\cdot}3333+0{\cdot}25+0{\cdot}2+0{\cdot}1667$$
$$+0{\cdot}1428+0{\cdot}1250+0{\cdot}1111$$

$$=2{\cdot}3789.$$

மாதிரி 124

கோடகம் சார்ந்த விதியைப் பயன்படுத்தி $\int_0^{\pi/2} \text{Sin}\,\theta\, d\,\theta$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

இங்கு $a=0$, $a+nh=\frac{\pi}{2}$.

இடைவெளி $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ஐ 9 சிறு சம இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கவும்.

$$\therefore \quad n=9. \quad \therefore \quad h=\frac{\pi}{18} = 0{\cdot}17453$$

ஆகவே, சிறு இடைவெளிகளின் எல்லைகள் : $0, \frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{18}, \frac{3\pi}{18}, \ldots\ldots, \frac{\pi}{2}$.

அதாவது, $0°, 10°, 20°, 30°, \ldots\ldots, 90°$.

$$f(\theta)=\text{Sin}\,\theta.$$

$$y_0 = f(0°) = \text{Sin}\,0° = 0°;\ y_9 = \text{Sin}\,90° = 1$$

$$\therefore \tfrac{1}{2}(y_0+y_9) = \tfrac{1}{2}(0+1) = 0{\cdot}5.$$

$$y_1 = \text{Sin}\,10° = 0{\cdot}17365$$
$$y_2 = \text{Sin}\,20° = 0{\cdot}34202$$
$$y_3 = \text{Sin}\,30° = 0{\cdot}50000$$
$$y_4 = \text{Sin}\,40° = 0{\cdot}64279$$
$$y_5 = \text{Sin}\,50° = 0{\cdot}76604$$
$$y_6 = \text{Sin}\,60° = 0{\cdot}86603$$
$$y_7 = \text{Sin}\,70° = 0{\cdot}93969$$
$$y_8 = \text{Sin}\,80° = 0{\cdot}98481$$

$$\therefore y_1+y_2+y_3+\ldots+y_8 = 5{\cdot}19503$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \text{Sin}\,\theta\, d\,\theta = h\left[\tfrac{1}{2}(y_0+y_9)+(y_1+y_2+\ldots\ldots+y_8)\right]$$

$$= 0{\cdot}17453\,[0{\cdot}5+5{\cdot}19503]$$
$$= 0{\cdot}17453\,(5{\cdot}69503)$$
$$= 0{\cdot}99380$$

மாதிரி 125

கோடகம் சார்ந்த விதியைப் பயன்படுத்தி தொகையீட்டு இடைவெளி (range of integration)யை நான்கு சிறு சம இடைவெளி களாகப் பிரித்து $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=0{\cdot}7828$ என்று காட்டுக. அதன் மூலம் $\frac{\pi}{4}$ இன் தோராய மதிப்பைப் பெறுக.

(சென்னை, பி. இ. '67)

இங்கு $a=0,\ n=4,\ a+nh=1\ \therefore\ h=1/4=0{\cdot}25.$

ஆகவே, இடைவெளி எல்லைகள் : $0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ 1.$

$$y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}\cdot$$

$$y_0=f(0)=1$$

$$y_4=f(1)=\tfrac{1}{2}=0{\cdot}5$$

$$\therefore\quad \tfrac{1}{2}(y_0+y_4)=\tfrac{1}{2}(1+0{\cdot}5)=0{\cdot}75$$

$$y_1=f(\tfrac{1}{4})=\tfrac{16}{17}=0{\cdot}94118$$

$$y_2=f(\tfrac{1}{2})=\tfrac{4}{5}\ =0{\cdot}80000$$

$$y_3=f(\tfrac{3}{4})=\tfrac{16}{25}=0{\cdot}64000$$

$$\therefore\ y_1+y_2+y_3\quad=2{\cdot}38118$$

$$\therefore\ \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=h\left[\tfrac{1}{2}(y_0+y_4)+(y_1+y_2+y_3)\right]$$

$$=\tfrac{1}{4}\,[0{\cdot}75+2{\cdot}38118]$$

$$=\tfrac{1}{4}\,(3{\cdot}13118)$$

$$=0{\cdot}7828$$

ஆனால் $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\left[\tan^{-1}x\right]_0^1=\tan^{-1}1-\tan^{-1}0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore\ \frac{\pi}{4}=0{\cdot}7828.$$

11.5 சிம்சனின் $\frac{1}{3}$-ஆவது விதி (Simpson's one-third Rule)

பரப்பு காண் வாய்பாட்டில் $n=2$ என்று பிரதியிட்டால், y_0, y_1, y_2 என்ற மூன்று நிலைத்தூரங்கள் கிடைக்கின்றன.

$$y_0=f(a),\ y_1=f(a+h),\ y_2=f(a+2h)$$

ஆகவே, $f(x)$ இன் இரண்டாம் நிலைக்கு மேற்பட்ட நிலை வேறுபாடுகள் யாவும் மறைகின்றன.

$$\therefore \int_a^{a+2h} f(x)\,dx = h\left[2\,f(a)+\frac{2^2}{2}\,\triangle f(a) + \frac{1}{2}\left(\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}\right)\triangle^2 f(a)\right.$$

$$=h\left[2y_0+2\,\triangle y_0+\tfrac{1}{3}\triangle^2 y_0\right]$$

$$=h\left[2y_0+2\,(y_1-y_0)+\tfrac{1}{3}\,(y_2-2y_1+y_0)\right]$$

$$=\frac{h}{3}\left[y_0+4y_1+y_2\right]$$

இது மூன்று நிலைத் தூரங்களுக்கு சிம்சனின் விதியாகும். இவ் விதியை அடுத்தடுத்த மூன்று நிலைத்தூரங்களுக்குப் பயன்படுத்தவும்.

$$\int_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[y_2+4y_3+y_4\right]$$

$$\int_{a+4h}^{a+6h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[y_4+4y_5+y_6\right]$$

....

... ...

n ஒரு இரட்டை யெண்ணுனல்,

$$\int_{a+(n-2)h}^{a+nh} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\right]$$

மேற்கண்ட தொகைகள் யாவற்றையும் கூட்டுக.

$$\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\Big[(y_0+y_n)+4\,(y_1+y_3+y_5+\cdots+y_{n-1}) +2\,(y_2+y_4+y_6+\cdots+y_{n-2})\Big]$$

இது சிம்சனின் விரித்தெழுதப்பட்ட $\frac{1}{3}$ ஆவது விதியாகும்.

இவ்விதி கோடகம் சார்ந்த விதியைவிட f (x) இன் தொகைக்குத் துல்லிய மதிப்பைத் தருகிறது. ஆனால் தொகையீட்டு இடை வெளியை இரட்டையெண்ணிக்கையுள்ள சிறு இடைவெளிகளாகப் பிரிக்க முடிந்தால்தான் இவ்விதியைப் பின்பற்ற முடியும்.

11.6. சிம்சனின் $\frac{3}{8}$-ஆவது விதி (Simpson's three-eighth's Rule)

பரப்புகாண் வாய்பாட்டில் $n=3$ என்று பிரதியிட, y_0, y_1, y_2, y_3 என்ற நான்கு நிலைத்தூரங்கள் கிடைக்கின்றன. ஆகவே,

$$\int_a^{a+3h} f(x)\,dx = h\Big[3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \frac{1}{2}\Big(9-\frac{9}{2}\Big)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}\Big(\frac{81}{4}-27+9\Big)\Delta^3 y_0\Big]$$

$$= h\Big[3y_0 + \frac{9}{2}(y_1-y_0) + \frac{9}{4}(y_2-2y_1+y_0) + \frac{3}{8}(y_3-3y_2+3y_1-y_0)\Big]$$

$$= \frac{h}{8}\Big[3y_0+9y_1+9y_2+3y_3\Big]$$

$$= \frac{3}{8}h\Big[y_0+3y_1+3y_2+y_3\Big]$$

இது சிம்ஸனின் $\frac{3}{8}$ ஆவது விதியாகும். இவ்விதியை அடுத் தடுத்த நான்கு நிலைத் தூரங்களுக்குப் பயன்படுத்தவும்.

$$\therefore \int_{a+3h}^{a+6h} f(x)\,dx = \frac{3}{8}h\Big[y_3+3y_4+3y_5+y_6\Big]$$

$$\int_{a+6h}^{a+9h} f(x)\,dx = \frac{3}{8}h\Big[y_6+3y_7+3y_8+y_9\Big]$$

....

....

n ஆனது 3 இன் மடங்கானல்,

$$\int_{(a+n-3)h}^{a+nh} f(x)\,dx = \frac{3}{8}h\Big[y_{n-3}+3\,y_{n-2}+3\,y_{n-1}+y_n\Big]$$

மேற்கண்ட தொகைகள் யாவற்றையும் கூட்டவும்.

$$\int_{a}^{a+nh} f(x)\, d_x = \frac{3}{8} h \Big[(y_0 + y_n) + 3\,(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \ldots$$

$$+ y_{n-2} + y_{n-1}) + 2\,(y_3 + y_6 + \ldots\ldots + y_{n-3}) \Big]$$

இது சிம்சனின் விரித் தெழுதப்பட்ட $\frac{3}{8}$ ஆவது விதியாகும்.

சிறு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கை ஐந்தும் அதற்கு மேற்பட்ட ஒற்றை யெண்ணுகயிருப்பின் சிம்ஸனின் இரண்டு விதிகளையும் சேர்த்துப் பயன் படுத்தலாம். முதலில் சிம்சனின் $\frac{3}{8}$ ஆவது விதியை ஒரு தடவைப் பயன்படுத்திப் பின் மீதியுள்ள இரட்டை யெண்ணிக்கையுள்ள இடைவெளிக்கு சிம்சனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதியைப் பயன்படுத்தலாம்.

மாதிரி 126

எண்சார் தொகையிட சிம்சனின் விதியை நிறுவுக. இவ் விதியைப் பயன்படுத்தி கீழே பட்டியல் படுத்தப்பட்ட சார்புக்கு $\int_{0}^{6} y\, dx$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	0	1	2	3	4	5	6
y :	0	0·45	4·96	25·41	81·84	195·25	373·20

(சென்னை '62 ஏப்.)

இங்கு சார்பின் 7 மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஆகவே, சிறு இடைவெளிகள் 6 ஆகும். இது இரட்டையெண்ணு கையால் சிம்சனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதியை மும்முறைப் பயன்படுத்துக.

$$\therefore \int_{0}^{6} y\, dx = \frac{h}{3} \Big[(y_0 + y_6) + 4\,(y_1 + y_3 + y_5) + 2\,(y_2 + y_4) \Big]$$

$$= \frac{1}{3} \Big[(0 + 373{\cdot}20) + 4(0{\cdot}45 + 25{\cdot}41 + 195{\cdot}25)$$

$$+ 2\,(4{\cdot}96 + 81{\cdot}84) \Big]$$

$$=\frac{1}{3}\left[373{\cdot}20+884{\cdot}44+173{\cdot}60\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[1431{\cdot}24\right]$$

$$=477{\cdot}08$$

மாதிரி 127

ஒரு ஆற்றின் அகலம் 80 அடி. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலில் x என்பது ஆற்றின் ஒரு கரையிலிருந்து ஆற்றின் குறுக்கேயுள்ள தூரத்தையும், d என்பது அந்த இடத்தில் ஆற்றின் ஆழத்தையும் குறிக்கிறது.

x:	0	10	20	30	40	50	60	70	80
d:	0	4	7	9	12	15	14	8	3

ஆற்றின் குறுக்கு வெட்டுப் (cross-section) பரப்பைத் தோராயமாகக் காண்க.

(டெல்லி '61)

இங்கு ஆற்றின் அகலம் 8 சம இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கப் பட்டுள்ளது. ஆகவே, சிம்சனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதியை நான்கு முறை பயன் படுத்தவும்.

ஆற்றின் ஆழம் d = y எனக் கொள்க.

h = 10 அடி.

ஆற்றின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு $=\int_0^{80} y\,dx=\int_0^{8h} y\,dx$

$$=\frac{h}{3}\left[(y_0+y_8)+4(y_1+y_3+y_5+y_7)+2(y_2+y_4+y_6)\right]$$

$$=\frac{10}{3}\left[(0+3)+4\,(4+9+15+8)+2(7+12+14)\right]$$

$$=\frac{10}{3}\left[213\right]$$

= 710 சதுர அடி.

மாதிரி 128

எல்லை இடைவெளியை 9 நிலைத் தூரங்களால் சிறு இடைவெளிகளாகப் பிரித்து சிம்சனின் விதியைப் பயன் படுத்தி $\int_0^2 \frac{dx}{1+x}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

(ஆந்திரா எம். எஸ்ஸி. '63)

இடைவெளி (0, 2) ஐ 9 நிலைத் தூரங்களால் பிரிப்பதால், 8 சிறு சம இடைவெளிகள் கிடைக்கும். $\therefore h=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

$\therefore$ x இன் மதிப்புக்கள் : $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, 2.$

$$\therefore y_0=\frac{1}{1+0}=1; \quad y_1=\frac{1}{1+1/4}=\frac{4}{5}; \quad y_2=\frac{1}{1+1/2}=\frac{2}{3};$$

$$y_3=\frac{4}{7}; \; y_4=\frac{1}{2}; \; y_5=\frac{4}{9}; \; y_6=\frac{2}{5}; \; y_7=\frac{4}{11}; \; y_8=\frac{1}{3}.$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{1+x}=\frac{h}{3}\Big[(y_0+y_8)+4(y_1+y_3+y_5+y_7)+2(y_2+y_4+y_6)\Big]$$

$$=\frac{1/4}{3}\Big[\left(1+\frac{1}{3}\right)+4\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{7}+\frac{4}{9}+\frac{4}{11}\right)+2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)\Big]$$

$$=\frac{1}{12}\Big[1{\cdot}3333+4(0{\cdot}8+0{\cdot}5714+0{\cdot}4444+0{\cdot}3636)+2(0{\cdot}6667+0{\cdot}5000+0{\cdot}4000)\Big]$$

$$=\frac{1}{12}\Big[1{\cdot}333+8{\cdot}7176+3{\cdot}1334\Big]$$

$$=\frac{1}{12}\Big[13{\cdot}1843\Big]$$

$$=1{\cdot}0987$$

மாதிரி 129

ஏழு நிலைத் தூரங்களைக் கொண்டு $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x^2}$ ஐத் தோராய மாகக் காண்க.

(சென்னை '68 ஏப்.)

நிலைத் தூரங்கள் 7. ஆகையால் சிறு சம இடைவெளிகள் 6. 6 மூன்றின் மடங்காகையால் சிம்சனின் $\frac{3}{8}$ ஆவது விதியை இரு முறைப் பயன் படுத்தலாம். இங்கு $h = \frac{1}{6}$

x இன் மதிப்புக்கள் : $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1.$

$$y_0 = 1,\quad y_1 = \frac{18}{19},\quad y_2 = \frac{9}{11},\quad y_3 = \frac{2}{3},\quad y_4 = \frac{9}{17},\quad y_5 = \frac{18}{43}$$

$$y_6 = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{1+2x^2} = \frac{3}{8}h\left[(y_0+y_6)+3(y_1+y_2+y_4+y_5)+2(y_3)\right]$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{6}\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{18}{19}+\frac{9}{11}+\frac{9}{17}+\frac{18}{43}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[1{\cdot}3333+3(0{\cdot}9474+0{\cdot}8182+0{\cdot}5294 = 0{\cdot}4186)+1{\cdot}333\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[1{\cdot}333+8{\cdot}1408+1{\cdot}3333\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[10{\cdot}8074\right]$$

$$= 0{\cdot}6755.$$

மாதிரி 130

$(x+2)\,y=3$ என்ற வளைவுக்கும் x-அச்சு, $x=1$, $x=2$ என்ற நிலைத்தூரங்கள் ஆகியவற்றுக்குமிடைப்பட்ட பரப்பளவை 10 நிலைத் தூரங்களைக் கொண்டு காண்க. (சென்னை '62 செப்.)

$$(x+2)\,y=3$$

$$\therefore\ y=\frac{3}{x+2}$$

ஆகவே, வேண்டிய பரப்பு $=\int_1^2 y\,dx=\int_1^2 \frac{3}{x+2}\,dx.$

மொத்த நிலைத்தூரங்கள் $=10$. $\therefore$ மொத்த சிறு இடைவெளிகள் $=9$.

ஆகவே, சிம்சனின் $\frac{3}{8}$ ஆவது விதியைப் பயன்படுத்தவும்.

இங்கு $h=\frac{1}{9}$ $\therefore$ x இன் மதிப்புக்கள் $1, \frac{10}{9}, \frac{11}{9}, \frac{12}{9}, \frac{13}{9}, \frac{14}{9}, \frac{15}{9}, \frac{16}{9}, \frac{17}{9}, 2.$

$$y=f(x)=\frac{3}{x+2}$$

$\therefore\ y_0=f(1)=1;\quad y_1=f\left(\frac{10}{9}\right)=\frac{27}{28};\quad y_2=f\left(\frac{11}{9}\right)=\frac{27}{29};$

$y_3=f\left(\frac{12}{9}\right)=\frac{9}{10};\quad y_4=f\left(\frac{13}{9}\right)=\frac{27}{31};\quad y_5=f\left(\frac{14}{9}\right)=\frac{27}{32};$

$y_6=f\left(\frac{15}{9}\right)=\frac{9}{11};\quad y_7=f\left(\frac{16}{9}\right)=\frac{27}{34};\quad y_8=f\left(\frac{17}{9}\right)=\frac{27}{35};$

$y_9=f(2)=\frac{3}{4}.$

$$\therefore\ \int_1^2 \frac{3}{x+2}dx=\frac{3}{8}h\Big[(y_0+y_9)+3(y_1+y_2+y_4+y_5+y_7+y_8)+2(y_3+y_6)\Big]$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{9}\left[\left(1+\frac{3}{4}\right)+3\left(\frac{27}{28}+\frac{27}{29}+\frac{27}{31}+\frac{27}{32}+\frac{27}{34}+\frac{27}{35}\right)+2\left(\frac{9}{10}+\frac{9}{11}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{24}\left[1\cdot75+3\,(0\cdot9643+0\cdot9310+0\cdot8710+0\cdot8437+0\cdot7941+0\cdot7714)+2(0\cdot9000+0\cdot8181)\right]$$

$$=\frac{1}{24}\left[1\cdot7500+15\cdot5265+3\cdot4362\right]$$

$$=0\cdot8630.$$

மாதிரி 131

இடைவெளி (1, 2) ஐ 5 சிறு சம இடைவெளிகளாகப் பிரித்து $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ இன் மதிப்பைக் காண சிம்சனின் விதியைப் பயன்படுத்துக.

(டெல்லி எம். ஏ. '66)

இங்கு $h=1/5$.

$\therefore$ x இன் மதிப்புக்கள் : $1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2.$

$$y=f(x)=\frac{1}{x}.$$

$$y_0=1;\quad y_1=\frac{5}{6};\quad y_2=\frac{5}{7};$$

$$y_3=\frac{5}{8};\quad y_4=\frac{5}{9};\quad y_5=\frac{1}{2}.$$

முதலில் y_0, y_1, y_2, y_3 ஆகிய மூன்று சிறு இடைவெளிகளுக்கு சிம்சனின் $\frac{3}{8}$ ஆவது விதியைப் பயன்படுத்திப் பின்னர், y_3, y_4, y_5 ஆகிய இரண்டு இடைவெளிகளுக்கு சிம்சனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதியைப் பயன்படுத்துக.

$$\therefore\quad I_1=\int_1^{8/5}\frac{dx}{x}=\frac{3}{8}h\Big[(y_0+y_3)+3\,(y_1+y_2)\Big]$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{5}\left[\left(1+\frac{5}{8}\right)+3\left(\frac{5}{6}+\frac{5}{7}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{40}\left[1{\cdot}6250+4{\cdot}6428\right]$$

$$= 0{\cdot}47006$$

$$I_2 = \int_{8/5}^{2}\frac{dx}{x} = \frac{h}{3}\left[(y_3+y_5)+4\,y_4\right]$$

$$= \frac{1/5}{3}\left[\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\right)+\frac{20}{9}\right]$$

$$= \frac{1}{15}\left[0{\cdot}6250+0{\cdot}5000+2{\cdot}2222\right]$$

$$= 0{\cdot}2232.$$

$$\therefore\quad I = \int_{1}^{2}\frac{dx}{x} = I_1+I_2$$

$$= 0{\cdot}47006+0{\cdot}2232$$

$$= 0{\cdot}6932$$

மாதிரி 132

தோராயமாகத் தொகை காண $\frac{3}{8}$ ஆவது விதியை நிரூபிக்க.

அதன் மூலம் $\int_{0}^{6}\frac{e^x}{1+x}dx$ இன் மதிப்பைத் தோராயமாகப் பெறுக.

(சென்னை '68 செப்.)

$h=1$ எனக் கொள்க.

ஆகவே, x இன் மதிப்புக்கள் : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$$y_0 = \frac{e^0}{1+0} = 1$$

$y_1 = \frac{e}{2} = 1{\cdot}35914$; $\qquad y_2 = \frac{e^2}{3} = 2{\cdot}46302$

$y_3 = \frac{e^3}{4} = 5{\cdot}0214$; $\qquad y_4 = \frac{e^4}{5} = 10{\cdot}9196$

$y_5 = \frac{e^5}{6} = 24{\cdot}7322$; $\qquad y_6 = \frac{e^6}{7} = 57{\cdot}6327$

6 சிறு இடைவெளிகளிருப்பதால், $\frac{3}{8}$ ஆவது விதியைப் பயன் படுத்துக.

$$\therefore \int_0^6 \frac{e^x\,dx}{1+x} = \frac{3}{8}h\Big[\ (y_0+y_6)+3\,(y_1+y_2+y_4+y_5)+2\,y_3)\ \Big]$$

$$= \frac{3}{8}\cdot 1\Big[\ (1+57{\cdot}6327)+3\,(1{\cdot}35914+2{\cdot}46302$$

$$+10{\cdot}9196+24{\cdot}7322)+2\,(5{\cdot}0214)\Big]$$

$$= \frac{3}{8}\Big[58{\cdot}63270+118{\cdot}42188+10{\cdot}04280\Big]$$

$$= 70{\cdot}16152.$$

11.7 வெடில்-இன் விதி (Weddle's Rule)

பரப்பு காண் வாய்பாட்டில் $n=6$ என்று பிரதியிட, $f(x)$ இன் ஆறுவது நிலை வேறுபாடுகளுக்கு மேற்பட்ட நிலை வேறுபாடுகள் மறைகின்றன.

$$\therefore \int_a^{a+6h} f(x)\,dx = h\Big[6y_0+18\,\Delta y_0+27\,\Delta^2 y_0+24\,\Delta^3 y_0$$

$$+\frac{123}{10}\Delta^4 y_0+\frac{33}{10}\,\Delta^5 y_0+\frac{42}{140}\,\Delta^6 y_0\Big]$$

இதில் கடைசி உறுப்பாகிய $\frac{41}{140}\,\Delta^6 y_0$ ஐ $\frac{42}{140}\,\Delta^6 y_0 - \frac{1}{140}\,\Delta^6 y_0$ என்று எழுதி, $h\frac{1}{140}\,\Delta^6 y_0$ ஐ மிகவும் சிறியதாக யிருப்பதால் புறக் கணித்து விட்டால், வலப்பக்கத்தை மிக எளிதாகச் சுருக்க முடிகிறது. ஆகவே,

$$\int_a^{a+6h} f(x)\,dx = h\Big[6y_0+18\Delta y_0+27\Delta^2 y_0+24\Delta^3 y_0+\frac{123}{10}\Delta^4 y_0$$

$$+\frac{33}{10}\Delta^5 y_0+\frac{42}{140}\Delta^6 y_0\Big]$$

$$= 3h\Big[2y_0+6\Delta y_0+9\Delta^2 y_0+8\Delta^3 y_0+\frac{41}{10}\Delta^4 y_0+\frac{11}{10}\Delta^5 y_0$$

$$+\frac{1}{10}\Delta^6 y_0\Big]$$

ஆனால், $\triangle y_0 = y_1 - y_0$

$$\triangle^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$
$$\triangle^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$
$$\triangle^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$$
$$\triangle^5 y_0 = y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0$$
$$\triangle^6 y_0 = y_6 - 6y_5 + 15y_4 - 20y_3 + 15y_2 - 6y_1 + y_0$$

$$\therefore \frac{41}{10}\triangle^4 y_0 + \frac{11}{10}\triangle^5 y_0 + \frac{1}{10}\triangle^6 y_0 = \frac{1}{10}(41\triangle y_0 + 11\triangle^5 y_0 + \triangle^6 y_0)$$

$$= \frac{1}{10}(y_6 + 5y_5 + y_4 - 74y_3 + 151y_2 - 115y_1 + 31y_0)$$

$$\therefore \int_a^{a+6h} f(x)\,dx = 3h\Big[2y_0 + 6(y_1 - y_0) + 9(y_2 - 2y_1 + y_0)$$

$$+ 8(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) + \frac{1}{10}(y_6 + 5y_5 + y_4 - 74y_3$$

$$+ 151y_2 - 115y_1 + 31y_0)\Big]$$

$$= 3h\Big[-3y_0 + 12y_1 - 15y_2 + 8y_3 + \frac{1}{10}(y_6 + 5y_5$$

$$+ y_4 - 74y_3 + 151y_2 - 115y_1 + 31y_0)\Big]$$

$$= \frac{3h}{10}\Big[-30y_0 + 120y_1 - 150y_2 + 80y_3 + y_6 + 5y_5$$

$$+ y_4 - 74y_3 + 151y_2 - 115y_1 + 31y_0\Big]$$

$$= \frac{3h}{10}\Big[y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + y_6\Big]$$

அதாவது,

$$\int_a^{a+6h} f(x)\,dx = \frac{3h}{10}\Big[(y_0 + y_6) + 5(y_1 + y_5) + (y_2 + y_4) + 6y_3\Big]$$

இதுதான் ஆறு சிறு சம இடைவெளிகளுக்குரிய வெடில்-இன் விதியாகும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொகையீட்டு இடைவெளி 12, 18, 24,......... சிறு சம இடைவெளிகளாக்கப்பட்டால், இவ்விதியை அடுத்தடுத்துள்ள 6 சம இடைவெளிகளுக்குப் பயன்படுத்திக்

கிடைக்கும் தொகைகளைக்கூட்டினல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொகைச் சார்பின் தொகை கிடைக்கும். இவ்விதியைப் பயன்படுத்திக் கிடைக்கப் பெறும் தொகை சிம்சனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதியின் மூலம் கிடைக்கும் தொகையைவிடத் துல்லியமாக யிருக்கும். ஆனுல் இவ் விதியைப் பயன்படுத்த குறைந்தது ஏழு சார்பலன்களாவது கொடுக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும்.

மாதிரி 133

எண்சார் தொகை காண வெடில்-இன் விதியை நிறுவுக. அதன் மூலம் கீழே பட்டியல் படுத்தப்பட்டுள்ள சார்புக்கு, $\int_1^7 y\,dx$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	1	2	3	4	5	6	7
y :	3·95	4·07	4·18	4·30	4·42	4·54	4·67

(சென்னை '62 செப்.)

இங்கு h = 1.

$$\int_1^7 y\,dx = \frac{3h}{10}\Big[(y_1+y_7)+5(y_2+y_6)+(y_3+y_5)+6y_4\Big]$$

$$= \frac{3}{10}\Big[(3{\cdot}95+4{\cdot}67)+5(4{\cdot}07+4{\cdot}54)+(4{\cdot}18+4{\cdot}42)+6(4{\cdot}30)\Big]$$

$$= \frac{3}{10}\Big[8{\cdot}62+43{\cdot}05+8{\cdot}60+25{\cdot}80\Big]$$

$$= 25{\cdot}821$$

மாதிரி 134

$\int_{-3}^{3} \sqrt{1+x^4}\,dx$ இன் மதிப்பைத் தோராயமாகக் காண்க.

(சென்னை '68 செப்.)

இடைவெளி (−3, 3) ஐ 1 அலகு சம இடைவெளியுள்ள 6 சிறு இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கவும். கீழ்க்கண்ட பட்டியல் கிடைக்கிறது.

x:	−3	−2	−1	0	1	2	3
y:	9·0554	4·1231	1·4142	1	1·4142	4·1231	9·0554

h = 1.

$$\therefore \int_{-3}^{3} \sqrt{1+x^4}\, dx = \frac{3h}{10}\Big[(y_{-3}+y_3)+5(y_{-2}+y_2)+(y_{-1}+y_1)+6y_0)\Big]$$

$$= \frac{3}{10}\Big[(9{\cdot}0554+9{\cdot}0554)+5(4{\cdot}1231+4{\cdot}1231)$$

$$+(1{\cdot}4142+1{\cdot}4142)+6\Big]$$

$$= \frac{3}{10}\Big[18{\cdot}1108+4{\cdot}2310+2{\cdot}8284+6\Big]$$

$$= 20{\cdot}45106.$$

11.8. கிரிகோரியின் வாய்பாடு (Gregory's formula)

D என்பது வகையீட்டுச் செயலி என்றால் $e^{hD} = 1+\triangle$ என்று நாமறிவோம்.

$$\therefore D = \frac{1}{h} \log_e (1+\triangle)$$

மேலும் D^{-1} என்பது தொகையீட்டுச் செயலியாகும்.

ஆகவே, $$D^{-1} = \frac{1}{D} = \frac{h}{\log_e (1+\triangle)}$$

$$\therefore \int f(x)\, dx = D^{-1} f(x) = \frac{h}{\log_e (1+\triangle)}\, f(x)$$

$$\therefore \int_a^{a+nh} f(x)\, dx = \left[\frac{h\, f(x)}{\log_e (1+\triangle)}\right]_a^{a+nh}$$

$$= h\left[\frac{f(a+nh)}{\log_e (1+\triangle)} - \frac{f(a)}{\log_e (1+\triangle)}\right]$$

இப்பொழுது, $y_0=f(a)$, $y_1=f(a+h)$, $y_2=f(a+2h)$,.........,
$y_n=f(a+nh)$ எனக் கொண்டால்,

$$\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = h\left[\frac{y_n}{\log_e(1+\triangle)} - \frac{y_0}{\log_e(1+\triangle)}\right]$$

ஆனால், $\nabla = 1 - E^{-1}$ $\quad \therefore E^{-1} = 1 - \nabla$

அல்லது $E = \dfrac{1}{1-\nabla}$

$$\therefore \log_e(1+\triangle) = \log_e E = \log_e \frac{1}{1-\nabla} = -\log_e(1-\nabla)$$

$$\therefore \frac{1}{\log_e(1+\triangle)} = \frac{-1}{\log_e(1-\nabla)}$$

$$\therefore \int_a^{a+nh} f(x)\,dx = h\left[\frac{-y_n}{\log_e(1-\nabla)} - \frac{y_0}{\log_e(1+\triangle)}\right]$$

ஆனால் $\log_e(1+\triangle) = \triangle - \dfrac{\triangle^2}{2} + \dfrac{\triangle^3}{3} - \dfrac{\triangle^4}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\therefore \frac{1}{\log_e(1+\triangle)} = \frac{1}{\left(\triangle - \frac{\triangle^2}{2} + \frac{\triangle^3}{3} - \frac{\triangle^4}{4} + \ldots\right)}$$

$$= \frac{1}{\triangle}\left[1 - \left(\frac{\triangle}{2} - \frac{\triangle^2}{3} + \frac{\triangle^3}{4} - \ldots\ldots\right)\right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{\triangle}\left[1 + \left(\frac{\triangle}{2} - \frac{\triangle^2}{3} + \frac{\triangle^3}{4} - \ldots\right) + \left(\frac{\triangle}{2} - \frac{\triangle^2}{3} + \frac{\triangle^3}{4} - \ldots\right)^2 + \ldots\ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{\triangle}\left[1 + \frac{1}{2}\triangle - \frac{1}{12}\triangle^2 + \frac{1}{24}\triangle^3 - \frac{19}{720}\triangle^4 + \frac{3}{160}\triangle^5 - \ldots\ldots\ldots\right]$$

இதுபோல், $\dfrac{1}{\log_e(1-\nabla)} = -\dfrac{1}{\nabla}\left[1 - \dfrac{1}{2}\nabla - \dfrac{1}{12}\nabla^2 - \dfrac{1}{24}\nabla^3 - \dfrac{19}{720}\nabla^4 - \dfrac{3}{160}\nabla^5 - \ldots\ldots\right]$

$$\therefore \int_a^{a+nh} f(x)\,dx = h\Big[\frac{1}{\nabla}\Big(1-\frac{1}{2}\nabla-\frac{1}{12}\nabla^2-\frac{1}{24}\nabla^3-\frac{19}{720}\nabla^4-\frac{3}{160}\nabla^5-\dots\Big)y_n-\frac{1}{\Delta}\Big(1+\frac{1}{2}\Delta-\frac{1}{12}\Delta^2+\frac{1}{24}\Delta^3-\frac{19}{720}\Delta^4+\frac{3}{160}\Delta^5-\dots\Big)y_0\Big]$$

$$=h\Big[\Big(\frac{1}{\nabla}y_n-\frac{1}{\Delta}y_0\Big)-\frac{1}{2}\Big(y_n+y_0\Big)-\frac{1}{12}\Big(\nabla y_n-\Delta y_0\Big)-\frac{1}{24}\Big(\nabla^2 y_n+\Delta^2 y_0\Big)-\frac{19}{720}\Big(\nabla^3 y_n-\Delta^3 y_0\Big)-\frac{3}{160}\Big(\nabla^4 y_n+\Delta^4 y_0\Big)-\dots\Big]$$

ஆனல் $\frac{1}{\nabla}y_n-\frac{1}{\Delta}y_0=\frac{1}{E^{-1}\Delta}E^n y_0-\frac{1}{\Delta}y_0$

$$=\frac{E^{n+1}y_0}{\Delta}-\frac{y_0}{\Delta}$$

$$=\frac{(E^{n+1}-1)\,y_0}{\Delta}$$

$$=\frac{E^{n+1}-1}{E-1}\,y_0$$

$$=(E^n+E^{n-1}+\dots+E^2+E+1)\,y_0$$

$$=y_0+Ey_0+E^2y_0+\dots+E^ny_0$$

$$=(y_0+y_1+y_2+\dots+y_n)$$

$$\therefore \int_a^{a+nh} f(x)\,dx = h\Big[\Big(y_0+y_1+y_2\dots+y_n\Big)-\frac{1}{2}\Big(y_n+y_0\Big)-\frac{1}{12}\Big(\nabla y_n-\Delta y_n\Big)-\frac{1}{24}\Big(\nabla^2 y_n+\Delta^2 y_0\Big)-\frac{19}{720}\Big(\nabla^3 y_n-\Delta^3 y_0\Big)-\frac{3}{160}\Big(\nabla^4 y_n+\Delta^4 y_0\Big)-\dots\Big]$$

$$=h\Big[\frac{1}{2}\Big(y_0+y_n\Big)+\Big(y_1+y_2+\dots+y_{n-1}\Big)-\frac{1}{12}\Big(\nabla y_n-\Delta y_0\Big)-\frac{1}{24}\Big(\nabla^2 y_n+\Delta^2 y_0\Big)-\frac{19}{720}\Big(\nabla^3 y_n-\Delta^3 y_0\Big)-\frac{3}{160}\Big(\nabla^4 y_n+\Delta^4 y_0\Big)-\dots\Big]$$

ஆனால் $\nabla^m y_k = \Delta^m y_{k-m}$

$\therefore\ \nabla y_n = \Delta y_{n-1};\ \ \nabla^2 y_n = \Delta^2 y_{n-2};\ \ \nabla^3 y_n = \Delta^3 y_{n-3};$

$$\therefore \int_a^{a+nh} f(x)\,dx = h\Big[\frac{1}{2}\Big(y_0 + y_n\Big) + \Big(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\Big) - \frac{1}{12}\Big(\Delta y_{n-1} - \Delta y_0\Big) - \frac{1}{24}\Big(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0\Big) - \frac{19}{720}\Big(\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0\Big) - \frac{3}{160}\Big(\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0\Big) - \dots\Big]$$

இவ்வாய்பாடு கிரிகோரியின் எண்சார் தொகை வாய்பாடாகும்.

மாதிரி 135

கிரிகோரியின் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $\int_{25}^{30} \frac{dx}{x}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

$h = 1$ எனக் கொண்டு இடைவெளி (25, 30) ஐ 5 சிறு சம இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கவும்.

$y = \frac{1}{x}$ எனக் கொண்டு, y இன் மதிப்புக்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியல் படுத்தவும்.

x :	25	26	27	28	29	30
y :	0·04000	0·03846	0·03704	0·3571	0·03448	0·03333

இப்பொழுது இப்பட்டியலுக்கு வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்கவும்.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
25	0·04000				
		−0·00154			
26	0·03846		0·00012		
		−0·00142		−0·00003	
27	0·03704		0·00009		0·00004
		−0·00133		0·00001	
28	0·03571		0·00010		−0·00003
		−0·00123		−0·00002	
29	0·03448		0·00008		
		−0·00115			
30	0·03333				

கிரிகோரியின் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்துக.

$$\int_{25}^{30}\frac{dx}{x}=h\Big[\frac{1}{2}\Big(y_{25}+y_{30}\Big)+\Big(y_{26}+y_{27}+y_{28}+y_{29}\Big)$$

$$-\frac{1}{12}\Big(\Delta y_{29}-\Delta y_{25}\Big)-\frac{1}{24}\Big(\Delta^2 y_{28}+\Delta^2 y_{25}\Big)$$

$$-\frac{19}{720}\Big(\Delta^3 y_{27}-\Delta^3 y_{25}\Big)-\frac{3}{160}\Big(\Delta^4 y_{26}+\Delta^4 y_{25}\Big)\ldots\ldots\ldots\Big]$$

$$=1\Big[\frac{1}{2}\Big(0{\cdot}04000+0{\cdot}33333\Big)+\Big(0{\cdot}03846+0{\cdot}03704$$

$$+0{\cdot}03571+0{\cdot}03448\Big)-\frac{1}{12}\Big(-0{\cdot}00115+0{\cdot}00154\Big)$$

$$-\frac{1}{24}\Big(0{\cdot}00008+0{\cdot}00012\Big)-\frac{19}{720}\Big(-0{\cdot}00002+0{\cdot}00003\Big)$$

$$-\frac{3}{160}\Big(-0{\cdot}00003-0{\cdot}00004\Big)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\Big(0{\cdot}07333\Big)+\Big(0{\cdot}14569\Big)-\frac{1}{12}\Big(0{\cdot}00039\Big)$$

$$-\frac{1}{24}\Big(0{\cdot}00020\Big)-\frac{19}{720}\Big(0{\cdot}00001\Big)-\frac{3}{160}\Big(-0{\cdot}00007\Big)$$

$$=0{\cdot}0366667+0{\cdot}14569-0{\cdot}0000325-0{\cdot}0000083$$
$$-0{\cdot}0000002+0{\cdot}0000001$$

$$=0{\cdot}1823158.$$

11.9 யூலர்-மக்லாரின் வாய்பாடு (Euler-Maclaurin formula)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொகைச் சார்பினை $f(x)$ எனக் கொள்க. $f(x)$ ஐ முதல் நிலை வேறுபாடாகக் கொண்ட $F(x)$ என்ற மற்றொரு சார்பினைக் கருதுக. அதாவது, $\Delta F(x)=f(x)$.

$$\therefore\quad f(0)+f(1)+f(2)+\ldots\ldots+f(n-1)=\Delta F(0)+\Delta F(1)+\Delta F(2)$$
$$+\ldots\ldots+\Delta F(n-1)$$

$$=[F(1)-F(0)]+[F(2)-F(1)]+[F(3)-F(2)]$$
$$+\ldots\ldots+[F(n)-F(n-1)]$$

$$=F(n)-F(0)\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad(1)$$

இப்பொழுது, $h=1$ எனக் கொண்டால்,

$$\triangle = e^{hD}-1=e^{D}-1$$

$$\therefore \quad \triangle^{-1}=(e^{D}-1)^{-1}$$

$$=\left(D+\frac{D^2}{2!}+\frac{D^3}{3!}+\frac{D^4}{4!}+\ldots\ldots\right)^{-1}$$

$$=D^{-1}\left(1+\frac{D}{2}+\frac{D^2}{6}+\frac{D^3}{24}+\ldots\ldots\right)^{-1}$$

$$=D^{-1}\left[1+\left(\frac{D}{2}+\frac{D^2}{6}+\frac{D^3}{24}+\ldots\ldots\right)\right]^{-1}$$

$$=D^{-1}\left[1-\left(\frac{D}{2}+\frac{D^2}{6}+\frac{D^3}{24}+\ldots\ldots\right)+\left(\frac{D}{2}+\frac{D^2}{6}+\frac{D^3}{24}+\ldots\ldots\right)^2+\ldots\ldots\right]$$

$$=D^{-1}\left[1-\frac{D}{2}+\frac{D^2}{12}-\frac{D^4}{720}+\frac{D^6}{30240}-\ldots\ldots\right]$$

இப்பொழுது, $\triangle F(x)=f(x)$

$$\therefore \quad F(x)=\triangle^{-1} f(x)$$

$$=D^{-1}\left[1-\frac{D}{2}+\frac{D^2}{12}-\frac{D^4}{720}+\frac{D^6}{30240}-\ldots\ldots\right] f(x)$$

$$=D^{-1}f(x)-\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{12}D\,f(x)-\frac{1}{720}D^3 f(x)+\frac{1}{30240}D^5 f(x)-\ldots\ldots$$

$$=\int f(x)-\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{12}f'(x)-\frac{1}{720}f'''(x)+\frac{1}{30240}f^{v}(x)-\ldots\ldots$$

$$\therefore \quad \int f(x)\,dx=F(x)+\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{12}f'(x)+\frac{1}{720}f'''(x)-\frac{1}{30240}f^{v}(x)+\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \quad \int_0^n f(x)\,dx=\left[F(x)+\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{12}f'(x)+\frac{1}{720}f'''(x)-\frac{1}{30240}f^{v}(x)+\ldots\ldots\ldots\right]_0^n$$

$$= \Big[F(n) - F(0)\Big] + \frac{1}{2}\Big[f(n) - f(0)\Big] - \frac{1}{12}\Big[f'(n) - f'(0)\Big] + \frac{1}{720}\Big[f'''(n) - f'''(0)\Big] - \frac{1}{30240}\Big[f^{v}(n) - f^{v}(0)\Big] + \ldots\ldots\ldots$$

F (n) − F(0) க்குச் சமன்பாடு (1) இலிருந்து பிரதியிடவும்.

$$\therefore \int_{0}^{n} f(x)\,dx = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots\ldots\ldots + f(n-1)$$

$$+ \frac{1}{2}\Big[f(n) - f(0)\Big] - \frac{1}{12}\Big[f'(n) - f'(0)\Big] + \frac{1}{720}\Big[f'''(n) - f'''(0)\Big[- \frac{1}{30240}\Big]f^{v}(n) - f^{v}(0)\Big] + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2}\Big[f(0) + f(n)\Big] + \Big[f(1) + f(2) + \ldots\ldots\ldots + f(n-1)\Big] - \frac{1}{12}\Big[f'(n) - f'(0)\Big] + \frac{1}{720}\Big[f'''(n) - f'''(0)\Big] - \frac{1}{30240}\Big[f^{v}(n) - f^{v}(0)\Big] + \ldots\ldots\ldots$$

இது யூலர்-மக்லாரின் தொகை வாய்பாட்டின் ஒரு வடிவமாகும். தொகையீட்டு இடைவெளியை (a, a+nh) என்று எடுத்துக் கொண்டால் இவ்வாய்பாட்டின் பொது வடிவம் கிடைக்கிறது. அதாவது,

$$\frac{1}{h}\int_{a}^{a+nh} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\Big[f(0) + f(n)\Big] + \Big[f(1) + f(2) + \ldots\ldots + f(n-1)\Big] - \frac{h}{12}\Big[f'(n) - f'(0)\Big] + \frac{h^3}{720}\Big[f'''(n) - f'''(0)\Big] - \frac{h^5}{30240}\Big[f^{v}(n) - f^{v}(0)\Big] + \ldots\ldots\ldots$$

யூலர்-மக்லாரின் வாய்பாட்டின் மூலம் பெறப்படும் தொகையின் மதிப்பு துல்லியத்தை மிகவும் நெருங்கியதாகயிருக்கும். தொடர்

களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் காண இவ்வாய்பாடு மிகவும் பயன் படுகிறது.

மாதிரி 136

ஒரு சார்பின் எண்சார் தொகை காண யூலர்-மக்லாரின் வாய்பாட்டை நிறுவுக. அதன் மூலம் $\int_{100}^{105} \frac{dx}{x}$ இன் மதிப்பை ஏழு தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

(சென்னை '64 ஏப்.)

இங்கு $f(x)=\frac{1}{x}$; $h=1$ எனக் கொள்க.

$$f(100)=0{\cdot}01000000$$
$$f(101)=0{\cdot}00990099$$
$$f(102)=0{\cdot}00980392$$
$$f(103)=0{\cdot}00970874$$
$$f(104)=0{\cdot}00961539$$
$$f(105)=0{\cdot}00952381$$

மேலும், $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$; $f'''(x)=\frac{-6}{x^4}$;

$$\therefore \quad f'(100)=-\frac{1}{100^2}=-0{\cdot}0001$$

$$f'(105)=-\frac{1}{105^2}=-0{\cdot}0000907\ ;\ldots\ldots\ldots\ldots$$

யூலர்-மக்லாரின் வாய்பாட்டின்படி,

$$\int_{100}^{105}\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\Big[f(100)+f(105)\Big]+\Big[f(101)-f(102)+f(103)$$

$$+f(104)\Big]-\frac{1}{12}\Big[f'(105)-f'(100)\Big]+\ldots\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{2}\Big[0{\cdot}01+0{\cdot}00952381\Big]+\Big[0{\cdot}03902904\Big]$$

$$-\frac{1}{12}\Big[-0{\cdot}0000907+0{\cdot}0001\Big]+\ldots\ldots$$

$$=0{\cdot}0097619+0{\cdot}03902904-0{\cdot}000000775$$

$$=0{\cdot}048790175$$

$$=0{\cdot}0487902$$ (ஏழு தசம இடங்களுக்கு)

17.10. நியூட்டன்-கோட்ஸ் வாய்பாடு (Newton-Cotes formula)

$x=x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்ற மதிப்புக்களுக்குரிய சார்பலன்களால் பட்டியல் படுத்தப்பட்ட சார்பு f (x)ஐக் கருதுக. f (x) என்பது (n+1)க்கு குறைவானபடி பெற்ற ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையானல், இலக்ராஞ்சியின் இடைச் செருகல் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி f (x)இன் அமைப்பைக் காணலாம். அதாவது,

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots\ldots(x_0-x_n)} f(x_0)$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots\ldots(x_1-x_n)} f(x_1)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0(x_n-x_1)\ldots\ldots(x_n-x_{n-1})} f(x_n)$$
$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_{r-1})(x-x_r+1)\ldots(x-x_n)}{(x_r-x_0)(x_r-x_1)\ldots(x_r-x_{r-1})(x_r-x_r+1)\ldots(x_r-x_n)} f(x_r)$$

இப்பொழுது, $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்ற x இன் மதிப்புக்கள் h என்ற சம இடைவெளியில் இருப்பதாகக் கொள்க.

$$\because h=(x_1-x_0)=(x_2-x_1)=\ldots\ldots=(x_r-x_{r-1})=(x_{r+1}-x_r)=\ldots\ldots$$
$$=(x_n-x_{n-1})$$

$$\therefore\ x_r-x_0=rh,$$
$$x_r-x_1=(r-1)\,h,$$
$$x_r-x_2=(r-2)\,h,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

இப்பொழுது $u=\dfrac{x-x_0}{h}$ என்று மாற்றுக.

$$\therefore\ x-x_0=u\,h,$$
$$\therefore\ x-x_1=(u-1)\,h,$$
$$x-x_2=(u-2)\,h,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore\ f(x)=\sum_{r=0}^{n} \frac{uh\cdot(u-1)h\ldots(u-\overline{r-1})h\cdot(u-\overline{r+1})h\ldots(u-n)h}{rh(r-1)h\ldots(1)h\cdot(-1)h\cdot(-2h)\ldots(r-n)h.} \times f(x_r)$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)(u-r-1)\ldots(u-n)}{r(r-1)\ldots\ldots1\cdot(-1)(-2)\ldots\ldots[-(n-r)]} \times f(x_r)$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-r+1)(u-r)(u-r-1\ldots(u-n)}{r!\,(-1)^{n-r}\cdot(n-r)!\,(u-r)} \times f(x_r)$$

$$= \sum_{r-0}^{n} \frac{(-1)^{n-r}}{r!\,(n-r)!}\cdot\frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-n)}{(u-r)}\cdot f(x_r)$$

இங்கு $x-x_0=uh \quad \therefore\ dx=h\,du.$

$$\therefore \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_0^n \left[\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{n-r}}{r!\,(n-r)!}\cdot\frac{u(u-1)\;(u-2)\ldots(u-n)}{(u-r)}\right] \times f(x_r)\,h\,du$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \left[\frac{h(-1)^{n-r}}{r!\;(n-r)!}\int_0^n \frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-n)}{u-r}\cdot du\right] \times f(x_r)$$

இப்போது, $\frac{h(-1)^{n-r}}{r!\,(n-r)!}\int_0^n \frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-n)}{u-r}\cdot du=H_r$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \int_{x_0}^{x_n} f(x)\;dx= \sum_{r=0}^{n} H_r\,f(x_r) = H_0f(x_0)+H_1f(x_1)+\ldots+H_nf(x_n)$$

இது நியூட்டன்—கோட்ஸ் எண்சார் தொகை வாய்பாடு என வழங்கப்படுகிறது. இவ்வாய்பாட்டில் $n=1, 2, 3, 6, \ldots$ எனப் பிரதியிட்டுச் சுருக்கினுல் முறையே கோடகம் சார்ந்த விதி, சிம்சனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதி, சிம்சனின் $\frac{3}{8}$ ஆவது விதி, வெடில்-இன் விதி,...... ஆகியவை கிடைக்கும். எடுத்துக் காட்டாக, $n=1$ எனக்கொள்க.

$$\therefore\ r=0, 1 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \int_{x_0}^{x_1} f(x)\;dx= \sum_{r=0}^{1} H_r\,f(x_r)=H_0f\;(x_0)+H_1f\;(x_1)$$

இங்கு $H_0 = -\frac{h}{1}\int_0^1 \frac{u(u-1)}{u}\,du$

$$= -h\left(\frac{u^2}{2} - u\right)_0^1$$

$$= -h\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{h}{2}$$

$$H_1 = \frac{h}{1}\int_0^1 \frac{u(u-1)}{u-1}\,du$$

$$= h\left(\frac{u^2}{2}\right)_0^1$$

$$= \frac{h}{2}$$

$$\therefore \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2} f(x_0) + \frac{h}{2} f(x_1)$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f\,x_1)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[y_0 + y_1\right]$$

இது போன்று,

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[y_1 + y_2\right]$$

$$\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[y_2 + y_3\right]$$

....

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[y_{n-1} + y_n\right]$$

எல்லாவற்றையும் கூட்டுக.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[\,y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots\ldots + 2y_{n-1} + y_n\,\right]$$

$$= h\left[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + (y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{n-1})\right]$$

இப்பொழுது $n = 2$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore\ r = 0, 1, 2$ ஆகும்.

$$\because \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = H_0 f(x_0) + H_1 f(x_1) + H_2 f(x_2)$$

இப்பொழுது, $H_r = \dfrac{h\,(-1)^{2-r}}{r\,!\,(2-r)\,!}\displaystyle\int_0^2 \frac{u\,(u-1)\,(u-2)}{u-r}\,du$

$$\therefore\ H_0 = \frac{h}{2\,!}\int_0^2 \frac{u\,(u-1)\,(u-2)}{u}\,du$$

$$= \frac{h}{2}\int_0^2 (u^2 - 3u + 2)\,du$$

$$= \frac{h}{2}\left(\frac{u^3}{3} - \frac{3u^2}{3} + 2u\right)_0^2$$

$$= \frac{h}{3}$$

$$H_1 = -\frac{h}{1\,!}\int_0^2 \frac{u\,(u-1)\,(u-2)}{u-1}\,du$$

$$= -h\int_0^2 (u^2 - 2u)\,du$$

$$= -h\left(\frac{u^3}{3} - u^2\right)_0^2$$

$$= \frac{4h}{3}$$

$$H_2=\frac{h}{2!}\int_0^2 \frac{u(u-1)(u-2)}{u-2}\,du$$

$$=\frac{h}{2}\int_0^2 (u^2-u)\,du$$

$$=\frac{h}{2}\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}\right)_0^2$$

$$=\frac{h}{3}$$

$$\therefore \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx=\frac{h}{3}\;f(x_0)+\frac{4h}{3}f(x_1)+\frac{h}{3}f(x_2)$$

$$=\frac{h}{3}\;[y_0+4y_1+y_2]$$

இதுபோன்று,

$$\int_{x_4}^{x_4} f(x)\,dx=\frac{h}{3}\;[y_2+4y_3+y_4]$$

$$\int_{x_4}^{x_6} f(x)\,dx=\frac{h}{3}\;[y_4+4y_5+y_6]$$

....

....

n ஒரு இரட்டையெண்ணுனுல்,

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx=\frac{h}{3}\;[y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n]$$

எல்லாவற்றையும் கூட்டுக.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx=\frac{h}{3}\;\Big[(y_0+y_n)+4\,(y_1+y_3+y_5+\ldots\ldots+y_{n-1})$$

$$+2\,(y_2+y_4+\ldots\ldots+y_{n-2})\Big]$$

இது சிம்சனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதியாகும்.

இதுபோன்று மற்ற விதிகளையும் பெறலாம்.

இவ்வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி கணக்குகளைச் செய்ய உதவியாக யிருக்கும் பொருட்டு n, h ஆகியவற்றின் சில மதிப்புக்களுக்குரிய H_r இன் மதிப்புக்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

H_r இன் சூத்திரத்திலிருந்து $H_r = H_{n-r}$ என்பதைக் காணலாம்.

(i) $n=1\,;\ h=1 : H_0 = H_1 = \frac{1}{2}$

(ii) $n=2\,;\ h=\frac{1}{2} : H_0 = H_2 = \frac{1}{6}\,;\ H_1 = \frac{2}{3}$

(iii) $n=3\,;\ h=\frac{1}{3} : H_0 = H_3 = \frac{1}{8}\,;\ H_1 = H_2 = \frac{3}{8}$

(iv) $n=4\,;\ h=\frac{1}{4} : H_0 = H_4 = \frac{7}{90}\,;\ H_1 = H_3 = \frac{16}{45}\,;\ H_2 = \frac{2}{15}$

(v) $n=5\,;\ h=\frac{1}{5} : H_0 = H_5 = \frac{19}{288}\,;\ H_1 = H_4 = \frac{25}{96}\,;\ H_2 = H_3 = \frac{25}{144}$

(vi) $n=6\,;\ h=\frac{1}{6} : H_0 = H_6 = \frac{41}{840}\,;\ H_1 = H_5 = \frac{9}{35}\,;\ H_2 = H_4 = \frac{9}{280}\,;$
$H_3 = \frac{34}{105}$

எப்போதும் $H_0 + H_1 + H_2 + \ldots\ldots + H_n = nh$ ஆகியிருக்க வேண்டு மென்பதைக் கவனிக்கவும்.

மாதிரி 137

நியூட்டன்—கோட்ஸ் இன் தொகை வாய்பாட்டை நிரூபிக்க வும். இவ்வாய்பாட்டின் மூலம் தொகை இடைவெளியை 8 சம பாகங் களாகப் பிரித்து $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ இன் மதிப்பை எட்டு தசம இடங் களுக்குக் காண்க. (சென்னை '60 ஏப்., '64 செப்.)

இங்கு $n=8\,;\quad \therefore\ h=\frac{1}{8}\,;\ f(x) = \frac{1}{1+x}.$

கீழ்க்காணும் பட்டியலை அமைக்கவும்.

x :	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	1
f (x) :	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

நியூட்டன்—கோட்ஸ் வாய்பாட்டிலிருந்து,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = H_0\, f(x_0) + H_1\, f(x_1) + H_2\, f(x_2) + \ldots\ldots + H_8\, f(x_8)$$

$$= H_0 + \frac{8}{9}H_1 + \frac{4}{5}H_2 + \frac{8}{11}H_3 + \frac{2}{3}H_4 + \frac{8}{13}H_5 + \frac{4}{7}H_6 + \frac{8}{15}H_7 + \frac{1}{2}H_8$$

இப்பொழுது, $H_0=H_8$; $H_1=H_7$; $H_2=H_6$;.........

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\left(1+\frac{1}{2}\right)H_0+\left(\frac{8}{9}+\frac{8}{15}\right)H_1+\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{7}\right)H_2$$

$$+\left(\frac{8}{11}+\frac{8}{13}\right)H_3+\frac{2}{3}H_4$$

$$=\frac{3}{2}H_6+\frac{192}{135}H_1+\frac{48}{35}H_3+\frac{192}{143}H_3+\frac{2}{3}H_4$$

இப்பொழுது,

$$H_r=\frac{\frac{1}{8}(-1)^{8-r}}{r!\,(8-r)!}\int_0^8 \frac{u(u-1)(u-2)\ldots\ldots(u-8)}{u-r}.\,du.$$

$r=0, 1, 2, 3, 4$ ஆகிய மதிப்புக்களுக்கு இத்தொகைகளைக் கணக்கிட்டால்,

$$H_0=\frac{989}{28350};\qquad H_1=\frac{2944}{14175};$$

$$H_2=\frac{-464}{14175};\qquad H_3=\frac{5248}{14175};$$

$$H_4=\frac{-454}{2835}.$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\frac{3}{2}\left(\frac{989}{28350}\right)+\frac{192}{135}\left(\frac{2944}{14175}\right)+\frac{48}{35}\left(\frac{-464}{14175}\right)$$

$$+\frac{192}{143}\left(\frac{5248}{14175}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{-454}{2835}\right)$$

$$=0\cdot69314721$$

11.11 ஸ்டெர்லிங்-இன் மைய வேறுபாட்டுப் பரப்பு காண் வாய்பாடு (Stirling's central difference quadrature formula)

ஸ்டெர்லிங்-இன் இடைச்செருகல் வாய்பாட்டைக் கருதுக.

$$f(x)=f(a+hu)=F(u)=F(0)+u.\ \frac{\Delta F(-1)+\Delta F(0)}{3}$$

$$+\frac{u^2}{2!}\Delta^2F(-1)+\frac{u(u^2-1)}{3!}.\ \frac{\Delta^3F(-2)+\Delta^3F(-1)}{2}$$

$$+\frac{u^2(u^2-1^2)}{4!}\Delta^4F(-2)+\ldots\ldots\ldots$$

$(a-h,\ a+h)$ இடைவெளியில் $f(x)$ ஐத் தொகையிடவும்.

$$x = a - h \text{ ஆனால், } u = \frac{x-a}{h} = \frac{a-h-a}{h} = -1$$

$$x = a + h \text{ ஆனால், } u = \frac{a+h-a}{h} = 1.$$

$$dx = h\,du.$$

$$\therefore \int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} F(u)\,h\,du.$$

$$= h\int_{-1}^{1}\Big[F(0) + u.\frac{\triangle F(-1) + \triangle F(0)}{2} + \frac{u^2}{2!}\triangle^2 F(-1)$$

$$+ \frac{u(u^2-1)}{3!}\,\frac{\triangle^3 F(-2) + \triangle^3 F(-1)}{2} + \frac{u^2(u^2-1)}{4!}\triangle^4 F(-2) + \ldots\Big]du$$

$$= h\Big[u\,F(0) + \frac{u^2}{2}\cdot\frac{\triangle F(-1) + \triangle F(0)}{2} + \frac{u^3}{6}\triangle^2 F(-1)$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{u^4}{4} - \frac{u^2}{2}\right)\frac{\triangle^3 F(-2) + \triangle^3 F(-1)}{2}$$

$$+ \frac{1}{4!}\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right)\triangle^4 F(-2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\Big]_{-1}^{1}$$

$$= h\Big[2\,F(0) + \frac{1}{3}\triangle^2 F(-1) + \frac{1}{24}\left(-\frac{4}{15}\right)\triangle^4 F(-2) + \ldots\ldots\ldots\Big]$$

$$= h\Big[2\,F(0) + \frac{1}{3}\triangle^2 F(-1) - \frac{1}{90}\triangle^4 F(-2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]$$

$$= 2h\Big[F(0) + \frac{1}{6}\triangle^2 F(-1) - \frac{1}{180}\triangle^4 F(-2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]$$

இப்பொழுது தொகையிடைவெளியை ஒரு அலகு ($=h$) அதிகப் படுத்தவும்.

$$\therefore \int_{a}^{a+2h} f(x)\,dx = 2h\Big[F(1) + \frac{1}{6}\triangle^2 F(0) - \frac{1}{180}\triangle^4 F(-1) + \ldots\Big]$$

இதுபோன்று,

$$\int_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx = 2h\Big[F(3) + \frac{1}{6}\triangle^2 F(2) - \frac{1}{180}\triangle^4 F(1) + \ldots\ldots\Big]$$

$$\int_{a+4h}^{a+6h} f(x)\,dx = 2h\left[F(5)+\frac{1}{6}\Delta^2 F(4)-\frac{1}{180}\Delta^4 F(3)+\ldots\ldots\right]$$

....

n இரட்டையெண்ணுனல்,

$$\int_{a+(n-2)h}^{a+nh} f(x)\,dx = 2h\left[F(n-1)+\frac{1}{6}\Delta^2 F(n-2)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{180}\Delta^4 F(n-3)+\ldots\ldots\right]$$

மேற்கண்ட யாவற்றையும் கூட்டினுல் ஸ்டெர்லிங்-இன் தொகை வாய்பாடு கிடைக்கிறது.

$$\int_{a}^{a+nh} f(x)\,dx = 2h\left[F(1)+F(3)+F(5)+\ldots\ldots\ldots\ldots+F(n-1)\right.$$

$$+\frac{1}{6}\left\{\Delta^2 F(0)+\Delta^2 F(2)+\ldots+\Delta^2 F(n-2)\right\}$$

$$-\frac{1}{180}\left\{\Delta^4 F(-1)+\Delta^4 F(1)+\ldots\Delta^4 F(n-3)\right\}$$

$$\left.+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

n ஒரு இரட்டையெண்ணுனல் மட்டுமே ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்த முடியும். அதுமட்டுமன்று; இவ் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்துவதற்கு, தொகையிடைவெளியின் எல்லைகட்குப் புறம்பான சார்பலன்களும் தேவைப்படுகின்றன.

11.12 பெஸ்ஸல்-இன் மைய வேறுபாட்டுப் பரப்புகாண் வாய்பாடு (Bessel's central difference quadrature formula)

பெஸ்ஸல்-இன் இடைச் செருகல் வாய்பாட்டைக் கருதுக.

$$f(x)=f(a+hu)=F(u)=\frac{F(0)+F(1)}{2}+\left(u-\frac{1}{2}\right)\Delta F(0)$$

$$+\frac{u(u-1)}{2!}\quad\frac{\Delta^2 F(-1)+\Delta^2 F(0)}{2}$$

$$+\frac{u\left(u-\frac{1}{2}\right)\left(u-1\right)}{3!}\triangle^3 F(-1)$$

$$+\frac{u(u^2-1)(u-2)}{4!}\;\frac{\triangle^4 F(-2)+\triangle^4 F(-1)}{2}+\dots\dots$$

$u=v+\frac{1}{2}$ என்று பிரதியிடுக.

$$\therefore f(x)=F\left(v+\frac{1}{2}\right)=\frac{F(0)+F(1)}{2}+v\,\triangle F(0)$$

$$+\frac{\left(v+\frac{1}{2}\right)\left(v-\frac{1}{2}\right)}{2!}\;\frac{\triangle^2 F(-1)+\triangle^2 F(0)}{2}$$

$$+\frac{\left(v+\frac{1}{2}\right)v\left(v-\frac{1}{2}\right)}{3!}\triangle^3 F(-1)$$

$$+\frac{\left(v+\frac{1}{2}\right)\left(v-\frac{1}{2}\right)\left(v+\frac{3}{2}\right)\left(v-\frac{3}{2}\right)}{4!}\cdot$$

$$\frac{\triangle^4 F(-2)+\triangle^4 F(-1)}{2}+\dots\dots\dots\dots$$

$$=\frac{F(0)+F(1)}{2}+v\,\triangle F(0)+\frac{(v^2-1/4)}{2}\cdot\frac{\triangle^2 F(-1)+\triangle^2 F(0)}{2}$$

$$+\frac{v(v^2-1/4)}{6}\triangle^3 F(-1)$$

$$+\frac{(v^2-1/4)(v^2-9/4)}{24}\;\frac{\triangle^4 F(-2)+\triangle^4 F(-1)}{2}$$

$$+\dots\dots\dots\dots$$

இப்பொழுது f (x)ஐ x=a முதல் x=a+h வரை தொகையிடவும். அதாவது, F (v+1/2)ஐ v=−1/2 முதல் v=1/2 வரை தொகையிடவும்.

$$\therefore \int_a^{a+h} f(x)\,dx=\int_{-1/2}^{1/2} F\left(v+\frac{1}{2}\right)\cdot h\,dv$$

$$=h\int_{-1/2}^{1/2}\Big[\frac{F(0)+F(1)}{2}+v\,\Delta F(0)$$

$$+\frac{1}{2}\left(v^2-\frac{1}{4}\right)\frac{\Delta^2F(-1)+\Delta^2F(0)}{2}$$

$$+\frac{1}{6}\,v\left(v^2-\frac{1}{4}\right)\Delta^3F(-1)$$

$$+\frac{1}{24}\left(v^2-\frac{1}{4}\right)\left(v^2-\frac{9}{4}\right)\frac{\Delta^4F(-2)+\Delta^4F(-1)}{2}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]dv$$

$$=h\Big[v\cdot\frac{F(0)+F(1)}{2}+\frac{v^2}{2}\Delta F(0)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{v^3}{3}-\frac{v}{4}\right)\frac{\Delta^2F(-1)+\Delta^2F(0)}{2}$$

$$+\frac{1}{6}\left(\frac{v^4}{4}-\frac{v^2}{8}\right)\Delta^3F(-1)$$

$$+\frac{1}{24}\left(\frac{v^5}{5}-\frac{5v^3}{6}+\frac{9v}{16}\right)\frac{\Delta^4F(-2)+\Delta^4F(-1)}{2}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]_{-1/2}^{1/2}$$

$$=h\Big[\frac{F(0)+F(1)}{2}-\frac{1}{12}\quad\frac{\Delta^2F(-1)+\Delta^2F(0)}{2}$$

$$+\frac{11}{720}\quad\frac{\Delta^4F(-2)+\Delta^4F(-1)}{2}+\ldots\ldots\Big]$$

இதேபோல்,

$$\int_{a+h}^{a+2h}f(x)\,dx=h\Big[\frac{F(1)+F(2)}{2}-\frac{1}{12}\quad\frac{\Delta^2F(0)+\Delta^2F(1)}{2}$$

$$+\frac{11}{720}\quad\frac{\Delta^4F(-1)+\Delta^4F(0)}{2}+\ldots\ldots\Big]$$

$$\int_{a+2h}^{a+3h}f(x)\,dx=h\Big[\frac{F(2)+F(3)}{2}-\frac{1}{12}\quad\frac{\Delta^2F(1)+\Delta^2F(2)}{2}$$

$$+\frac{11}{720}\quad\frac{\Delta^4F(0)+\Delta^4F(1)}{2}+\ldots\ldots\Big]$$

. . . .

$$\int_{a+(n-1)h}^{a+nh} f(x)\,dx = h\left[\frac{F(n-1)+F(n)}{2} - \frac{1}{12}\,\frac{\Delta^2 F(n-2)+\Delta^2 F(n-1)}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{11}{720}\,\frac{\Delta^4 F(n-3)+\Delta^4 F(n-2)}{2} + \cdots\cdots\cdots\right]$$

எல்லாவற்றையும் கூட்டுக.

$$\int_{a}^{a+nh} f(x)\,dx = h\left[\frac{F(0)+F(n)}{2} + F(1)+(2)+\cdots\cdots\cdots+F(n-1)\right.$$

$$-\frac{1}{12}\left\{\frac{\Delta^2 F(-1)+\Delta^2 F(n-1)}{2} + \Delta^2 F(0) + \Delta^2 F(1)\right.$$

$$\left. +\cdots\cdots + \Delta^2 F(n-2)\right\}$$

$$+\frac{11}{720}\left\{\frac{\Delta^4 F(-2)+\Delta^4 F(n-2)}{2} + \Delta^4 F(-1) + \Delta^4 F(0)\right.$$

$$\left.\left. +\cdots+\Delta^4 F(n-3)\right\} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right]$$

இங்கு n ஒற்றையெண்ணுகவோ அல்லது இரட்டையெண்ணுகவோயிருக்கலாம் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

ஆனல் $\Delta^2 F(-1) = \Delta F(0) - \Delta F(-1)$

$$\therefore \frac{\Delta^2 F(-1)}{2} = \frac{1}{2}\Delta F(0) - \frac{1}{2}\Delta F(-1)$$

மேலும், $\Delta^2 F(0) = \Delta F(1) - \Delta F(0)$

$$\Delta^2 F(1) = \Delta F(2) - \Delta F(1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^2 F(n-2) = \Delta F(n-1) - \Delta F(n-2)$$

$$\frac{\Delta^2 F(n-1)}{2} = \frac{1}{2}\Delta F(n) - \frac{1}{2}\Delta F(n-1)$$

கூட்டுக :

$$\frac{\Delta^2 F(-1)+\Delta^2 F(n-1)}{2} + \Delta^2 F(0) + \Delta^2 F(1) + \cdots$$

$$+\Delta^2 F(n-2)$$

$$= -\frac{1}{2}\triangle F(0) - \frac{1}{2}\triangle F(-1) + \frac{1}{2}\triangle F(n-1) + \frac{1}{2}\triangle F(n)$$

$$= \frac{\triangle F(n-1) + \triangle F(n)}{2} - \frac{\triangle F(-1) + \triangle F(0)}{2}$$

இதுபோல், $\dfrac{\triangle^4 F(-2)}{2} = \dfrac{1}{2}\triangle^3 F(-1) - \dfrac{1}{2}\triangle^3 F(-2)$

$$\triangle^4 F(-1) = \triangle^3 F(0) - \triangle^3 F(-1)$$

$$\triangle^4 F(0) = \triangle^3 F(1) - \triangle^3 F(0)$$

....

....

$$\triangle^4 F(n-3) = \triangle^3 F(n-2) - \triangle^3 F(n-3)$$

$$\frac{\triangle^4 F(n-2)}{2} = \frac{1}{2}\triangle^3 F(n-1) - \frac{1}{2}\triangle^3 F(n-2)$$

கூட்டுக :

$$\frac{\triangle^4 F(-2) + \triangle^4 F(n-2)}{2} + \triangle^4 F(-1) + \triangle^4 F(0) + \dots + \triangle^4 F(n-3)$$

$$= \frac{\triangle^3 F(n-2) + \triangle^3 F(n-1)}{2} - \frac{\triangle^3 F(-2) + \triangle F(-1)}{2}$$

இம்மதிப்புக்களைப் பிரதியிடவும்.

$$\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = h\Bigg[\left\{\frac{F(0)+F(1)}{2} + F(1) + F(2) + \dots + F(n-1)\right\}$$

$$-\frac{1}{12}\left\{\frac{\triangle F(n-1) + \triangle F(n)}{2} - \frac{\triangle F(-1) + \triangle F(0)}{2}\right\}$$

$$+\frac{11}{720}\left\{\frac{\triangle^3 F(n-2) + \triangle^3 F(n-1)}{2}\right.$$

$$\left. - \frac{\triangle^3 F(-2) + \triangle^3 F(-1)}{2}\right\} - \dots\dots\dots\Bigg]$$

இதுதான் பெஸ்ஸல்-இன் தொகை வாய்பாடாகும். n ஒற்றையெண்ணாயினும் அல்லது இரட்டையெண்ணாயினும் இவ்வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம். ஆனால், ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டைப்

போலவே, இவ்வாய்பாட்டைப் பயன் படுத்துவதற்கும் இடை வெளிக்குப் புறம்பான சார்பலன்களும் தேவைப் படுகின்றன.

மாதிரி 138

ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

இங்கு $f(x)=\frac{1}{x}$; $a=1$; $a+nh=2$

$n=10$ எனக் கொள்க. $\therefore\ h=0.1$

$u=\frac{x-a}{h}=\frac{x-1}{0{\cdot}1}$ என்று மாற்றிக்கீழ்க்கண்டவாறு வேறுபாட்டுப் பட்டியலமைக்கவும். தொகையிடை வெளியாகிய (1, 2) க்கு வெளியே இருபுறமும் x இன் சில மதிப்புக்களுக்குரிய f(x) இன் மதிப்புக்களையும் பட்டியலில் சேர்த்துக் கொள்ள வேண்டும்.

x	u	f(x)=F(u)	$\Delta F(u)$	$\Delta^2F(u)$	$\Delta^3F(u)$	$\Delta^4F(u)$
0·9	—1	1·11111				
			—0·11111			
1·0	0	1·00000		0·02020		
			—0·09091		—0·00505	
1·1	1	0·90909		0·01515		0·00156
			—0·07576		—0·00349	
1·2	2	0·83333		0·01166		0·00099
			—0·06410		—0·00250	
1·3	3	0·76923		0·00916		0·00066
			—0·05494		—0·00184	
1·4	4	0·71429		0·00732		0·00047
			—0·04762		—0·00137	
1·5	5	0·66667		0·00595		0·00033
			—0·04167		—0·00104	
1·6	6	0·62500		0·00491		0·00021
			—0·03676		—0·00083	
1·7	7	0·58824		0·00408		0·00019
			—0·03268		—0·00064	
1·8	8	0·55556		0·00344		0·00012
			—0·02924		—0·00052	
1·9	9	0·52632		0·00292		0·00011
			—0·02632		—0·00041	
2·0	10	0·50000		0·00251		
			—0·02381			
2·1	11	0·47619				

ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தவும்.

$$\therefore \int_1^2 \frac{dx}{x} = 2\Big[F(1)+F(3)+F(5)+F(7)+F(9)$$

$$+\frac{1}{6}\Big\{\Delta^2 F(0)+\Delta^2 F(2)+\Delta^2 F(4)+\Delta^2 F(6)+\Delta^2 F(9)\Big\}$$

$$-\frac{1}{180}\Big\{\Delta^4 F(-1)+\Delta^4 F(1)+\Delta^4 F(3)+\Delta^4 F(5)$$

$$+\Delta^4 F(7)\Big\}\Big]$$

$$=0{\cdot}2\Big[0{\cdot}90909+0{\cdot}76923+0{\cdot}6667+0{\cdot}58824+0{\cdot}52632$$

$$+\frac{1}{6}\Big(0{\cdot}15154+0{\cdot}00916+0{\cdot}00595+0{\cdot}00408+0{\cdot}00292\Big)$$

$$-\frac{1}{180}\Big(0{\cdot}00156+0{\cdot}00066+0{\cdot}00033+0{\cdot}00019+0{\cdot}00011\Big)\Big]$$

$$=0{\cdot}2\,[3{\cdot}45955+0{\cdot}00621-0{\cdot}000016]$$

$$=0{\cdot}69314$$

மாதிரி 139

π-இன் மதிப்பை $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து கணக்கிடுக.

இங்கு $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $a=0$, $a+nh=1$

$n=10$ எனக் கொள்க. $\therefore h=0{\cdot}1$

$u=\frac{x-a}{h}=\frac{x}{0{\cdot}1}$ என்று மாற்றிக் கீழ்க்கண்டவாறு வேறுபாட்டியலமைக்கவும்.

x	u	f(x)=F(u)	△ F(u)	△² F(u)	△³ F(u)
−0·2	−2	0·96154			
			0·02856		
−0·1	−1	0·99010		−0·01866	
			0·00990		−0·00114
0·0	0	1·00000		−0·01980	
			−0·00990		0·00114
0·1	1	0·99010		−0·01866	
			−0·02856		0·00311
0·2	2	0·96154		−0·01555	
			−0·04411		0·00430
0·3	3	0·91743		−0·01125	
			−0·05536		0·00454
0·4	4	0·86207		−0·00671	
			−0·06207		0·00407
0·5	5	0·80000		−0·00264	
			−00·6471		0·00320
0·6	6	0·73529		0·00056	
			−0·06415		0·00221
0·7	7	0·67114		0·00277	
			−0·06138		0·00134
0·8	8	0·60976		0·00411	
			−0·05727		0·00067
0·9	9	0·55249		0·00478	
			−0·05249		0·00020
1·0	10	0·50000		0·00498	
			−0·04751		0·00012
1·1	11	0·45249		0·00486	
			−0·04265		
1·2	12	0·40984			

பெஸ்ஸல் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தவும்.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = h\left[\frac{F(0)+F(10)}{2} + F(1) + F(2) + \dots\dots + F(9)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{12}\left\{\frac{\triangle F(9)+\triangle F(10)}{2} - \frac{\triangle F(-1)+\triangle F(0)}{2}\right\}\right.$$

$$+\frac{11}{720}\left\{\frac{\Delta^3F(8)+\Delta^3F(9)}{2}-\frac{\Delta^3F(-2)+\Delta^3F(-1)}{2}\right\}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]$$

$$=0{\cdot}1\Big[\frac{1{\cdot}00000+0{\cdot}50000}{2}+0{\cdot}99010$$

$$0{\cdot}96154$$
$$0{\cdot}91743$$
$$0{\cdot}86207$$
$$0{\cdot}80000$$
$$0{\cdot}73529$$
$$0{\cdot}67114$$
$$0{\cdot}60976$$
$$0{\cdot}55249$$

$$-\frac{1}{12}\left\{\frac{-0{\cdot}05249-0{\cdot}04751}{2}-\frac{0{\cdot}00990-0{\cdot}00990}{2}\right\}$$

$$+\frac{11}{720}\left\{\frac{0{\cdot}00020-0{\cdot}00012}{2}-\frac{-0{\cdot}00114+0{\cdot}00114}{2}\right\}\Big]$$

$$=0{\cdot}1\,[0{\cdot}75000+7{\cdot}09982+0{\cdot}00416+0{\cdot}00000]$$
$$=0{\cdot}1\,[7{\cdot}85398]$$
$$=0{\cdot}785398$$

ஆனால், $\frac{\pi}{4}=\int^{1}\frac{dx}{1+x^2}$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore\quad \frac{\pi}{4}=0{\cdot}785398$$

$$\because\quad \pi=4\times0{\cdot}785398$$
$$=3{\cdot}141592$$

11·13 பரப்புகாண் வாய்பாட்டில் அலகை மாற்றுதல் (Change of Unit in a quadrature formula)

ஒரு அலகு இடைவெளியுடன் கூடிய ஒரு பரப்புகாண் வாய்பாட்டை h அலகு இடைவெளியுடன் கூடிய பரப்புகாண் வாய்பாடாகவும், h அலகு இடைவெளியுடன் கூடிய பரப்புகாண் வாய்பாட்டை 1 அலகு இடைவெளியுடன் கூடிய பரப்புகாண் வாய்பாடாகவும் மாற்றமுடியும். இவ்வாறு மாற்றமுடிவதால் பல

தொகைச் சார்புகளை எளிதில் தொகைப்படுத்த முடிகிறது. எடுத்துக் காட்டாக, சிம்சனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதியைக் கருதுக.

$$\int_{a}^{a+2h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\,(y_0+4y_1+y_2)$$

$$= \frac{h}{3}\,[f(a)+4\,f(a+h)+f(a+2h)]$$

$a=0$ எனக் கொண்டால்,

$$\int_{0}^{2h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\,[f(0)+4\,f(h)+f(2h)]$$

இது h இடைவெளிக்குரிய வாய்பாடு. இதில் $h=1$ என்று பிரதியிட ஒரு அலகு இடைவெளிக்குரிய வாய்பாடு கிடைக்கும். அதாவது,

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\,[f(0)+4\,f(1)+f(2)]$$

இதுபோல், அரை அலகு இடைவெளிக்குரிய வாய்பாட்டைக்காண $h=1/2$ எனப் பிரதியிடவும். ஆகவே,

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{6}\,[f(0)+4\,f(\tfrac{1}{2})+f(1)]$$

இவ்வாறு எத்தனை அலகு இடைவெளிக்குரிய வாய்பாட்டையும் பெறலாம்.

11·14 பரப்புகாண் வாய்பாட்டில் ஆதியை மாற்றுதல் (Change of origin in a quadrature formula)

ஒரு சார்பின் தொகை காணும்போது ஆதியை மாற்றினுல், தொகையீட்டு இடைவெளியின் எல்லைகளும் மாறும். பொதுவாக தொகைச்சார்பு ஒரு குறிப்பிட்ட படியுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவை யாகவே எடுத்துக்கொள்ளப் படுகிறது. இத்தகைய சார்புகளைத் தொகைப்படுத்தும் போது ஆதியை மாற்றுவதால் எளிதாகத் தொகை காணமுடியும். எடுத்துக்காட்டாக, $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$ இன்

தொகையீட்டைக் காண்பதைவிட $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ இன் தொகையீட்டைக் காண்பது எளிதாகயிருக்கும். ஏனெனில், இரண்டாவது தொகையீட்டில் தொகையெல்லை மதிப்புக்களைப் பிரதியிடும்போது சில உறுப்புக்கள் மறைந்து விடுகின்றன. உதாரணமாக, சிம்சனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதியைக் கருதுக.

$$\int_{a}^{a+2h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)\right]$$

இப்பொழுது $a=-1$ஐ ஆதியாகவும், $h=1$ஐ இடைவெளியாகவும் கொண்டால்,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\left[f(-1)+4(0)+f(1)\right]$$

என்று கிடைக்கிறது. அடைப்புக்குள்ளிருக்கும் உறுப்புக்களைச் சுருக்கிக் கூட்டுத் தொகை காண்பது மிக எளிது.

மாதிரி 140

$$\int_{1}^{3} u_x\,dx = \frac{1}{12}\left(u_0+22u_2+u_4\right) = 2u_2+\frac{1}{12}\left(u_0-2u_2+u_4\right)$$

என்று நிரூபிக்கவும்.

u_x இன் மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் யாவும் மாறிலியென்று கொண்டு $u_x = a+bx+cx^2+dx^3$ என்று கொள்க.

இப்போது $\int_{-1}^{1} u_x\,dx = \int_{-1}^{1} (a+bx+cx^2+dx^3)\,dx$ ஐக் கருதுக.

$$= \left(ax+\frac{bx^2}{2}+\frac{cx^3}{3}+\frac{dx^4}{4}\right)_{-1}^{1}$$

$$= 2a+\frac{2}{3}c$$

மேலும், $u_{-2}+22u_0+u_2 = (a-2b+4c-8d)+22a+(a+2b+4c+8d)$

$$= 24a+8c$$

$$\therefore \frac{1}{12}\left(u_{-2}+22u_0+u_2 \right) \doteq \frac{1}{12}\left(24a+8c\right)=2a+\frac{2c}{3}=\int_{-1}^{1} u_x\, dx$$

இப்பொழுது ஆதியை -1இலிருந்து 1க்கு மாற்றவும்.

$$\therefore \int_1^3 u_x\, dx=\tfrac{1}{12}\,(u_0+22u_2+u_4)$$

மேலும், $2u_0+\frac{1}{12}\,(u_{-2}-2u_0+u_2)$

$$=2a+\tfrac{1}{12}\,(a-2b+4c-8d-2a+a+2b+4c+8d)$$
$$=2a+\tfrac{2}{3}c$$
$$=\int_{-1}^{1} u_x\, dx$$

ஆதியை -1இலிருந்து 1க்கு மாற்றினுல்,

$$\int_1^3 u_x\, dx=2u_2+\tfrac{1}{12}\,(u_0-2u_2+u_2)$$

பயிற்சி 25

1. கோடகம் சார்ந்த விதியைப் பயன்படுத்தி $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ இன் மதிப்பை ஏழு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

2. கோடகம் சார்ந்த விதியைப் பயன் படுத்தி, தொகையீட்டு இடைவெளியை 12 சமபாகங்களாகப் பிரித்து $\int_4^{5\cdot 2} \log x\, dx$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

3. u_x இன் கீழ்க்கண்ட மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

x :	0	1	2	3	4.	5	6
u_x :	0·146	0·161	0·176	0·190	0·204	0·217	0·230

சிம்சனின் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $\int_0^6 u_x\, dx$ இன் மதிப்பைக் காண்க.
(சென்னை '65 ஏப்., செப்.)

4. கீழ்க்காணும் மதிப்புக்களிலிருந்து $\int_0^8 f(x)\, dx$ ஐக் காண சிம்சனின் விதியைப் பயன் படுத்துக.

x:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x):	395	407	418	430	442	454	467	480	492

(சென்னை '61 செப்.)

5. f (x) என்பது கீழ்க்காணும் பட்டியலால் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் $\int_{1.1}^{1.9} f(x)\,dx$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

x	f(x)
1·1	3·95254
1·2	4·06587
1·3	4·18162
1·4	4·29982
1·5	4·42051
1·6	4·54372
1·7	4·66949
1·8	4·80139
1·9	5·02365

(சென்னை '63 ஏப்.)

6. எண்சார் தொகை காண ஒரு வாய்பாட்டை நிறுவுக. கீழே பட்டியல் படுத்தப் பட்டுள்ள y இலிருந்து $\int_{0.6}^{2.0} y\,dx$ ஐக் காண்க.

x:	0·6	0·8	1·0	1·2	1·4	1·6	1·8	2·0
y:	1·23	1·58	2·03	4·32	6·25	8·36	10·23	12·45

(சென்னை '63 செப்.)

7. ஒரு வரையறுத்த தொகையின் மதிப்பைத் தோராயமாகக் காணப் பயன்படும் சிம்சனின் விதியைக் கூறி நிரூபிக்க. கீழே பட்டியல் படுத்தப்பட்ட f (x)க்கு $\int_{1}^{11} f(x)\,dx$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

x:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f(x):	543	512	501	489	453	400	352	310	250	172	95

(சென்னை '67 ஏப்.)

8. சிம்சனின் விதியைப் பயன் படுத்தி இடைவெளியை 8 சமபாகங்களாகப் பிரித்து $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ இன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டு அதன் மூலம் $\log_e 2$ இன் மதிப்பைத் தோராயமாகப் பெறுக. (சென்னை பி.எஸ்ஸி. '64 செப்., பி.இ. 67 செப்.)

9. தொகையீட்டு இடைவெளியை நான்கு சமபாகங்களாகப் பிரித்து $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ இன் மதிப்பை (i) சிம்சனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதியைப் பயன்படுத்தி, (ii) $\frac{3}{8}$ ஆவது விதியைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடுக. (பம்பாய் பி.எஸ்ஸி. '64)

10. இடைவெளியை 8 சமபாகங்களாகப் பிரித்து $\int_2^{10} \frac{dx}{1+x}$ இன் மதிப்பை 3 தசம இடங்களுக்குக் கணக்கிடுக. (டெல்லி பி.எஸ்ஸி. '66)

11. எட்டு சிறு சம இடைவெளிகளைக் கொண்டு சிம்சனின் விதியைப் பயன் படுத்தி $I = \int_{200}^{1000} \frac{dx}{\log_{10} x}$ ஐக் கணக்கிடுக.
(சென்னை '69 செப்.)

12. தோராயத் தொகு முறைப்படி $\int_0^{3/4} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ இன் மதிப்பை ஐந்து தசம இடங்களுக்குக் காண்க. (சென்னை எம்.எஸ்ஸி. '61)

13. சிம்சனின் விதியைப் பயன் படுத்தி $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ இன் மதிப்பை இடைவெளி வீச்சை 10 சமபாகங்களாகப் பிரித்துக் கணக்கிட்டு அதிலிருந்து π இன் தோராய மதிப்பைப் பெறுக. (சென்னை பி.இ. மார்ச் '66)

14. சிம்சனின் விதியை மும்முறைப் பயன்படுத்தி $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ இன் மதிப்பைத் தோராயமாகப் பெறுக. (சென்னை '68 ஏப்., '69 செப்.)

15. $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - 0{\cdot}162 \sin^2\theta}\, d\theta$ இன் மதிப்பை சிம்சனின் விதிப்படி இடைவெளியை $\theta = 0^0, 15^0, 30^0, 45^0, 60^0, 75^0, 90^0$ என்று பிரித்துக் கணக்கிடுக.
(சென்னை '69 ஏப்.)

16. 10 நிலைத் தூரங்களைக்கொண்டு சிம்சனின் விதியைப் பயன் படுத்தி $x=1$, $x=2$ ஆகியவற்றிற்கிடையே $xy=1$ என்ற வளைவின் பரப்பைக் காண்க.

17. வெடில்-இன் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ இன் மதிப்பைக் காண்க. (சென்னை '66 செப்.)

18. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ இன் மதிப்பை ஏழு நிலைத் தூரங்களைக்கொண்டு வெடில்-இன் விதியால் கணக்கிடுக. (சென்னை '60 செப்.)

19. $\int_0^6 \sqrt{x(1-x)}\, dx$ இன் மதிப்பைக் காண வெடில்-இன் விதியைப் பயன் படுத்துக. (சென்னை '67 ஏப்.)

20. எண்சார் தொகை காண வெடில்-இன் விதியை நிறுவுக. அதன் மூலம் $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ஐ 7 தசம இடங்களுக்குக் காண்க. (சென்னை '65 ஏப்.)

21. $y = x\sqrt{x+1}$ என்ற வளைவுக்கும் x-அச்சு, $x=2$ ஆகியவற்றிற்குமிடைப் பட்ட பரப்பளவைக் காண்க. (சென்னை '63 செப்.)

22. கிரிகோரியின் வாய்பாட்டின்மூலம் $\int_{100}^{105} \frac{dx}{x}$ இன் மதிப்பை ஏழு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

23. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலிலிருந்து $\int_1^7 f(x)\,dx$ இன் மதிப் பைக் கிரிகோரியின் வாய்பாட்டின் மூலம் காண்க.

x	f(x)
1	287626699801
2	287757439208
3	287888218227
4	288019036864
5	288149895125
6	288280793016
7	288411730543

24. கீழ்க்காணும் f(x)இன் மதிப்புக்களிலிருந்து கிரிகோரியின் வாய்பாட்டின் மூலம் $\int_{41}^{47} f(x)\,dx$ ஐக் காண்க.

x	f(x)
41	395254161
42	406586896
43	418161601
44	429981696
45	442050625
46	454371856
47	466948881

25. யூலர்-மக்லாரின் வாய்பாட்டை நிறுவுக. அதைப் பயன்படுத்தி கீழே பட்டியல் படுத்தப்பட்டுள்ள சார்பு f(x) க்கு $\int_0^1 f(x)\,dx$ ஐக் காண்க.

x	f(x)
0	1·0000000
1/6	0·9729729
1/3	0·9000000
1/2	0·8000000
2/3	0·6923077
5/6	0·5901639
1	0·5000000

26. நியூட்டன்-கோட்ஸ் தோராயத் தொகுமுறை வாய்பாட்டை நிரூபிக்கவும். இம்முறையைப் பயன்படுத்தி இடைவெளியை எட்டு சமபாகங்களாகப் பிரித்து $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x}$ இன் மதிப்பை நான்கு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

(சென்னை '68 செப்.)

27. $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ என்ற சூத்திரத்திலிருந்து ஒரு மைய வேறுபாட்டுப் பரப்புகாண் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி π இன் மதிப்பைக் காண்க.

28. ஸ்டெர்லிங்-இன் தொகை வாய்பாட்டைக் கொண்டு $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x^2}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

29. பெஸ்ஸல்-இன் தொகை வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ இன் மதிப்பைத் தோராயமாகப் பெறுக.

30. $\int_0^1 u_x\, dx = \frac{1}{12}\,[5u_1 + 8u_0 - u_{-1}]$ என்று காட்டுக.

(ஆக்ரா '62)

31. மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் மாறிலி யென்றால்

$$\int_0^2 u_x\, dx = \frac{1}{24}\,[u_{-1/2} + 23u_{1/2} + 23u_{3/2} + u_{5/2}]$$

என்று நிரூபிக்கவும். (டெல்லி எம்.ஏ. '51, சென்னை '38 ஏப்.)

32. f(x) இன் நான்காம் நிலை வேறுபாடுகள் யாவும் பூச்சியமென்றால்

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx = \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2})$$

என்று காட்டுக. (சென்னை '68 ஏப்.)

12. தொடர்களின் கூட்டல்

(Summation of Series)

12.1 தொடர்களும் அவைகளின் கூட்டல்களும்

$f(x)$ என்ற சார்பினைக் கருதுக. $a, a+h, a+2h, \ldots\ldots\ldots\ldots a+(n-1)h$ என்ற சம இடை வெளிகளிலுள்ள x இன் n மதிப்புக் களுக்குரிய சார்பலன்கள் $f(a), f(a+h), f(a+2h), \ldots\ldots f(a+\overline{n-1}h)$ ஆகும். இந்த n சார்பலன்களும் ஒரு தொடராக (Series) அமை கின்றன. n ஒரு முடிவுள்ள எண்ணுனல் இத் தொடர் ஒரு முடிவுள்ள தொடர் (finite series) எனப்படும். n இன் எல்லே முடிவிலி (infinity) என்ருல் இத் தொடர் ஒரு முடிவிலாத் தொடர் அல்லது கந்தழித் தொடர் (infinite series) எனப்படும். n உறுப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு முடிவுள்ள தொடரின் கூட்டுத் தொகை S_n என்று குறிக்கப் படுகிறது. அதாவது,

$$S_n = f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots\ldots + f(a+\overline{n-1}\,h)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} f[a+(r-1)h]$$

ஒரு முடிவுள்ள தொடரின் கூட்டுத் தொகையாகிய S_n ஒரு குறிப் பிட்ட மதிப்பைப் பெறுவதால் அது $f(x)$ இன் வரையறுத்த தொகை யென்றும் வழங்கப்படுகிறது. n இன் மதிப்பு முடிவிலியை (∞) நெருங்கும் போது (அதாவது $n \to \infty$) அந்த முடிவுள்ள தொடர் முடிவிலாத் தொடராக மாறுகிறது. ஆகவே, ஒரு முடிவிலாத் தொடரின் கூட்டுத் தொகை S_∞ என்று குறிக்கப்படுகிறது. அதாவது,

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லே}}\ S_n = S_\infty$$

n இன் மதிப்பு வரையறுக்கப் படாமலிருந்தால், அத் தொடரின் கூட்டுத் தொகை S என்றே குறிக்கப்படுவது முண்டு. அதாவது,

$$S = \Sigma\, f[a+(r-1)h]$$

12.2 கூட்டல் முறைகள் (Methods of Summation)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் உறுப்புக்கள் எந்த இடைவெளியிலிருந்தாலும் பொருத்தமானபடி ஆதியையும், இடைவெளியின் அலகையும் மாற்றுவதன் மூலம் நமக்கு வசதியான தொடராக மாற்ற முடியும். ஆகவே 1ஐ ஆதியாகவும் 1 அலகு சம இடைவெளியுடையனவுமாகிய தொடர்களைக் கூட்டும் முறைகள் சிலவற்றை இங்கு ஆராய்வோம்.

12.3 முன்வேக வேறுபாட்டுச் செயலி($\triangle$)யைப் பயன்படுத்தும் முறை.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு f(x) மற்றொரு சார்பு F(x)-இன் முதல் நிலை வேறுபாடு எனக் கொள்க. அதாவது,

$$\triangle F(x) = f(x)$$

இப்பொழுது,
$$S_n = \sum_{x=1}^{n} f(x)$$
$$= f(1)+f(2)+f(3)+\ldots\ldots+f(n)$$
$$= f(1)+E f(1)+E^2 f(1)+\ldots\ldots+E^{n-1} f(1)$$
$$= (1+E+E^2+\ldots\ldots+E^{n-1}) f(1)$$
$$= \frac{E^n-1}{E-1} f(1)$$
$$= \frac{E^n-1}{E-1} \triangle F(1) \quad (\text{ஏனெனில், } \triangle F(x) = f(x))$$
$$= \frac{E^n-1}{E-1} (E-1) F(1)$$
$$= (E^n-1) F(1)$$
$$= E^n F(1) - F(1)$$
$$= F(n+1) - F(1)$$

அதாவது,
$$S_n = \sum_{x=1}^{n} f(x) = F(n+1) - F(1) = [F(x)]_1^{n+1}$$

குறிப்பு 1. $\triangle F(x) = f(x)$

$$\therefore F(x) = \triangle^{-1} f(x)$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n} f(x) = [\triangle^{-1} f(x)]_1^{n+1}$$

கூட்டல் எல்லைகள் வரையறுக்கப்படாமலிருந்தால்

$$\Sigma f(x) = \triangle^{-1} f(x)$$

என்று எழுதலாம்.

ஆகவே, $\Sigma = \triangle^{-1}$

என்று கிடைக்கிறது. ஆனால் $\triangle^{-1}$ என்பது தொகையீட்டுச் செயலி (integration operator) ஆகும். ஆகவே, கூட்டுத் தொகைச் செயலியாகிய Σ என்பது தொகையீட்டுச் செயலியாகிய $\triangle^{-1}$க்குச் சமம் என்று காண்கிறோம்.

குறிப்பு 2. k என்பது ஒரு மாறிலியானால்,

$$\triangle [F(x)+k] = \triangle F(x) = f(x)$$

ஆகவே, $\Sigma f(x) = \triangle^{-1} f(x) = F(x)+k$ என்று எழுதலாம்.

12.4 கூட்டல் வாய்பாடுகள் (Formulae for summation)

(i) $f(x) = k\,a^x$ எனக் கொள்க. (k ஒரு மாறிலி)

இப்பொழுது $F(x) = \frac{ka^x}{a-1} + c$, (c ஒரு மாறிலி) எனக் கொண்டால்,

$$\begin{aligned}\triangle F(x) &= F(x+1) - F(x)\\ &= \left[\frac{ka^{x+1}}{a-1} + c\right] - \left[\frac{ka^x}{a-1} + c\right]\\ &= \frac{ka^x(a-1)}{a-1}\\ &= ka^x = f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{x=1}^{n} f(x) = \sum_{x=1}^{n} ka^x &= [F(x)]_1^{n+1}\\ &= F(n+1) - F(1)\\ &= \left[\frac{ka^{n+1}}{a-1} + c\right] - \left[\frac{ka^1}{a-1} + c\right]\\ &= \frac{ka^{n+1} - ka}{a-1}\\ &= \frac{k}{a-1}\left[a^{n+1} - a\right]\end{aligned}$$

வேறுபாட்டு இடைவெளி h என்றால் $\sum_{x=1}^{n} f(x) = \left[\frac{ka^x}{a^h - 1}\right]_1^{n+1}$ ஆகும்.

(ii) $f(x)=x(x-1)(x-2)\dots(x-p+1)=[x]^p$ எனக் கொள்க.

$F(x)=\frac{[x]^{p+1}}{p+1}+c$ என்ற சார்பைக் கருதுக.

$$\begin{aligned}\Delta F(x)&=F(x+1)-F(x)\\&=\left[\frac{[x+1]^{p+1}}{p+1}+c\right]-\left[\frac{[x]^{p+1}}{p+1}+c\right]\\&=\frac{[x+1]^{p+1}-[x]^{p+1}}{p+1}\end{aligned}$$

$$=\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)\dots(x-p+1)-x(x-1)(x-2)\dots(x-p)}{p+1}$$

$$=\frac{x(x-1)(x-2)\dots\dots(x-p+1)}{p+1}[x+1-x+p]$$

$$=\frac{x(x-1)(x-2)\dots\dots(x-p+1)}{p+1}[p+1]$$

$$=x(x-1)(x-2)\dots\dots(x-p+1)$$

$$=[x]^p=f(x)$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n}[x]^p=[F(x)]_1^{n+1}$$

$$=\left[\frac{[x]^{p+1}}{p+1}+c\right]_1^{n+1}$$

$$=\left[\frac{[x]^{p+1}}{p+1}\right]_1^{n+1}$$

பொதுவாக, $\sum_{x=1}^{n}[ax+b]^p=\left\{\frac{[ax+b]^{p+1}}{ah(p+1)}\right\}_1^{n+1}$

(iii) $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)\dots.(x+p)}=[x]^{-p}$ எனக் கொள்க.

$F(x)=\frac{[x]^{-p+1}}{-p+1}+c$ என்ற சார்பினைக் கருதுக.

$\Delta F(x)=f(x)$ என்று எளிதில் காணலாம்.

$$\therefore \sum_{x=1}^{n}[x]^{-p}=[F(x)]_1^{n+1}$$

$$=\left\{\frac{[x]^{-p+1}}{-p+1}+c\right\}_1^{n+1}$$

$$=\left\{\frac{[x]^{-p+1}}{-p+1}\right\}_1^{n+1}$$

(iv) $f(x)=(x)_r=\dfrac{x(x-1)(x-2)......(x-r+1)}{r!}$ எனக் கொள்க.

$F(x)=(x)_{r+1}$ என்ற சார்பினைக் கருதுக.

$$\because \triangle F(x)=F(x+1)-F(x)$$
$$=(x+1)_{r+1}-(x)_r$$
$$=\frac{(x+1)x(x-1)......(x-r+1)}{(r+1)!}-\frac{x(x-1)......(x-r+1)(x-r)}{(r+1)!}$$
$$=\frac{x(x-1)......(x-r+1)}{(r+1)!}(x+1-x+r)$$
$$=\frac{x(x-1)......(x-r+1)}{(r+1)!}(r+1)$$
$$=\frac{x(x-1)......(x-r+1)}{r!}$$
$$=(x)_r=f(x)$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n}(x)_r=\left[F(x)\right]_1^{n+1}=\left[(x)_{r+1}\right]_1^{n+1}$$

12.4.1. மேற்கண்ட கூட்டல் வாய்பாடுகளை மாற்று முறையில் வருவித்தல்.

(i) $f(x)=k\,a^x$ என்ற சார்பினைக் கருதுக.

$$\triangle f(x)=f(x+1)-f(x)$$
$$=k\,a^{x+1}-k\,a^x$$
$$=k\,a^x(a-1)$$

$\therefore f(x)=\triangle^{-1}k(a-1)a^x.$ ஆனல் $\triangle^{-1}=\Sigma$

$$\therefore \quad k\,a^x=\Sigma\, k(a-1)a^x$$

அதாவது, $\Sigma\, k\,a^x=\dfrac{k\,a^x}{a-1}$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n}k\,a^x=\left[\frac{k\,a^x}{a-1}\right]_1^{n+1}$$

வேறுபாட்டு இடைவெளி h ஆனல், $\sum\limits_{x=1}^{n}k\,a^x=\left[\dfrac{k\,a^x}{a^h-1}\right]_1^{+1}$

(ii) $f(x)=x(x-1)(x-2)\ldots\ldots\ldots(x-p+1)=[x]^p$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\ \triangle f(x)=f(x+1)-f(x)$$

அதாவது $\triangle[x]^p=[x+1]^p-[x]^p$

$$=(x+1)\,x\,(x-1)\ldots.(x-p+2)$$
$$-x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-p+1)$$
$$=x(x-1)\ldots.(x-p+1)\,[x+1-x+p-1]$$
$$=x(x-1)\ldots.(x-p+2)\,p.$$
$$=[x]^{p-1}\cdot p\cdot$$
$$\therefore\ [x]^p=\triangle^{-1}\ [x]^{p-1}\cdot p\cdot$$

அதாவது, $\dfrac{[x]^p}{p}=\triangle^{-1}[x]^{p-1}=\Sigma[x]^{p-1}$

ஆகவே, $\Sigma[x]^p=\dfrac{[x]^{p+1}}{p+1}$

$$\therefore\ \sum_{x=1}^{n}[x]^p=\left\{\frac{[x]^{p+1}}{p+1}\right\}_1^{n+1}$$

பொதுவாக, $\displaystyle\sum_{x=1}^{n}[ax+b]^p=\left\{\frac{[ax+b]^{p+1}}{ah\,(p+1)}\right\}_1^{n+1}$

(iii) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)\ldots.(x+p)}=[x]^{-p}$ எனக் கொள்க.

$$\triangle f(x)=[x+1]^{-p}-[x]^{-p}$$

அதாவது, $\triangle[x]^{-p}=\dfrac{1}{(x+2)\,(x+3)\ldots(x+p)\,(x+p+1)}$

$$-\frac{1}{(x+1)\,(x+2)\ldots(x+p)}$$
$$=\frac{1}{(x+2)(x+3)\,(x+p)}\left[\frac{1}{x+p+1}-\frac{1}{x+1}\right]$$
$$=\frac{1}{(x+2)\,(x+3)\ldots\ldots(x+p)}\left[\frac{x+1-x-p-1}{(x+1)\,(x+p+1)}\right]$$
$$=\frac{-p}{(x+1)\,(x+2)\ldots\ldots(x+p)\,(x+p+1)}$$
$$=-p[x]^{-p-1}$$
$$\therefore\ [x]^{-p}=\triangle^{-1}\left\{-p[x]^{-p-1}\right\}$$
$$=-p\,\Sigma\,[x]^{-p-1}$$

$$\therefore \Sigma[x]^{-p-1} = \frac{[x]^{-p}}{-p}$$

$$\therefore \Sigma[x]^{-p} = \frac{[x]^{-p+1}}{-p+1}$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n} [x]^{-p} = \left\{\frac{[x]^{-p+1}}{-p+1}\right\}_{1}^{n+1}$$

(iv) $f(x) = (x)_r = \frac{x(x-1)(x-2).....(x-r+1)}{r!}$ எனக் கொள்க.

$$\triangle f(x) = \triangle (x)_r = (x+1)_r - (x)_r$$

$$= \frac{(x+1)(x)(x-1)......(x-r+2)}{r!} - \frac{x(x-1)......(x-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{x(x-1)......(x-r+2)}{r!}[x+1-x+r-1]$$

$$= \frac{x(x-1)......(x-r+2)}{r!}[r]$$

$$= \frac{x(x-1)......(x-r+2)}{(r-1)!}$$

$$= (x)_{r-1}$$

$$\therefore f(x) = \triangle^{-1}(x)_{r-1}$$

அதாவது, $(x)_r = \triangle^{-1}(x)_{r-1} = \Sigma (x)_{r-1}$

$$\therefore \Sigma(x)_r = (x)_{r+1}$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n} (x)_r = \Big[(x)_{r+1}\Big]_1^{n+1}$$

(v) $f(x) = \Gamma(x)$ எனக்கொள்க.

$$\triangle f(x) = \triangle \Gamma(x) = \Gamma(x+1) - \Gamma(x)$$

$$= x\,\Gamma(x) - \Gamma(x)$$

$$= (x-1)\,\Gamma(x)$$

$$\therefore \Gamma(x) = f(x) = \triangle^{-1}(x-1)\,\Gamma(x)$$

$$= \Sigma (x-1)\,\Gamma(x)$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n} (x-1)\,\Gamma(x) = [\Gamma(x)]_1^{n+1}$$

$$= \Gamma(n+1) - \Gamma(1)$$

குறிப்பு :

ஒரு தொடரின் x ஆவது உறுப்பை x இல் p படி பெற்ற f(x) என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையெனக் கொண்டால், அவ்வுறுப்பை ஒரு இடைச்செருகல் வாய்பாடாக மாற்றி எழுதி, அத்தொடரின் கூட்டுத் தொகையை மிக எளிதாகக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக, x ஆவது உறுப்பைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுவதாகக் கொள்வோம்.

$$f(x)=f(0)+(x)_1 \triangle f(0)+(x)_2 \triangle^2 f(0)+\dots+(x)_n \triangle^n f(0)$$

$$\therefore \quad \Sigma f(x)=\Sigma f(0)+\Sigma (x)_1 \triangle f(0)+\Sigma (x)_2 \triangle^2 f(0)+\dots\dots + \Sigma (x)_n \triangle^n f(0)$$

$$=(x)_1 f(0)+(x)_2 \triangle f(0)+(x)_3 \triangle^2 f(0)+\dots\dots\dots +(x)_{n+1} \triangle^n f(0)+c.$$

இம்முறையைப் பயன்படுத்தி சில உறுப்புக்கள் மட்டுமே கொடுக்கப் பட்டுள்ள ஒரு தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைப் பெறலாம். எவ்வாறெனில், முதலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள உறுப்புக் களின் வேறுபாட்டுப் பட்டியலை அமைக்கவேண்டும். அப்பட்டிய லில் n-ஆம் நிலை வேறுபாடுகள் மாறிலியென்றால், கொடுக்கப் பட்டுள்ள தொடர் ஒரு n படி பெற்ற பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். எனவே, அப்பல்லுறுப்புக் கோவையை எழுதி மேற்கூறப்பட்டவாறு கூட்டுத்தொகையைப் பெறலாம்.

மாதிரி 141

x (x+1) (x+2) ஐ x-ஆவது உறுப்பாகக் கொண்ட தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$$f(x)=(x+2)\ (x+1)\ x=[x+2]^3$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n} f(x)=\sum_{x=1}^{n} [x+2]^3=\left\{\frac{[x+2]^4}{4}\right\}_1^{n+1}$$

$$=\frac{1}{4}[n+3]^4-\frac{1}{4}[3]^4$$

$$=\frac{1}{4}(n+3)\ (n+2)\ (n+1)^n$$

மாதிரி 142

$\sum_{x=1}^{n}$ (3x−2) (3x+1) (3x+4) ஐக் காண்க,

$$f(x)=(3x+4)\ (3x+1)\ (3x-2)$$
$$=[3x+4]^3$$

இங்கு $h=1$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n} f(x)=\sum_{x=1}^{n}[3x+4]^3=\left\{\frac{[3x+4]^4}{3\times 4}\right\}_1^{n+1}$$
$$=\frac{1}{12}\left\{[3x+4]^4\right\}_1^{n+1}$$
$$=\frac{1}{12}\left\{(3x+4)\ (3x+1)\ (3x-2)\ (3x-5)\right\}_1^{n+1}$$
$$=\frac{1}{12}\{(3n+7)\ (3n+4)\ (3n+1)\ (3n-2)-$$
$$(7)\ (4)\ (1)\ (-2)\}$$
$$=\frac{1}{12}\ [(3n+7)\ (3n+4)\ (3n+1)\ (3n-2)+56].$$

மாதிரி 143

$x\ (x+1)\ \ (x+3)$ ஐ x ஆவது உறுப்பாகக் கொண்ட தொடரின் n உறுப்புக்களைக் கூட்டுக.

$$f(x)=x\ (x+1)\ (x+3)=x^3+4x^2+3x.$$
$$=a\ [x]^3+b\ [x]^2+c\ [x]+d \text{ எனக் கொள்க.}$$

$f(x)$ இன் குணகங்களைப் பிரித்து $x,\ x-1,\ x-2$ ஆல் வகுக்கவும்.

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 4 & 3 & 0 \\
 & & 1 & 5 & \\
\hline
2 & 1 & 5 & 8 & \\
 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & 7 & & \\
\hline
 & 1 & & &
\end{array}$$

$$\therefore\quad f(x)\equiv 1\ [x]^3+7\ [x]^2+8\ [x]$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n} f(x)=\left\{\frac{[x]^4}{4}+7\ \frac{[x]^3}{3}+8\ \frac{[x]^2}{2}\right\}_1^{n+1}$$
$$=\frac{1}{4}[n+1]^4+\frac{7}{3}\ [n+1]^3+4\ [n+1]^2$$

$$= \frac{1}{12}(n+1)\, n\, [3\,(n-1)\,(n-2)+28\,(n-1)+48]$$

$$= \frac{1}{12}(n+1)\, n\, [3n^2+19n+26]$$

$$= \frac{1}{12}\, n\,(n+1)\,(n+2)\,(3n+13)$$

மாதிரி 144

0, 10, 33, 77, 150,......... என்ற தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

முதலில் வேறுபாட்டுப் பட்டியலமைக்கவும்.

x	f (x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	0			
		10		
1	10		13	
		23		8
2	33		21	
		44		8
3	77		29	
		73		
4	150			

மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் மாறிலியாகையால் f (x) ஒரு மூன்றும் படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

$$\therefore\quad f(x) = f(0) + (x)_1\, \Delta f(0) + (x)_2\, \Delta^2 f(0) + (x)_3\, \Delta^3 f(0)$$

$$= 0 + 10\,(x)_1 + 13\,(x)_2 + 8\,(x)_3$$

$$\therefore\quad \sum_{x=1}^{n-1} f(x) = \sum_{x=0}^{n-1} [0 + 10\,(x)_1 + 13\,(x)_2 + 8\,(x)_3]$$

$$= [10\,(x)_2 + 13\,(x)_3 + 8\,(x)_4]_0^n$$

$$= \frac{10\,n\,(n-1)}{2} + \frac{13\,n\,(n-1)\,(n-2)}{6} + \frac{8n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{24}$$

$$= \frac{1}{6} n (n-1) [30+13 (n-2)+2 (n-2) (n-3)]$$

$$= \frac{1}{6} n (n-1) (2n^2+3n+16)$$

மாதிரி 145

ஒரு தொடரின் x ஆவது உறுப்பு $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ ஆனல், அத்தொடரின் n உறுப்புக்களைக் கூட்டுக.

$$f(x) = \frac{1}{(x+\ )(x+2)(x+3)} = [x]^{-3}$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n} f(x) = \left\{ \frac{[x]^{-2}}{-2} \right\}_1^{n+1}$$

$$= \frac{[n+1]^{-2}}{-2} + \frac{[1]^{-2}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right]$$

மாதிரி 146

$\sum_{x=1}^{n} \frac{x+3}{x(x+1)(x+2)}$ ஐ மதிப்பிடுக.

$$f(x) = \frac{x+3}{x(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{(x+1)(x+2)} + 3 \cdot \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

$$= [x]^{-2} + 3 [x-1]^{-3}$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n} f(x) = \left\{ \frac{[x]^{-1}}{-1} + 3 \frac{[x-1]^{-2}}{-2} \right\}_1^{n+1}$$

$$= -\left\{ [x]^{-1} \right\}_1^{n+1} - \frac{3}{2} \left\{ [x-1]^{-2} \right\}_1^{n+1}$$

$$= -\left\{ \frac{1}{x+1} \right\}_1^{n+1} - \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{x(x+1)} \right\}_1^{n+1}$$

$$=-\left\{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\right\}-\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{1\cdot 2}\right\}$$

$$=-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2(n+1)(n+2)}+\frac{3}{4}$$

$$=\frac{5}{4}-\frac{1}{n+2}-\frac{3}{2(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n(5n+11)}{4(n+1)(n+2)}$$

மாதிரி 147

1, 6, 11, 18, 31, 58, 115,......என்ற தொடரின் n உறுப்புக்களைக் கூட்டுக.

வேறுபாட்டுப் பட்டியலமைக்கவும்.

x	f (x)	△ f (x)	△² f (x)	△³ f (x)
0	1			
		5		
1	6		0	
		5		2
2	11		2	
		7		4
3	18		6	
		13		8
4	31		14	
		27		16
5	58		30	
		57		
6	115			

மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் 2 ஐப் பொது விகிதமாகக் (Common ratio) கொண்ட ஒரு பெருக்குத் தொடராக (G. P.) இருக் கின்றன.

ஆகவே, f (x) = ஒரு இரண்டாம் படிக்கோவை + $k2^x$ எனக் கொள்க.

$$=a\,(x)_2+b\,(x)_1+c+k\,2^x$$

$$\therefore \triangle f(x) = a(x)_1 + b + k(2-1)2^x$$

$$= a(x)_1 + b + k\,2^x$$

$$\triangle^2 f(x) = a + k\,2^x$$

$$\triangle^3 f(x) = k\,2^x.$$

$x=0$ என்று பிரதியிட, $c+k = f(0) = 1$

$$b+k = \triangle f(0) = 5$$

$$a+k = \triangle^2 f(0) = 0 \quad \therefore a = -k$$

$$k = \triangle^3 f(0) = 2 \quad \therefore a = -2$$

$$b = 5-k = 3$$

$$c = 1-k = -1$$

$$\therefore f(x) = -2(x)_2 + 3(x)_1 - 1 + 2\cdot 2^x$$

$$\therefore \sum_{x=0}^{n-1} f(x) = \left[-2(x)_3 + 3(x)_2 - 1\,(x)_1 + 2\cdot\frac{2^x}{2-1}\right]_0^n$$

$$= -2\left[\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\right]_0^n + 3\left[\frac{x(x-1)}{2!}\right]_0^n - \left[x\right]_0^n + 2\left[2^x\right]_0^n$$

$$= -\frac{2n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{3n(n-1)}{2} - n + 2^{n+1} - 2$$

$$= 2^{n+1} - 2 - \frac{n}{6}(2n^2 - 15n + 19)$$

மாதிரி 148

$\sum_{1}^{n} \frac{2x+3}{x(x+1)} \cdot 3^{-x}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

$$f(x) = \frac{2x+3}{x(x+1)} \cdot 3^{-x}$$

$$= \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x+1}\right)3^{-x}$$

$$= \frac{3}{x\cdot 3^x} - \frac{1}{(x+1)3^x}$$

$$= \frac{1}{x3^{x-1}} - \frac{1}{(x+1)\,3^{x}}$$

$$= -\triangle\left(\frac{1}{x\,3^{x-1}}\right)$$

$$\therefore\ \Sigma f(x) = -\Sigma\triangle\left(\frac{1}{x\,3^{x-1}}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{x\,3^{x-1}}\right)$$ ஏனெனில் $\Sigma = \triangle^{-1}$

$$\therefore\ \sum_{1}^{n} f(x) = \frac{2x+3}{x(x+1)}\,3^{-x}$$

$$= -\left[\frac{1}{x\,3^{x-1}}\right]_{1}^{n+1}$$

$$= -\left[\frac{1}{(n+1)\,3^{n}} - \frac{1}{1}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)\,3^{n}}$$

மாதிரி 149

$\sum_{x=1}^{n} 4^{x}\left[\frac{x^2}{(x+1)(x+1)}\right]$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

(சென்னை எம்.எஸ்.ஸி '68)

$$f(x) = 4^{x}\,\frac{x^2}{(x+1)(x+2)}$$

$$= 4^{x}\left[1 + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x+2}\right]$$

$$= 4^{x} + \frac{4^{x}}{x+1} - \frac{4^{x+1}}{x+2}$$

$$= 4^{x} - \triangle\left(\frac{4^{x}}{x+1}\right)$$

$$\therefore\ \Sigma f(x) = \Sigma\,4^{x} - \Sigma\triangle\left(\frac{4^{x}}{x+1}\right)$$

$$= \frac{4^{x}}{4-1} - \frac{4^{x}}{x+1}$$

$$= \frac{1}{3}4^{x} - \frac{4^{x}}{x+1}$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n} f(x)=\frac{1}{3}\Big[4^{x}\Big]_{1}^{n+1}-\Big[\frac{4^{x}}{x+1}\Big]_{1}^{n+1}$$

$$=\frac{1}{3}\Big[4^{n+1}-4\Big]-\Big[\frac{4^{n+1}}{n+2}-\frac{4}{2}\Big]$$

$$=\frac{4^{n+1}}{3}-\frac{4}{3}-\frac{4^{n+1}}{n+2}+2$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{4^{n+1}}{3}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)$$

மாதிரி 150

முதல் n இயற்கை எண்களின் முப்படிகளைக் கூட்டுக.

$$S_n=\sum_{x=1}^{n} x^3$$

$$\therefore \quad f(x)=x^3=[x]^3+3\,[x]^2+[x]$$

$$\therefore \quad S_n=\sum_{1}^{n} f(x)=\left\{\frac{[x]^4}{4}+[x]^3+\frac{[x]^2}{2}\right\}_{1}^{n+1}$$

$$=\frac{1}{4}[n+1]^4+[n+1]^3+\frac{1}{2}[n+1]^2$$

$$=\frac{1}{4}\,(n+1)\,n\,[(n-1)(n-2)+4\,(n-1)+2]$$

$$=\frac{1}{4}(n+1)\,n\,[n^2+n]$$

$$=\frac{1}{4}\,n^2\,(n+1)^2.$$

மாதிரி 151

$\triangle\,(x\,!)=x\,(x\,!)$ என்று காட்டுக. அதன் மூலம் $\sum_{1}^{n}(x^2+1)\,x\,!$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\triangle\,(x\,!)=(x+1)\,!-x\,!$$

$$=x\,!\,[x+1-1]$$

$$=x\,!\,[x]$$

$$=x\,(x\,!)$$

$$\therefore \quad x! = \Delta^{-1} x(x!)$$
$$= \Sigma x(x!)$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n} x(x!) = [x!]_1^{n+1}$$

இப்பொழுது, $(x^2+1)x! = [(x+1)^2 - 2x]\,x!$
$$= (x+1)^2 x! - 2x(x!)$$
$$= (x+1)(x+1)! - 2x(x!)$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n} (x^2+1)x! = [(x+1)!]_1^{n+1} - 2[x!]_1^{n+1}$$
$$= (n+2)! - 2! - 2(n+1)! + 2\cdot 1!$$
$$= (n+2)! - 2(n+1)!$$
$$= (n+1)!\,[n+2-2]$$
$$= n(n+1)!$$

12·5 பகுதிப் படுத்திக் கூட்டல் (Summation by Parts)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் x-ஆவது உறுப்பு V_x, W_x ஆகிய இரு சார்புகளின் பெருக்கற் பலன் என்று கொள்க. அதாவது,

$$f(x) = V_x W_x$$

இப்பொழுது $U_x V_x$ என்ற சார்பின் வேறுபாட்டைக் கருதுக.

$$\Delta(U_x V_x) = U_{x+1} V_{x+1} - U_x V_x$$
$$= U_{x+1}(V_{x+1} - V_x) + V_x(U_{x+1} - U_x)$$
$$= U_{x+1}\Delta V_x + V_x \Delta U_x$$

$$\therefore \quad U_x V_x = \Delta^{-1}[U_{x+1}\Delta V_x + V_x \Delta U_x]$$
$$= \Sigma(U_{x+1}\Delta V_x) + \Sigma(V_x \Delta U_x)$$
+ ஒரு மாறிலி.

அதாவது, $\Sigma V_x \Delta U_x = U_x V_x - \Sigma(U_{x+1}\Delta V_x) + k$

இப்பொழுது, $\Delta U_x = W_x$ என்று எழுதுக.

$$\therefore \quad U_x = \Delta^{-1} W_x = \Sigma W_x$$

$$\therefore \quad U_{x+1} = \Sigma W_{x+1}$$

இம்மதிப்புக்களை $\Sigma V_x \Delta U_x$-இன் சமன்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

$$\therefore \quad \Sigma V_x W_x = (\Sigma W_x) V_x - \Sigma[(\Sigma W_{x+1})\Delta V_x] + k$$
$$= V_x \Sigma W_x - \Sigma \Delta V_x (\Sigma W_{x+1}) + k$$

W_x, ΔV_x ஆகியவற்றைத் தனித்தனியே கூட்ட முடிந்தால், $\Sigma V_x W_x$ ஐயும் காணமுடியும். W_x ஐ ΔU_x என்று எழுதினால் கூட்டல்

எல்லைகளைப் பயன்படுத்தி மேற்கண்ட சூத்திரத்தைக் கீழ்க்கண்ட வாறு எழுதலாம்.

$$\sum_{x=1}^{n} V_x \triangle U_x = [U_x V_x]_1^{n+1} - \sum_{x=1}^{n} U_{x+1} \triangle V_x.$$

இவ்வாய்பாடு, பகுதிப்படுத்தித் தொகை காணும் (integration by parts) வாய்பாட்டை ஒத்திருப்பதைப் பார்க்கலாம். ஆகவே, இவ் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி எளிதில் கூட்டுத்தொகைப் பெறலாம்.

12·5·1 பகுதிப்படுத்திக் கூட்டும் வாய்பாட்டைத் திரும்பத் திரும்பப் பயன் படுத்துதல்.

V_x க்குப் பயன்படுத்தப்படும் $\triangle$, E என்ற செயலிகளை முறையே $\triangle_1$, E_1 என்றும் W_x க்குப் பயன்படுத்தப்படும் $\triangle$, E என்ற செயலிகளை முறையே $\triangle_2$, E_2 என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

அப்பொழுது,
$$\begin{aligned} \triangle V_x W_x &= V_{x+1} W_{x+1} - V_x W_x \\ &= E_1 V_x, E_2 W_x - V_x W_x \\ &= (E_1 E_2 - 1) V_x W_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \triangle &= (E_1 E_2 - 1) \\ &= (1 + \triangle_1)(1 + \triangle_2) - 1 \\ &= \triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_1 \triangle_2 \end{aligned}$$

ஆகவே,
$$\begin{aligned} \Sigma V_x W_x &= \triangle^{-1} V_x W_x \\ &= (\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_1 \triangle_2)^{-1} V_x W_x \\ &= [\triangle_2 + \triangle_1 (1 + \triangle_2)]^{-1} V_x W_x \\ &= \triangle_2^{-1} [1 + \triangle_1 \triangle_2^{-1} (1 + \triangle_2)]^{-1} V_x W_x \\ &= \triangle_2^{-1} [1 - \triangle_1 \triangle_2^{-1} (1 + \triangle_2) + \\ &\qquad \triangle_1^2 \triangle_2^{-2} (1 + \triangle_2)^2 \ldots\ldots\ldots] V_x W_x \\ &= [\triangle_2^{-1} - \triangle_1 \triangle_2^{-2} E_2 + \triangle_1^2 \triangle_2^{-3} E_2^2 - \ldots]. \\ &\qquad V_x . W_x \\ &= V_x \Sigma W_x - \triangle_1 V_x \Sigma^2 E_2 W_x \\ &\qquad + \triangle_1^2 V_x \Sigma^3 E_2^2 W_x - \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$\triangle_1 V_x$ ஐ $\triangle V_x$ என்று எழுதி, E_2 ஐச் செயல் படுத்தவும்.

$$\therefore \quad \Sigma V_x W_x = V_x \Sigma W_x - \triangle V_x \Sigma^2 W_{x+1} + \triangle^2 V_x \Sigma^3 W_{x+2}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

இங்கு Σ^2, Σ^3, ...என்பன முறையே இரட்டைக் கூட்ட (double summation), முக்கூட்டல் (triple summation),.........ஆகிய வற்றைக் குறிக்கின்றன.

12.5.2 ஒரு முக்கியமான வாய்பாடு

$$\Sigma V_x W_x = V_x \Sigma W_x - \triangle V_x \Sigma^2 W_{x+1} + \triangle^2 V_x \Sigma^3 W_{x+2} - \ldots\ldots$$

என்ற வாய்பாட்டில், $W_x = a^x$ என்று எடுத்துக் கொள்க.

$$\therefore \quad \Sigma W_x = \Sigma a^x = \frac{a^x}{a-1}$$

$$\Sigma^2 W_{x+1} = \Sigma\ (\Sigma W_{x+1})$$

$$= \Sigma \left(\frac{a^{x+1}}{a-1}\right)$$

$$= \frac{a^{x+1}}{(a-1)^2}$$

இதுபோல், $\Sigma^3 W_{x+2} = \frac{(a^{x+2})}{(a-1)^3}$, ...

$$\therefore \quad \Sigma a^x V_x = V_x \frac{a^x}{a-1} - \triangle V_x \frac{a^{x+1}}{(a-1)^2} + \triangle^2 V_x \frac{a^{x+2}}{(a-1)^3} - \ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{a^x}{a-1}\left[1 - \frac{a\triangle}{a-1} + \frac{a^2\triangle^2}{(a-1)^2} - \ldots\ldots\right] V_x$$

மாதிரி 152

$1{\cdot}3 + 2{\cdot}3^2 + 3{\cdot}3^3 + 4{\cdot}3^4 + \ldots\ldots$என்ற தொடரின் n உறுப்புக்களைக் கூட்டுக.

$$x\text{-ஆவது உறுப்பு} = x\, 3^x.$$

இப்பொழுது, $\Sigma a^x V_x = \frac{a^x}{a-1}\left[1 - \frac{a\triangle V_x}{a-1} + \frac{a^2\triangle^2 V_x}{(a-1)^2} - \ldots\ldots\right]$

என்ற வாய்பாட்டில் $a = 3$, $V_x = x$ என்று எடுத்துக் கொள்க.

$$\therefore \quad \Sigma 3^x x = \frac{3^x}{3-1}\left[1 - \frac{3\triangle_x}{3-1}\right]$$

$$= \frac{3^x}{2}\left[1 - \frac{3}{2}\right]$$

$$\therefore \quad \sum_{1}^{n} x\,3^x = \left[\frac{3^x}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)\right]_1^{n+1}$$

$$= \frac{3^{n+1}}{2}\left(n+1-\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}\left(1-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)\,3^{n+1}-\frac{3^{n+2}}{4}+\frac{3}{4}$$

மாதிரி 153

$1 \cdot 3 + 2 \cdot 9 + 4 \cdot 27 + 9 \cdot 81 + 19 \cdot 243 + 36 \cdot 729 + \ldots\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் n உறுப்புக்களைக் கூட்டுக.

தொடரின் உறுப்புக்களிலுள்ள இரண்டாவது காரணிகளைக் கொண்ட 3, 9, 27, 81,………என்ற தொடரின் x-ஆவது உறுப்பு 3^x ஆகும். முதல் காரணிகளைக் கொண்ட 1, 2, 4, 9, 19, 36,……… என்ற தொடரின் x ஆவது உறுப்பைக் காண முதலில் வேறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைக்கவும்.

x	f (x)	Δf (x)	Δ^2f (x)	Δ^3f (x)
0	1			
		1		
1	2		1	
		2		2
2	4		3	
		5		2
3	9		5	
		10		2
4	19		7	
		17		
5	36			

x ஆவது உறுப்பு f (x) எனக் கொண்டால்,

$$f(x) = f(0) + (x)_1\,\Delta f(0) + (x)_2\,\Delta^2 f(0) + (x)_3\,\Delta^3 f(0)$$

$$= 1 + (x)_1 + (x)_2 + 2(x)_3$$

ஆகவே, நாம் காணவேண்டிய கூட்டுத் தொகை

$$= \sum_{x=0}^{n-1} 3^{x+1}\,[1+(x)_1+(x)_2+2\,(x)_3]$$

$$=3 \sum_{x=0}^{n-1} 3^{x}\,[1+(x)_1+(x)_2+2\,(x)_3]$$

இப்பொழுது, $V_x=1+(x)_1+(x)_2+2(x)_3$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\ \triangle V_x=1+(x)_1+2\,(x)_2$$

$$\triangle^2 V_x=1+2\,(x)_1$$

$$\triangle^3 V_x=2$$

$$\therefore\ 3\sum_{0}^{n-1} 3^x V_x=3\left[\frac{3^x}{3-1}\left\{V_x-\frac{3\triangle V_x}{3-1}+\frac{3^2\triangle^2 V_x}{(3-1)^2}-\frac{3^3\triangle^3 V_x}{(3-1)^3}\right\}\right]_0^n$$

$$=3\left[\frac{3^x}{2}\left\{[1+(x)_1+(x)_2+(x)_3]-\tfrac{3}{2}\,[1+(x)_1+2\,(x)_2]+\tfrac{9}{4}\,[1+2\,(x)_1]-\tfrac{27}{8}\,[2]\right\}\right]_0^n$$

$$=\frac{3}{8}\left[3^x\,\{4+4\,(x)_1+4\,(x)_2+8\,(x)_3-6-6\,(x)_1-12\,(x)_2+18(x)_1-27\}\right]_0^n$$

$$=\frac{3}{8}\left[3^x\,\{8\,(x)_3-8\,(x)_2+16\,(x)_1-29\}\right]_0^n$$

$$=\frac{3}{8}\left[3^n\,\{8\,(n)_3-8\,(n)_2+16\,(n)_1-29\}+29\right]$$

$$=\frac{3}{8}\left[3^n\left\{\frac{8\,n(n-1)\,(n-2)}{6}-\frac{8n\,(n-1)}{2}\right\}+16\,n\right]$$

$$=\frac{3^{n+1}}{6}\left[n\,(n-1)\,(n-2)-3n\,(n-1)+12n\right]$$

$$=\frac{3^n}{2}\,n\,(n^2-6n+17)$$

12.6 யூலர்-மக்லாரின் கூட்டல் வாய்பாடு (Euler-Maclaurin Summation formula)

யூலர்-மக்லாரின் பரப்புகாண் வாய்பாட்டைக் கருதுக.

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}[f(0)+f(n)]+[f(1)+f(2)+\dots+f(n-1)]$$

$$=\frac{h}{12}\Big[f'(n)-f'(0)\Big]+\frac{h^3}{720}\Big[f'''(n)-f'''(0)\Big]$$

$$=\frac{h^5}{30240}\Big[f^{v}(n)-f^{v}(0)\Big]+\dots\dots\dots\dots$$

$$=[f(0)+f(1)+f(2)+\dots\dots+f(n)]-\tfrac{1}{2}[f(n)+f(0)]$$

$$-\frac{h}{12}[f'(n)-f'(0)]+\frac{h^3}{720}[f'''(n)-f'''(0)]-\frac{h^5}{30240}[f^{v}(n)-f^{v}(0)]$$

$$+\dots\dots\dots$$

இப்பொழுது $a+rh=x_r$, $r=0, 1, 2, \dots, n$ என்று எழுதவும்.

$$\therefore \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx=[f(x_0)+f(x_1)+\dots+f(x_n)]-\tfrac{1}{2}[f(x_n)+f(x_0)]$$

$$-\frac{h}{12}[f'(x_n)-f'(x_0)]+\frac{h3}{720}[f'''(x_n)-f'''(x_0)]$$

$$-\frac{h^5}{30240}[f^{v}(x_n)-f^{v}(x_0)]+\dots\dots$$

ஆகவே, $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)=f(x_0)+f(x_1)+\dots\dots+f(x_n)$

$$=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx+\tfrac{1}{2}[f(x_n)+f(x_0)]$$

$$+\frac{h}{12}[f'(x_n)-f'(x_0)]+\frac{h^3}{720}[f'''(x_n)-f'''(x_0)]$$

$$-\frac{h^5}{30240}[f^{v}(x_n)-f^{v}(x_0)]+\dots\dots$$

இது யூலர்-மக்லாரின் கூட்டல் வாய்பாடு என்று வழங்கப் படுகிறது. இவ்வாய்பாடு ஒரு தொடரின் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையை அதற்கு ஒத்த வரையறுத்த தொகையுடன் இணைக் கிறது.

மாதிரி 154

யூலர்-மக்லாரின் கூட்டல் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி முதல் n இயற்கை எண்களின் நான்காம் படிகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

காணவேண்டிய கூட்டுத்தொகை $S_n = 1^4+2^4+3^4+\ldots\ldots+n^4$.

இப்பொழுது $f(x)=x^4$ எனக் கொள்க.

$\therefore f(x_n)=n^4, \quad f(x)=0$

$f'(x)=4x^3 \qquad \therefore f'(x_n)=4n^3, \qquad f'(x_0)=0$

$f'''(x)=24x \qquad \because f'''(x_n)=24n, \qquad f'''(x_0)=0$

$f^{v}(x)=0$

யூலர்-மக்லாரின் வாய்பாட்டில் பிரதியிடவும்; இங்கு $h=1$

$$\sum_{x=0}^{n} x^4 = \int_0^n x^4\,dx + \tfrac{1}{2}[f(x_n)+f(x_0)] + \tfrac{1}{12}[f'(x_n)-f'(x_0)] - \frac{1}{720}[f'''(x)-f'''(x_0)]$$

$$= \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^n + \frac{1}{2}\left[n^4+0\right] + \frac{1}{12}\left[4n^3-0\right] - \frac{1}{720}\left[24\,n-0\right]$$

$$= \frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$

12.6.1 முதல் n இயற்கை எண்களின் படிகளின் கூட்டுத் தொகைகள் (Sums of powers of first n natural numbers)

முதல் n இயற்கை எண்களின் முதல், இரண்டாம், மூன்றாம் படிகளின் கூட்டுத் தொகைகளை நாம் அறிவோம்.

அதாவது, $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2} = \tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{2}n.$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{6}n.$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \tfrac{1}{4}n^4+\tfrac{1}{2}n^3+\tfrac{1}{4}n^2.$$

இப்பொழுது, p என்பது ஒரு நேர் எண்ணானுல்,

$S_n = 1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p$ இன் கூட்டுத் தொகையைக் காணப் பயன்படும் வாய்பாட்டை, யூலர்-மக்லாரின் வாய்பாட்டிலிருந்து வருவிப்போம்.

பொதுவாக, $f(x_r)$ஐ f_r என்று சுருக்கமாக எழுதினுல், யூலர்-மக்லாரின் வாய்பாட்டைக் கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}(f_n+f_0)+(f_1+f_2+\ldots+f_{n-1})$$

$$-\frac{h}{12}(f'_n-f'_0)+\frac{h^3}{720}(f'''_n-f'''_0)-\frac{h^5}{30240}(f^{v}_n-f^{v}_0)+\ldots$$

இவ்வாய்பாட்டில் $a=0$, $h=1$, $f(x)=x^p$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \int_0^n x^p\,dx = \tfrac{1}{2}(n^p+0)+[1^p+2^p+\ldots+(n-1)^p]-\tfrac{1}{12}[p\,n^{p-1}-0]$$

$$+\frac{1}{720}[p(p-1)(p-2)\,n^{p-3}-0]$$

$$-\frac{1}{30240}[p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)n^{p-5}-0]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

அதாவது,

$$\frac{n^{p+1}}{p+1}=\frac{n^p}{2}+[1^p+2^p+\ldots+(n-1)^p]-\frac{p}{12}\,n^{p-1}$$

$$+\frac{p(p-1)(p-2)}{720}\,n^{p-3}-\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{30240}\,n^{p-5}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore\ 1^p+2^p+\ldots+(n-1)^p+n^p=\frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{n^p}{2}+\frac{n^p}{2}+\frac{p}{12}\,n^{p-1}$$

$$-\frac{p(p-1)(p-2)}{720}\,n^{p-3}+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{30240}\,n^{p-5}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

இவ் வாய்பாட்டிலிருந்து pயின் நேரெண் மதிப்புக்களுக்குரிய முதல் n இயற்கையெண்களின் p படிகளின் கூட்டுத் தொகைகளைக் காணலாம். pயின் மதிப்பு ஒற்றை அல்லது இரட்டை யெண்ணுக்குத் தக்கவாறு இவ் வாய்பாட்டிலுள்ள தொடரின் இறுதி உறுப்பு n^2 அல்லது nஐக் கொண்டதாகயிருக்கும்.

மாதிரி 155

முதல் n இயற்கையெண்களின் ஏழாம் படிகளைக் கூட்டுக.

இங்கு $p=7$ (ஒற்றையெண்)

ஆகவே, வாய்பாட்டின் கடைசி உறுப்பு n^2ஐக் கொண்டதாகயிருக்கும்.

$$\therefore S_n = 1^7 + 2^7 + \ldots + n^7 = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7\cdot6\cdot5}{720}\cdot n^4 + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{30240}n^2.$$

$$= \tfrac{1}{8}n^8 + \tfrac{1}{2}n^7 + \tfrac{7}{12}n^6 - \tfrac{7}{24}n^4 + \tfrac{1}{12}n^2.$$

மாதிரி 156

$\frac{1}{400} + \frac{1}{402} + \ldots + \frac{1}{493} + \frac{1}{500}$ இன் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க. (சென்னை '69 ஏப்.)

$f(x) = \frac{1}{x}$ எனக் கொள்க.

$$f(x_0) = \frac{1}{400},\ f(x_n) = \frac{1}{500};\ h = 2.$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\quad \therefore f'(x_0) = -\frac{1}{(400)^2};\ f'(x_n) = -\frac{1}{(500)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}\quad \therefore f'''(x_0) \pm \frac{2}{(400)^3};\ f'''(x_n) = \frac{2}{(500)^3}$$

$$\therefore \sum_{400}^{500} f(x) = \frac{1}{h}\int_{400}^{500} \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}[f(x_n) + f(x_0)]$$

$$+ \frac{h}{12}[f'(x_n) - f'(x_0)] - \frac{h^3}{720}[f'''(x_n) - f'''(x_0)] + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2}[\log x]_{400}^{500} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{500} + \frac{1}{400}\right] + \frac{2}{12}\left[-\frac{1}{500^2} + \frac{1}{400^2}\right] - \frac{8}{720}\left[\frac{2}{500^3} - \frac{2}{400^3}\right] + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2}[\log_e 500 - \log_e 400] + \frac{1}{2}[0\cdot002 + 0\cdot0025]$$

$$+ \frac{1}{6}[-0\cdot000004 + 0\cdot00000625]$$

$$- \frac{1}{90}[0\cdot000000016 - 0\cdot00000003] + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2}\log_e\frac{5}{4} + 0\cdot00225 + 0\cdot000000371 - \ldots\ldots\ldots$$

$$= 0\cdot11157 + 0\cdot00225 + 0\cdot000000371$$

$$= 0\cdot11382$$

மாதிரி 157

$\frac{1}{201^2}+\frac{1}{203^2}+\frac{1}{205^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{299^2}$ இன் கூட்டுத் தொகையை 9 தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

(சென்னை '62 ஏப்., டெல்லி எம்.எஸ்ஸி. '60)

இங்கு $f(x)=\frac{1}{x^2}$; $h=2$

$$f(x_0)=\frac{1}{201^2}=0\cdot0000247518$$

$$f(x_n)=\frac{1}{299^2}=0\cdot0000111855$$

$$f'(x_0)=\frac{-2}{201^3}=-0\cdot0000002463$$

$$f'(x_n)=\frac{-2}{299^3}=-0\cdot0000000748$$

$$\therefore \sum_{201}^{299}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{h}\int_{201}^{299}\frac{1}{x^2}dx+\frac{1}{2}[f(x_n)+f(x_0)]$$

$$+\frac{h}{12}[f'(x_n)-f'(x_0)]-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

இப்பொழுது, $\int_{201}^{299}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{201}^{299}$

$$=\frac{1}{201}-\frac{1}{299}$$

$$=0\cdot0049751244-0\cdot0033444816$$

$$\therefore \sum_{201}^{299}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2}[0\cdot0049751244-0\cdot0033444816]$$

$$+\frac{1}{2}[0\cdot0000111855+0\cdot0000247518]$$

$$+\frac{1}{6}[-0\cdot0000000748+0\cdot0000002463]$$

$$=0\cdot0008153214+$$
$$0\cdot00001796865+$$
$$0\cdot00000002858$$
$$=0\cdot00083331863$$
$$=0\cdot000833319$$ (ஒன்பது தசம இடங்களுக்கு)

மாதிரி 158

$\frac{1}{101^2}+\frac{1}{103^2}+\frac{1}{105^2}+\frac{1}{107^2}+\ldots\ldots\ldots$ என்ற முடிவிலாத் தொடரைக் கூட்டுக.

இங்கு $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $h=2$

$$\therefore \quad S_\infty = \sum_{x=101}^{\infty} f(x)=\frac{1}{h}\int_{101}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx+\frac{1}{2}[f(x_\infty)+f(x_0)]$$

$$+\frac{h}{12}[f'(x_\infty)-f'(x_0)]-\ldots\ldots\ldots$$

இப்பொழுது, $\int_{101}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{101}^{\infty}$

$$=0+\frac{1}{101}$$

$$=0{\cdot}0099009901$$

$$f(x_\infty)=0;\quad f(x_0)=\frac{1}{101^2}=0{\cdot}0000980296$$

$$f'(x)=\frac{-2}{x^3};\ f'(x_\infty)=0;$$

$$f'(x_0)=\frac{-2}{101^3}=-0{\cdot}0000019412$$

$$\therefore \quad S_\infty=\frac{1}{2}(0{\cdot}0099009901)+$$

$$\frac{1}{2}(0{\cdot}0000980296)+$$

$$\frac{1}{6}(0{\cdot}0000019412)$$

$$=0{\cdot}0049504950+$$

$$0{\cdot}0000490148+$$

$$0{\cdot}0000003235$$

$$=0{\cdot}0049998333$$

12·7 வூல்ஹவுஸ் கூட்டல் வாய்பாடு (Woolhouse formula of summation)

யூலர்-மக்லாரின் கூட்டல் வாய்பாட்டைக் கருதுக.

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(x_n)+f(x_0)]$$

$$+\frac{h}{12}[f'(x_n)-f'(x_0)] - \frac{h^3}{720}[f'''(x_n)-f'''(x_0)]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

அதாவது, $f(x_i)=y_i$, $i=0, 1, 2, \ldots\ldots, n$ என்று எழுதினால்,

$$y_0+y_1+y_2+\ldots\ldots+y_n = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_n} y\,dx + \frac{1}{2}[y_n+y_0]$$

$$+\frac{h}{12}[y_n'+y_0'] - \frac{h^3}{720}[y_n'''-y_0'''] + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

இப்பொழுது சம இடைவெளி h ஐ m சமபாகங்களாகப் பிரிக்கவும்.

ஆகவே புதிய சிறு சம இடைவெளி $= \frac{h}{m}$ ஆகும். மேற்கண்ட வாய்பாட்டில் h ஐ $\frac{h}{m}$ ஆக மாற்றி எழுதவும்.

$$(y_0+y_{1/m}+y_{2/m}+\ldots\ldots+y_1)+(y_{1+1/m}+y_{1+2/m}+\ldots\ldots+y_2)$$

$$+\ldots\ldots y_3+\ldots\ldots+y_4+\ldots\ldots+y_n$$

$$=\frac{m}{h}\int_{x_0}^{x_n} y\,dx + \frac{1}{2}(y_n'+y_0') + \frac{m}{12m}(y_n'-y_0')$$

$$-\frac{h^3}{720m^3}(y_n'''-y_0''') + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) ஐ m ஆல் பெருக்கி (2) ஐக் கழிக்கவும்.

$$m(y_0+y_1+\ldots+y_n)-(y_0+y_{1/m}+y_{2/m}+\ldots+y_1+\ldots+y_n)$$

$$=\frac{1}{2}\left(y_n+y_0\right)\left(m-1\right)+\frac{h}{12}\left(y_n'-y_0'\right)\left(m-\frac{1}{m}\right)$$

$$-\frac{h^3}{720}\left(y_n'''-y_0'''\right)\left(m-\frac{1}{m^3}\right)+\ldots\ldots\ldots$$

$$=\frac{m-1}{2}(y_n+y_0)+\frac{(m^2-1)h}{12m}(y_n'-y_0')$$

$$-\frac{(m^4-1)h^3}{720m^3}(y_n'''-y_0''').+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore\ (y_0+y_{1/m}+y_{2/m}+\ldots+y_1+\ldots+y_n)=m(y_0+y_1+\ldots+y_n)$$
$$-\frac{m-1}{2}(y_n+y_0)-\frac{(m^2-1)\,h}{12m}(y_n'-y_0')$$
$$+\frac{(m^4-1)h^3}{720m^3}(y_n'''-y_0''')-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

இது ஹூல்ஹவுஸ் கூட்டல் வாய்பாடு என்று அழைக்கப்படுகிறது. இவ்வாய்பாட்டின் மூலம் x_0 க்கும் x_n க்கும் இடையே h இடைவெளியிலுள்ள x இன் மதிப்புக்களுக்குரிய f (x) இன் மதிப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையை மிக எளிதாகப் பெறலாம். எவ்வாறெனில், x_0 க்கும், x_n க்கும் இடையேயுள்ள mh இடைவெளியிலுள்ள x இன் மதிப்புக்களுக்குரிய f (x) இன் மதிப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்பது எளிது. அக்கூட்டுத் தொகையிலிருந்து இவ்வாய்பாட்டின் மூலம் h இடைவெளியிலுள்ள எல்லா மதிப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைப் பெறலாம்.

மாதிரி 159

$\sum_{n=50}^{100}\frac{1}{n^3}$ இன் மதிப்பை ஏழு தசம இடங்களுக்குப் பெறுக.

(சென்னை '65 ஏப்.)

இங்கு $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

h = 10 எனக் கொள்க.

$\therefore\ x_0=50,\ x_1=60,\ x_2=70,\ \ldots\ldots,\ x_n=x_5=100.$

$$y_0=f(50)=\frac{1}{50^3}=0{\cdot}000008000$$
$$y_1=f(60)=\frac{1}{60^3}=0{\cdot}000004630$$
$$y_2=f(70)=\frac{1}{70^3}=0{\cdot}000002915$$
$$y_3=f(80)=\frac{1}{80^3}=0{\cdot}000001953$$
$$y_4=f(90)=\frac{1}{90^3}=0{\cdot}000001372$$
$$y_5=f(100)=\frac{1}{100^3}=0{\cdot}000001000$$

$$\therefore y_0+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=0{\cdot}0000019870$$

$$f'(x)=-\frac{3}{x^4}$$

$$\therefore y_0'=f'(50)=\frac{-3}{50^4}=-0{\cdot}00000048$$

$$y_5'=f'(100)=\frac{-3}{100^4}=-0{\cdot}00000003$$

$$\therefore y_5'-y_0'=0{\cdot}00000045$$

இப்பொழுது 50, 60, 70, 80, 90, 100 ஆகிய இடைவெளிகள் ஒவ்வொன்றையும் 10 சிறு சம இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கவும். அதாவது, ஹூல்ஹவுஸ் வாய்பாட்டில் m = 10 எனக் கொள்க.

$$\therefore \sum_{x=50}^{100}\frac{1}{x^3}=10(y_0+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)-\frac{10-1}{2}(y_5+y_0)$$

$$-\frac{(10^2-1)\,10}{120}(y_5'-y_0')+\ldots\ldots$$

$$=10\,(0{\cdot}000019869)-\frac{9}{2}(0{\cdot}000009000)$$

$$-\frac{99}{12}(0{\cdot}00000045)$$

$$=0{\cdot}00019869-0{\cdot}00004050-0{\cdot}00000371$$

$$=0{\cdot}00015448$$

$$=0{\cdot}0001545 \text{ (ஏழு தசம இடங்களுக்கு)}$$

12·8. இலபக்-இன் கூட்டல் வாய்பாடு (Lubbock's formula of summation)

$$D=\frac{1}{h}\log_e(1+\triangle)$$

$$=\frac{1}{h}\left(\triangle-\frac{\triangle^2}{2}+\frac{\triangle^3}{3}-\frac{\triangle^4}{4}+\ldots\ldots\right) \text{ என்று நாமறிவோம்.}$$

$$\therefore D^n y_x=\frac{1}{h^n}\left(\triangle-\frac{\triangle^2}{2}+\frac{\triangle^3}{3}-\frac{\triangle^4}{4}+\ldots\ldots\right.$$

$$=\frac{\triangle^n}{h^n}\left(1-\frac{\triangle}{2}+\frac{\triangle^2}{3}-\frac{\triangle^3}{4}+\ldots\ldots\ldots\right)^n_{y_x}.$$

இப்பொழுது n = 1, 3, 5,...... என்று பிரதியிடுக.

$$\therefore Dy_x = \frac{\Delta}{h}\left(1-\frac{\Delta}{2}+\frac{\Delta^2}{2}-\frac{\Delta^3}{4}+\dots\dots\dots\right)y_x$$

அதாவது, $h\,y_x' = \left(\Delta-\frac{\Delta^2}{2}+\frac{\Delta^3}{3}-\frac{\Delta^4}{4}+\dots\dots\right)y_x.$

இதுபோல், $h^3\,y_x''' = \Delta^3\left(1-\frac{\Delta}{2}+\frac{\Delta^2}{3}-\frac{\Delta^3}{4}+\dots\dots\dots\right)^3 y_x$

$$= \Delta^3\left(1-\frac{3}{2}\Delta+\frac{7}{4}\Delta^2-\dots\dots\right)y_x$$

$$= \left(\Delta^3-\frac{3}{2}\Delta^4+\frac{7}{4}\Delta^5\dots\dots\dots\right)y_x$$

....

....

மேலும், $D^n y_n = \frac{1}{h^n}\left(\nabla+\frac{\nabla^2}{2}+\frac{\nabla^3}{3}+\frac{\nabla^4}{4}+\dots\dots\dots\right)y_x$

இதில் $n=1, 3, 5, \dots\dots$ என்று பிரதியிடுக.

$$hy'_x = \left(\nabla+\frac{\nabla^2}{2}+\frac{\nabla^3}{3}+\frac{\nabla^4}{4}+\dots\dots\right)y_x$$

$$h^3 y_x''' = \left(\nabla^3+\frac{3}{2}\nabla^4+\frac{7}{4}\nabla^5+\dots\dots\right)y_x$$

....

....

இம்மதிப்புக்களை ஆல்ஹவுஸ் வாய்பாட்டில் பிரதியிடுக.

இப்பொழுது $h\,(y_n'-y_0') = \left(\nabla y_n+\frac{\nabla^2}{2}y_n+\frac{\nabla^3}{3}y_n+\frac{\nabla^4}{4}y_n+\dots.\right)$

$$-\left(\Delta y_0-\frac{\Delta^2}{2}y_0+\frac{\Delta^3}{3}y_0-\frac{\Delta^4}{4}y_0+\dots\dots\right)$$

$$= \left(\nabla y_n-\Delta y_0\right)+\frac{1}{2}\left(\nabla^2 y_n+\Delta^2 y_0\right)+\frac{1}{3}\left(\nabla^3 y_n-\Delta^3 y_0\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(\nabla^4 y_n+\Delta_4 y_0\right)+\dots\dots$$

$$h^3(y_n''' - y_0''') = \left(\nabla^3 y_n + \frac{3}{2}\nabla^4 y_n + \frac{7}{4}\nabla^5 y_n + \dots\dots\right)$$

$$- \left(\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \frac{7}{4}\Delta^5 y_0 - \dots\dots\right)$$

$$= \left(\nabla^3 y_n - \Delta^3 y_0\right) + \frac{3}{2}\left(\nabla^4 y_n + \Delta^4 y_0\right) + \dots\dots$$

ஆகவே, ஹூல்ஹவுஸ் வாய்பாட்டிலிருந்து,

$$(y_0 + y_{1/m} + y_{2/m} + \dots + y_1 + \dots + y_n) = m(y_0 + y_1 + \dots + y_n)$$

$$- \frac{(m-1)}{2}(y_n + y_0) - \frac{(m^2-1)\,h}{12m}(y_n' - y_0')$$

$$+ \frac{(m^4-1)h^3}{720m^3}(y_n''' - y_0''') - \dots\dots$$

$$= m(y_0 + y_1 + \dots + y_n) - \frac{(m-1)}{2}(y_n + y_0)$$

$$- \frac{(m^2-1)}{12m}\left[(\nabla y_n - \Delta y_0) + \tfrac{1}{2}(\nabla^2 y_n + \Delta^2 y_3) + \tfrac{1}{3}(\nabla^3 y_n - \Delta^3 y_0)\right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{4}(\nabla^4 y_n + \Delta^4 y_0) + \dots\dots\right]$$

$$+ \frac{(m^4-1)}{720m^3}\left[\nabla^3 y_n - \Delta^3 y_0) + \tfrac{3}{2}(\nabla^4 y_n + \Delta^4 y_0) + \dots\dots\right]$$

$$= m(y_0 + y_1 + \dots + y_n) - \frac{(m-1)}{2}(y_n + y_0) - \frac{(m^2-1)}{12m}(\nabla y_n - \Delta y_0)$$

$$- \frac{(m^2-1)}{24m}(\nabla^2 y_n + \Delta^2 y_0) - \frac{(m^2-1)}{720m^3}(\nabla^3 y_n - \Delta^3 y_0)\,[20m^2 - m^2 - 1]$$

$$- \frac{(m^2-1)}{480m^3}(\nabla^4 y_n + \Delta^4 y_0)\cdot[10m^2 - m^2 - 1]\dots\dots$$

$$= m(y_0 + y_1 + \dots + y_n) - \frac{(m-1)}{2}(y_n + y_0) - \frac{(m^2-1)}{12m}(\nabla y_n - \Delta y_0)$$

$$- \frac{(m^2-1)}{24m}(\nabla^2 y_n + \Delta^2 y_0) - \frac{(m^2-1)(19m^2-1)}{720m^3}\nabla^3 y_n - \Delta^3 y_0)$$

$$- \frac{(m^2-1)(9m^2-1)}{480m^3}(\nabla^4 y_n + \Delta^4 y_0)\dots\dots\dots$$

இவ்வாய்பாடு இலபக்—இன் கூட்டல் வாய்பாடு என வழங்கப் படுகிறது.

இதில் $\nabla^m y_k = \Delta^m y_{k-m}$ என்ற சூத்திரத்தின்படி ∇ஐ Δஆக மாற்றி எழுதினுல் வாய்பாடு கீழ்க்கண்ட அமைப்பைப் பெறுகிறது.

$$(y_0+y_{1/m}+y_{2/m}+\cdots+y_1+\cdots+y_m)=m(y_0+y_1+\cdots+y_n)$$
$$-\frac{(m-1)}{2}(y_n+y_0)-\frac{(m^2-1)}{12m}(\Delta y_{n-1}-\Delta y_0)$$
$$-\frac{(m^2-1)}{24m}(\Delta^2 y_{n-2}+\Delta^2 y_0)-\frac{(m^2-1)(19m^2-1)}{720m^3}(\Delta^3 y_{n-3}-\Delta^3 y_0)$$
$$-\frac{(m^2-1)(9m^2-1)}{480m^3}(\Delta^4 y_{n-4}+\Delta^4 y_0)\cdots\cdots\cdots$$

மாதிரி 160

$\frac{1}{100^2}+\frac{1}{101^2}+\frac{1}{102^2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{150^2}$ இன் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க. (சென்னை '61 ஏப்., '66 ஏப்.)

மொத்தம் இருக்கும் 50 இடை வெளிகளையும் 5 இடைவெளிகளாகச் சுருக்குக. அதாவது, இலபக்-இன் வாய்பாட்டில் $h=10$, $m=10$ $\cdot f(x)=\frac{1}{x^2}$ எனக் கொள்க.

$f(0)=\frac{1}{100^2}$ இல் தொடங்கி, $f(1)=\frac{1}{110^2}$, $f(2)=\frac{1}{120^2}$, $f(3)=\frac{1}{130^2}$, $f(4)=\frac{1}{140^2}$, $f(5)=\frac{1}{150^2}$ ஆகியவற்றின் வேறுபாட்டுப் பட்டியலமைக்கவும். வேறுபாடுகளைத் தசமபுள்ளியை நீக்கி எழுதவும்.

x_n	$f(x_n)=f_n$	Δf_n	$\Delta^2 f_n$	$\Delta^3 f_n$	$\Delta^4 f_n$
0	0·00010000				
		—1736			
1	0·00008264		416		
		—1320		—123	
2	0·00006944		293		42
		—1027		—81	
3	0·00005917		212		26
		—815		—55	
4	0·00005102		157		
		—658			
5	0·00004444				

இலபக்-இன் வாய்பாட்டிலிருந்து,

$$\sum_{100}^{150}\left(\frac{1}{n^2}\right)=10\ (f_0+f_1+f_2+f_3+f_4+f_5)$$

$$-\tfrac{9}{2}\ (f_0+f_5)-\tfrac{99}{120}\ (\triangle f_4-\triangle f_0)-\tfrac{99}{240}\ (\triangle^2 f_3+\triangle^2 f_0)$$

$$-\frac{(99)\ (1899)}{720000}\ (\triangle^3 f_2-\triangle^3 f_0)-\frac{(99)\ (899)}{480000}\ (\triangle^4 f_1+\triangle^4 f_0)$$

....

$$=10\ (40671)-\tfrac{9}{2}\ (14444)-\tfrac{99}{120}\ (1078)-\tfrac{99}{240}\ (573)$$

$$-\frac{(99)\ (1899)}{720000}\ (68)-\frac{(99)\ (899)}{480000}\ (68)\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=406710-64998-889{\cdot}35-236{\cdot}36-17{\cdot}76-12{\cdot}61$$

$$=340556$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் கூட்டுத்தொகை $=0{\cdot}00340556$.

12.9 வேலிஸ்–இன் சூத்திரம் (Wallis' formula)

வேலிஸ்-இன் சூத்திரம் பின்வருமாறு :

$$\frac{\pi}{2}=\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{2^{4n}\ (n!)^4}{[(2n)!]^2\ (2n+1)}$$

நிரூபணம் :

$I_n=\int_0^{\pi/2} \text{Sin}^n\ x\ \ dx$ இன் சுருக்க வாய்பாட்டைக் (Reduction formula) கருதுக.

n ஒரு இரட்டையெண்ணுனல் (அதாவது $n=2r$ எனக் கொள்க)

$$I_{2r}=\frac{(2r-1)\ (2r-3)\ldots\ldots 3{\cdot}1}{(2r)\ (2r-2)\ldots\ldots 4{\cdot}2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

n ஒரு ஒற்றை யெண்ணுனல் (அதாவது $n=2r+1$ எனக்கொள்க)

$$I_{2r+1}=\frac{(2r)\ (2r-2)\ldots\ldots 4{\cdot}2}{(2r+1)(2r-1)\ldots 5{\cdot}3}$$

ஆனல் $x=\leq\frac{\pi}{2}$ என்றல் $\text{Sin}\ x\ \leq\ 1$ ஆகயிருக்கும். ஆகவே, $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ ஆனல் $\text{Sin}^{2r-1}x\ \geq\ \text{Sin}^{2r}x\ \geq\ \text{Sin}^{2r+1}x$ ஆகும்.

அதாவது, $I_{2r-1} \geq I_{2r} \geq I_{2r+1}$

ஆனால், $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

$\therefore$ $n = 2r+1$ ஆனால், $I_{2r+1} = \frac{2r}{2r+1} I_{2r-1}$

$$\therefore \underset{r\to\infty}{\text{எல்லை}} I_{2r+1} = \underset{r\to\infty}{\text{எல்லை}} \left(\frac{2r}{2r+1} I_{2r-1}\right) = I_{2r-1}$$

அதாவது, r என்பது முடிவிலியை நெருங்கும்போது $I_{2r+1} = I_{2r-1}$

$\therefore$ $r \to \infty$ என்றால் $I_{2r-1} = I_{2r} = I_{2r+1}$ எனக் கொள்ளலாம்.

அதாவது, $\underset{r\to\infty}{\text{எல்லை}} I_{2r} = \underset{r\to\infty}{\text{எல்லை}} I_{2r+1}$ என்று கொள்க.

இருபக்கமும் மதிப்புக்களைப் பிரதியிடவும்.

$$\underset{r\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{(2r-1)\,(2r-3)\ldots3\cdot1}{(2r)\,(2r-2)\ldots\ldots\ldots4\cdot2} \cdot \frac{\pi}{2} = \underset{r\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{(2r)\,(2r+2)\ldots\ldots4\cdot2}{(2r+1)(2r-1)\ldots5\cdot3}$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} = \underset{r\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{[(2r)\,(2r-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots4\cdot2]^2}{(2r+1)\,[(2r-1)\,(2r-3)\ldots5\cdot3]^2}$$

$$= \underset{r\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{2^{2r}\,[r(r-1)\ldots\ldots\ldots2\cdot1]^2\,[(2r)\,(2r-2)\ldots\ldots\ldots4\cdot2]^2}{(2r+1)\,[(2r)\,(2r-1)\,(2r-2)\,(2r-3)\ldots5\cdot4\cdot3\cdot2]^2}$$

இப்பொழுது $a+n=r$ என்று எழுதுக.

$$\therefore (r+\tfrac{1}{2})\log r - (a+\tfrac{1}{2})\log a - r + a = \log\,[(a+1)\,(a+2)\ldots(r-1)r]$$
$$-\frac{1}{12}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right]+\frac{1}{360}\left[\frac{1}{r^3}-\frac{1}{a^3}\right]-\ldots\ldots\ldots$$
$$= \log\left(\frac{r!}{a!}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{360}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{a^3}\right)-\ldots\ldots\ldots$$
$$= \log r! - \log a! - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{360}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{a^3}\right)-\ldots$$

$$\therefore \log(r!) = a - (a+\tfrac{1}{2})\log a + \log a! - \frac{1}{12a} + \frac{1}{360a^3} - \ldots\ldots$$
$$+ (r+\tfrac{1}{2})\log r - r + \frac{1}{12r} - \frac{1}{360r^3} + \ldots\ldots$$
$$= C + (r+\tfrac{1}{2})\log r - r + \frac{1}{12r} - \frac{1}{360r^3} + \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

(C என்பது rஐச் சாராத ஒரு மாறிலியாகும்)

இந்த C யின் மதிப்பைக் காண வேலிஸ் சூத்திரத்தைப் பயன் படுத்தலாம்.

$$\frac{\pi}{2} = \underset{r \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{2^{4r} (r!)^4}{[(2r)!]^2 (2r+1)}$$

$$\therefore \quad \log \frac{\pi}{2} = \underset{r \to \infty}{\text{எல்லை}} \Big[4r \log 2 + 4 \log (r!) - 2 \log \{(2r)!\} - \log (2r+1) \Big]$$

இப்பொழுது log (r !), log $\{(2r)!\}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களை (1) இலிருந்து பிரதியிடவும்.

$$\therefore \quad \log \frac{\pi}{2} = \underset{r \to \infty}{\text{எல்லை}} \Big[4r \log 2 + 4 \{C + (r + \tfrac{1}{2}) \log r - r\} - 2 \{C + (2r + \tfrac{1}{2}) \log (2r) - 2r\} - \log (2r+1) \Big]$$

$$\left(\text{ஏனெனில்} \ \underset{r \to \infty}{\text{எல்லை}} \ \frac{1}{12r}, \ \frac{1}{360r^3}, \ \ldots\ldots = 0 \right)$$

$$= \underset{r \to \infty}{\text{எல்லை}} \Big[4r \log 2 + 4C + 4r \log r + 2 \log r - 4r - 2C - 4r \log (2r) - \log (2r) + 4r - \log (2r+1) \Big]$$

$$= \underset{r \to \infty}{\text{எல்லை}} \Big[2C + 2 \log r - \log 2 - \log r - \log (2r+1) \Big]$$

$$= \underset{r \to \infty}{\text{எல்லை}} \Big[2C - \log 2 + \log r - \log (2r+1) \Big]$$

$$= \underset{r \to \infty}{\text{எல்லை}} \Big[2C - \log 2 - \log \frac{2r+1}{r} \Big]$$

$$= \underset{r \to \infty}{\text{எல்லை}} \Big[2C - \log 2 - \log \left(2 + \frac{1}{r} \right) \Big]$$

$$= 2C - 2 \log 2$$

$$\therefore \quad 2C = \log \frac{\pi}{2} + 2 \log 2$$

$$= \log 2\pi$$

$$= \underset{r \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{2^{2r} (r!)^2 \cdot 2^{2r} (r!)^2}{(2r+1) [(2r)!]^2}$$

$$= \underset{r\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{2^{4r}(r!)^4}{[(2r)!]^2\ (2r+1)}$$

அதாவது, $$\frac{\pi}{2} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n)!]^2\ (2n+1)}$$

12·10 ஸ்டெர்லிங்-இன் காரணீயப் பெருக்கத் தோராயம்.

வேலிஸ்-சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காரணீயப் பெருக்கத்தின் (factorial) தோராய மதிப்பைக் காண ஸ்டெர்லிங்-ஆல் வருவிக்கப்பட்ட வாய்பாடு பெரிய எண்களின் காரணீயப் பெருக்கங்களின் தோராய மதிப்புக்களைக் காணப் பெரிதும் பயன்படுகிறது.

யூலர்-மக்கலாரின் தொகை வாய்பாட்டைக் கருதுக.

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}(f_n+f_0)+(f_1+f_2+\dots+f_{n-1})-\frac{h}{12}(f'_n-f'_0)$$
$$+\frac{h^3}{720}(f'''_n-f'''_0)-\dots\dots$$

இவ்வாய்பாட்டில் $h=1$, $f(x)=\log_e x$ எனக் கொள்க.

$$\int_a^{a+n}\log_e x\,dx = \tfrac{1}{2}[\log_e(a+n)+\log_e a]+[\log_e(a+1)+\log_e(a+2)$$
$$+\dots+\log_e(a+n-)]$$
$$-\frac{1}{12}\left[\frac{1}{a+n}-\frac{1}{a}\right]+\frac{1}{720}\left[\frac{2}{(a+n)^3}-\frac{2}{a^3}\right]-\dots\dots$$

அதாவது, $$\left[x\log_e x-x\right]_a^{a+n} = \tfrac{1}{2}\log_e(a+n)+\tfrac{1}{2}\log_e a$$
$$+\log_e[(a+1)(a+2)\dots\dots(a+n-1)]$$
$$-\frac{1}{12}\left[\frac{1}{a+n}-\frac{1}{a}\right]+\frac{1}{360}\left[\frac{1}{(a+n)^3}-\frac{1}{a^3}\right]-\dots\dots$$

$$(a+n)\log_e(a+n)-(a+n)-a\log_e a+a = \tfrac{1}{2}\log_e(a+n)+\tfrac{1}{2}\log_e a$$
$$+\log_e[(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)]-\frac{1}{12}\left[\frac{1}{a+n}-\frac{1}{a}\right]$$
$$+\frac{1}{360}\left[\frac{1}{(a+n)^3}-\frac{1}{a^3}\right]-\dots\dots\dots$$

$$\therefore\quad (a+n)\log_e(a+n)+\tfrac{1}{2}\log_e(a+n)-n-a\log_e a-\tfrac{1}{2}\log_e a$$
$$=\log_e(a+n)+\log_e[(a+1)(a+2)\dots\dots(a+n-1)]$$
$$-\frac{1}{12}\left[\frac{1}{a+n}-\frac{1}{a}\right]+\frac{1}{360}\left[\frac{1}{(a+n)^3}-\frac{1}{a^3}\right]-\dots\dots$$

$$(a+n+\tfrac{1}{2}) \log_e (a+n)-(a+\tfrac{1}{2}) \log_e a-n$$
$$=\log_e [(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+n-1)(a+n)]$$
$$-\frac{1}{12}\left[\frac{1}{a+n}-\frac{1}{a}\right]+\frac{1}{360}\left[\frac{1}{(a+n)^3}-\frac{1}{a^3}\right]-\ldots\ldots$$

$$\therefore \quad C=\tfrac{1}{2} \log_e 2\pi$$

இம் மதிப்பை (1) இல் பிரதியிடவும்.

$$\therefore \log_e (r\,!)=\tfrac{1}{2} \log_e 2\pi+(r+\tfrac{1}{2}) \log_e r-r+\frac{1}{12r}-\frac{1}{360r^3}+\ldots\ldots$$
$$=\log_e (r^{r+1/2}.\sqrt{2\pi})-r+\frac{1}{12r}-\frac{1}{360r^3}+\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \; r\,! \quad =r^{r+1/2} \sqrt{2\pi}\, e^{-r}.e^{\frac{1}{12r}-\frac{1}{360r^3}+\ldots\ldots\ldots\ldots}$$
$$=r^{r+1/2} \sqrt{2\pi}\, e^{-r}\left[1+\left(\frac{1}{12r}-\frac{1}{360r^3}+\ldots\ldots\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\,!}\left(\frac{1}{12r}-\frac{1}{360r^3}+\ldots\ldots\ldots\right)^2+\ldots\ldots\ldots\right]$$
$$=r^{r+1/2} \sqrt{2\pi}\, e^{-r}\left(1+\frac{1}{12r}+\ldots\ldots\right)$$

மாதிரி 161

$\log_{10} (79\,!)$ இன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக. (சென்னை '64 ஏப்.)

இப்பொழுது $n\,!=n\cdot(n-1)!$

$$\therefore \quad \log n\,!=\log n+\log (n-1)\,!$$

அதாவது, $\log_e n+\log_e (n-1)\,!=\log_e n\,!$

வலப்பக்கம் ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தவும்.

$$\therefore \quad \log_e n+\log_e (n-1)\,!=(n+\tfrac{1}{2}) \log_e n+\log_e \sqrt{2\pi}-n$$
$$+\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\frac{1}{1260n^5}-\frac{1}{1680n^7}+\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \quad \log (n-1)\,!=(n-\tfrac{1}{2}) \log_e n+\tfrac{1}{2} \log_e (2\pi)-n+\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}$$
$$+\frac{1}{1260n^5}-\frac{1}{1680n^7}+\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \quad \log_{10}(n-1)! = (n-\tfrac{1}{2})\log_{10} n + \tfrac{1}{2}\log_{10}(2\pi) + \log_{10} e\left[-n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{1}{1680n^7} + \dots\dots\dots\right]$$

இப்பொழுது $n = 80$ என்று பிரதியிடவும்.

இங்கு $\log_{10} 80 = 1{\cdot}9030899869919 43586$

$(n-\tfrac{1}{2})\log_{10} 80 = 79{\cdot}5 \log_{10} 80 = 151{\cdot}29565396585 9515$

மேலும் $\log_{10} e = 0{\cdot}4342944819032518 28 = M$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad \log_{10} 79! = 79{\cdot}5\log_{10} 80 + \tfrac{1}{2}\log_{10} 2\pi + M\left(\frac{1}{12(80)} + \frac{1}{1260(80)^5}\right) - M\left(80 + \frac{1}{360(80)^3} + \frac{1}{1680(80)^7}\right)$$

இங்கு, $79{\cdot}5 \log_{10} 80 \quad = 151{\cdot}295653965859515$

$\tfrac{1}{2}\log_{10} 2\pi \quad = \quad 0{\cdot}399089934179058$

$\dfrac{M}{12(80)} = \dfrac{\log_{10} e}{960} \quad = \quad 0{\cdot}000452390085316$

$\dfrac{M}{1260(80)^5} = \dfrac{\log_{10} e}{1260(80)^5} = \quad 0{\cdot}000000000000105$

மொத்தம் $= 151{\cdot}695196290123994$

$-M(80) = -80\log_{10} e \quad = -34{\cdot}743558552260146$

$\dfrac{-M}{360(80)^3} = \dfrac{-\log_{10} e}{360(80)^3} \quad = - \; 0{\cdot}000000002356198$

$\dfrac{-M}{1680(80)^7} = \dfrac{-\log_{10} e}{1680(80)^7} = - \; 0{\cdot}000000000000000$

மொத்தம் $= -34{\cdot}743558554616348$

$\therefore \quad \log_{10}(79!) = 116{\cdot}951637735507649$ (பதினைந்து தசம இடங்களுக்கு)

மாதிரி 162

$^{100}C_{50}$ இன் மதிப்பைத் தோராயமாகப் பெறுக.

(சென்னை '68 செப்.)

$$^{100}C_{50}=\frac{100\,!}{50\,!\;50\,!}$$

$$\therefore\quad \log\,^{100}C_{50}\qquad =\log 100\,!-2\log 50\,!$$

ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்துக.

$$\log_e 100\,!=\left[100{\cdot}5\log_e 100-100+\frac{1}{12\,(100)}-\frac{1}{360\,(100)^3}+\cdots\right]+\frac{1}{2}\log_e 2\pi$$

$$2\log_e 50\,!=2\left[50{\cdot}5\log_e 50-50+\frac{1}{12\,(50)}-\frac{1}{360\,(50^3)}+\cdots\cdots\right]+\log_e 2\pi$$

$$\therefore\quad \log_e 100\,!-2\log_e 50\,!=100{\cdot}5\log_e 100-101\log_e 50$$
$$+\frac{1}{12}\left[\frac{1}{100}-\frac{1}{25}\right]-\frac{1}{360}\left[\frac{1}{100^3}-\frac{2}{50^3}\right]+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots-\frac{1}{2}\log_e 2\pi$$

$$\therefore\quad \log_{10}\,^{100}C_{50}=100{\cdot}5\log_{10}100-101\log_{10}50-\frac{1}{2}\log_{10}(2\pi)$$
$$+\log_{10}e\left[\frac{1}{12}\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{25}\right)-\frac{1}{360}\left(\frac{1}{100^3}-\frac{2}{50^3}\right)+\cdots\cdots\right]$$
$$=100{\cdot}5\,(2{\cdot}0000)-101\,(1{\cdot}69897)-0{\cdot}39909$$
$$+0{\cdot}43429\,[-0{\cdot}0025]$$
$$=29{\cdot}00385$$

$\therefore\quad ^{100}C_{50}=$ எதிர்மடக்கை $28{\cdot}00385$.

பயிற்சி 26

1. n உறுப்புக்களைக் கொண்ட தொடர்களின் x ஆவது உறுப்புக்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றிலிருந்து அத்தொடர்களின் கூட்டுத்தொகைகளைக் காண்க.

(i) $(x-1)(x-2)(x-3)$

(ii) $x\,(x+2)(x+5)$

(iii) $x\,(x-2)(x-4)$

2. முதல் n இயற்கை யெண்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

3. $1\cdot 3^2+3\cdot 5^2+5\ 7^2+7\cdot 9^2+\ldots\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் n உறுப்புக்களைக் கூட்டுக.

4. $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ ஐ x ஆவது உறுப்பாகக் கொண்ட தொடரின் n உறுப்புக்களைக் கூட்டுக.

5. $\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{(x+1)(x+3)}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

6. $\sum_{x=1}^{n} \frac{x}{(x+2)(x+3)(x+4)}$ ஐ மதிப்பிடுக.

7. $\frac{1}{2\cdot 6\cdot 10}+\frac{1}{4\cdot 8\cdot 12}+\frac{1}{6\cdot 10\cdot 14}+\ldots\ldots\ldots$ என்ற முடிவிலாத் தொடரைக் கூட்டுக.

8. $7+14+19+22+23+22+\ldots\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் n உறுப்புக்களைக் கூட்டுக.

9. 1, 5, 17, 53, 161,......... என்ற தொடரின் n உறுப்புக்களைக் கூட்டுக.

10. கூட்டுக: $10+23+60+169+494+\ldots\ldots$ (n உறுப்புக்கள்).

11. $\sum_{x=1}^{n} x^2(3x+2)$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

12. $\sum_{x=1}^{n} \frac{3x+4}{x(x+1)}\cdot 4^{-x}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

13. $a+2a^2+3a^3+4a^4+\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் n உறுப்புக்களைக் கூட்டுக.

14. $2\cdot 2+7\cdot 4+14\cdot 8+23\cdot 16+34\cdot 32+\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் n உறுப்புக்களைக் கூட்டுக. (டெல்லி எம்.ஏ. '62)

15. $\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots\ldots+\frac{1}{199}$ இன் கூட்டுத்தொகையை ஆறு தசம இடங்களுக்குக் காண்க. (சென்னை '62 செப்.)

16. $\frac{1}{100^2}+\frac{1}{101^2}+\frac{1}{102^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{150^2}$ இன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

17. $\sum_{x=50}^{100} \frac{1}{x^2}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

18. முதல் n இயற்கை யெண்களின் ஐந்தாம், ஏழாம் படிகளின் கூட்டுத் தொகைகளின் மொத்தம் அந்த எண்களின் முப்படிகளின் கூட்டுத்தொகையின் வர்க்கத்தைப் போல் இரு மடங்கு என்று காட்க. (சென்னை '61 ஏப்.)

19. $\frac{1}{11^3}+\frac{1}{12^3}+\frac{1}{13^3}+\frac{1}{14^3}+\ldots\ldots$ என்ற முடிவிலாத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையை 10 தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

20. $\sum_{n=50}^{150} \frac{1}{(4n+3)^2}$ இன் மதிப்பை ஆறு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

(சென்னை '67 ஏப்.)

21. $\sum_{n=100}^{200} \frac{1}{n^{3/2}}$ இன் மதிப்பை ஆறு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

(சென்னை '68 ஏப்.)

22. $\sum_{n=50}^{100} \frac{1}{n^{5/8}}$ இன் மதிப்பை ஏழு தசம இடங்களுக்குக் காண்க.

(சென்னை '69 செப்.)

23. n!க்கு ஸ்டெர்லிங்-இன் தோராய மதிப்பைப் பெறுக. அதன் மூலம் 99! இன் தோராய மதிப்பைக் காண்க. (சென்னை '60 ஏப்.)

24. காரணீயப் பெருக்கத்திற்கு ஸ்டெர்லிங்-இன் தோராய மதிப்பைப் பெறுக. $\log_{10} 89!$ இன் மதிப்பை ஆறு தசம இடங்களுக்குக் கணக்கிடுக. (சென்னை '65 ஏப்., '67 ஏப்.)

25. $\log_{10} \frac{100!}{60!\ 40!}$ இன் மதிப்பைத் தோராயமாகக் கணக்கிடுக.

(சென்னை '67 ஏப்.)

26. 1000! இன் மதிப்பைத் தோராயமாகக் கணக்கிடுக.
(சென்னை '68 ஏப்.)

27. 1600! இன் மதிப்பைத் தோராயமாகக் காண்க. (சென்னை '69 செப்.)

28. ஸ்டெர்லிங் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $\log_{10} 59!$ இன் மதிப்பை ஆறு தசம இடங்களுக்குக் கணக்கிடுக. (சென்னை '66 ஏப்.)

13. வேறுபாட்டுச் சமன்பாடுகள்
(Difference Equations)

13.1. வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு

ஒரு சார்பற்ற மாறி (independent variable), ஒரு சார்புடைமாறி (dependent variable), அச் சார்புடைமாறியின் அடுத்தடுத்த வேறுபாடுகள் ஆகியவற்றைக் கொண்டு அமைக்கப் பெற்ற ஒரு சமன்பாட்டிற்கு வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு (Difference Equation) என்று பெயர். ஆனால் ஒரு சார்புடைமாறியின் அடுத்தடுத்த வேறுபாடுகளை அச் சார்புடைமாறியின் அடுத்தடுத்த மதிப்புக்களால் குறிப்பிட முடியுமாதலால், வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு என்பது ஒரு சார்பற்ற மாறிக்கும், ஒரு சார்புடை மாறியின் அடுத்தடுத்த மதிப்புக்களுக்கு மிடையேயுள்ள தொடர்பைக் குறிக்கின்ற சமன்பாடு என்று கொள்ளலாம். u_x என்பது x என்ற சார்பற்ற மாறியினைச் சார்ந்த சார்புடைமாறி எனக் கொண்டால் u_x-இன் அடுத்தடுத்த வேறுபாடுகள் முறையே $\triangle u_x$, $\triangle^2 u_x$, $\triangle^3 u_x$,...... என்றும், u_x-இன் அடுத்தடுத்த மதிப்புக்கள் முறையே u_{x+1}, u_{x+2}, u_{x+3},......... என்றும் குறிப்பிடப்படுகின்றன.

$a\triangle^3 u_x + b\triangle^2 u_x + c\triangle u_x + d\,u_x = f(x)$ என்பது u_x-இன் அடுத்தடுத்த வேறுபாடுகளைக் கொண்டு அமைந்த வேறுபாட்டுச் சமன்பாடாகும்.

$au_{x+3} + bu_{x+2} + c\;u_{x+1} + du_x = f(x)$ என்பது u_x - இன் அடுத்தடுத்த மதிப்புக்களைக் கொண்டு அமைந்த வேறுபாட்டுச் சமன்பாடாகும். முதல் வகை வேறுபாட்டுச் சமன்பாடுகளைவிட இரண்டாம் வகை வேறுபாட்டுச் சமன்பாடுகளைக் கையாள்வது மிகவும் எளிதாகயிருக்குமாகையால், இரண்டாம் வகை வேறுபாட்டுச் சமன்பாடுகளையே நாம் இங்கு கையாள்கிறோம். ஒரு பொதுவான வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு,

$u_{x+n}+p_1u_{x+n-1}+p_2u_{x+n-2}+\cdots+p_nu_x=\varphi(x)$ என்ற அமைப்பில் (p_1, p_2,..., p_n என்பன மாறிலிகளாகவோ அல்லது x-இன் சார்பலன்களாகவோ இருக்கலாம்) இருந்தால், அது n-ஆம் வரிசை (நிலை) ஒருபடி வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு (Linear Difference Equation of order n) எனப்படும்.

13.1.1. வேறுபாட்டுச் சமன்பாடுகளின் வரிசைகள் (Orders of difference equations)

ஒரு வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டில் u_x-இன் அடுத்தடுத்த மதிப்புக்கள் u_{x+1} வரையும் u_{x+n} க்கு மேற்படாமலும் இருந்தால் அச் சமன்பாட்டின் வரிசை n ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$2\,u_{x+2}-u_{x+1}+5\,u_x=x^2$$

என்பது ஒரு இரண்டாம் வரிசை வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு (second order difference equation) ஆகும்.

13.2. வேறுபாட்டுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் (Solutions of difference equations)

ஒரு வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு என்பது அச்சமன்பாட்டினைச் சமன்படுத்தக் கூடிய, சார்பற்ற மாறிக்கும் சார்புடை மாறிக்குமிடையேயுள்ள தொடர்பு ஆகும். ஒரு n-ஆம் வரிசை வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு n மாறிலிகளைக் கொண்டு அமையப் பெற்ற சமன்பாடாக யிருக்கும். ஒரு வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்விலுள்ள மாறிலிகளின் எண்ணிக்கை அச் சமன்பாட்டின் வரிசைக்குச் சமமானால், அத்தீர்வானது அச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு (General solution) அல்லது முழு மூலம் (complete primitive) எனப்படும். ஒரு பொதுத் தீர்விலுள்ள மாறிலிகளுள் ஒன்று அதற்கு மேற்பட்ட மாறிலிகள் குறிப்பிட்ட மதிப்புக்களைப் பெற்றிருந்தால் அத்தீர்வானது குறிப்பிட்ட தீர்வு (particular solution) எனப்படும். எடுத்துக் காட்டாக,

$$u_{x+2}-2\,a\,u_{x+1}+a^2\,u_x=0$$

என்ற இரண்டாம் வரிசை வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டைக் கருதுக. இச்சமன்பாட்டை a^{-x-1} ஆல் பெருக்குக.

$$\therefore\ a^{-(x+1)}\,u_{x+2}-2a^{-x}u_{x+1}+a^{-(x-1)}\,u_x=0.$$

அதாவது, $a^{-(x+1)}\,u_{x+2}-2a^{-x}u_{x+1}-a^{-x}u_{x+1}+a^{-(x-1)}\,u_x=0$

$$[a^{-(x+1)}u_{x+2}-a^{-x}u_{x+1}]-[a^{-x}u_{x+1}-a^{-(x-1)}u_x]=0$$

அதாவது, $\triangle a^{-x}u_{x+1}-\triangle a^{-(x-1)}u_x=0$

$$\triangle[a^{-x}u_{x+1}-a^{-(x-1)}u_x]=0$$

$\therefore\ a^{-x}u_{x+1}-a^{-(x-1)}u_x=$ ஒரு மாறிலியாகும்

$=c_1$ எனக் கொள்க.

அதாவது, $\triangle a^{-(x-1)}u_x=c_1$

$\therefore\ a^{-(x-1)}u_x=c_1\,x+$ ஒரு மாறிலி

$=c_1\,x+c_2$ எனக் கொள்க

$\therefore\ u_x=c_1\,x\,a^{x-1}+c_2\,a^{x-1}$ ஆகும்.

ஆகவே, $u_x=c_1\,x\,a^{x-1}+c_2\,a^{x-1}$ என்பது

$$u_{x+2}-2a\,u_{x+1}+a^2u_x=0$$

என்ற வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும். இத்தீர்வு, c_1, c_2 ஆகிய இரண்டு மாறிலிகளைக் கொண்டு அமைந்துள்ளது. கொடுக்கப் பட்டுள்ள வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டின் வரிசையும் இரண்டுதான்.

ஆகவே,

$$u_x=c_1\,x\,a^{x-1}+c_2\,a^{x-1}$$

என்ற தீர்வு கொடுக்கப்பட்டுள்ள வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு (General solution) ஆகும். இனி, இத்தீர்வு கொடுக் கப்பட்டுள்ள வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டை எவ்வாறு சமன் படுத்துகிறதென்று பார்ப்போம்.

$$u_x=c_1\,x\,a^{x-1}+c_2\,a^{x-1}$$

$$\therefore\ u_{x+1}=c_1\,(x+1)\,a^x+c_2a^x$$

$$u_{x+2}=c_1\,(x+2)\,a^{x+1}+c_2\,a^{x+1}$$

$$\therefore\ u_{x+2}-2a\,u_{x+2}+a^2u_x=c_1\,(x+2)\,a^{x+1}+c_2\,a^{x+1}$$
$$-2\,c_1\,(x+1)\,a^{x+1}-2\,c_2\,a^{x+1}$$
$$+c_1\,x\,a^{x+1}+c_2\,a^{x+1}$$
$$=0$$

பொதுத் தீர்விலுள்ள மாறிலிகளாகிய c_1, c_2 ஆகியவை ஏதாவது குறிப்பிட்ட மதிப்புக்களைப் பெறுவதால் கிடைக்கப்படும் தீர்வு குறிப் பிட்ட தீர்வு (particular solution) எனப்படுகிறது.

உதாரணமாக, $c_1=1$, $c_2=0$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore\ u_x=xa^{x-1}$

$$\therefore\ u_{x+1}=(x+1)\,a^x$$

$$u_{x+2}=(x+2)\,a^{x+1}$$

$$\therefore u_{x+2}-2a\,u_{x+1}+a^2u_x=(x+2)\,a^{x+1}-2\,(x+1)\,a^{x+1}+x\,a^{x+1}$$
$$=0$$

ஆகவே, $u_x=x\,a^{x-1}$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டின் ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வு ஆகும்.

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வைப் பெறுவதற்கு நாம் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டை $a^{-(x+1)}$ என்ற காரணியால் பெருக்கினோம். இக் காரணியைக் கொண்டு பெருக்கியதால் கிடைக்கப் பெற்ற பெருக்கற்பலனைத் தொகையீடு செய்து பொதுத் தீர்வைக் கண்டோம். ஆகவே, இக் காரணிக்கு தொகையீட்டுக் காரணி (Integrating Factor) என்று பெயர்.

மாதிரி 163

$u_{x+1}-3u_x=9\cdot5^x$ என்ற வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

$$u_x\;=k\cdot9\cdot5^x \text{ எனக் கொள்க.}$$

$$\therefore u_{x+1}=k\cdot9\cdot5^{x+1}$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

$$k\cdot9\cdot5^{x+1}-3\,k\cdot9\cdot5^x=9\cdot5^x$$
$$k\cdot9\cdot5^x\,[5-3]\quad=9\cdot5^x$$
$$\therefore 2k\quad=1$$
$$k\quad=\tfrac{1}{2}.$$

ஆகவே, $u_x=\frac{1}{2}\cdot9\cdot5^x$ என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வு ஆகும்.

13.3 சமபடித்தான ஒருபடி வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு (Homeogneous Linear Difference Equations)

$$u_{x+n}+p_1\,u_{x+n-1}+\ldots\ldots+p_n\,u_x=0$$

என்பது ஒரு சமபடித்தான ஒருபடி வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பாகும். இத்தகைய சமபடித்தான சமன்பாடுகளின் ஒன்றும் வரிசைச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறை கீழே விளக்கப் பட்டுள்ளது.

ஒரு சமபடித்தான ஒன்றும் வரிசைச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பு

$$u_{x+1}+p_1\,u_x=0$$

ஆகும். இங்கு p_1 என்பது மாறியாகவோ அல்லது x-இன் சார் பலனாகவோ இருக்கலாம். இச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பைக் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி எழுதிக் கொள்ளலாம்.

$$u_{x+1} - A(x)\, u_x = 0$$

அல்லது, $$u_{x+1} = A(x)\, u_x$$

இதில் $x = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore\ u_1 = A(0)\cdot u_0$$
$$u_2 = A(1)\cdot u_1 = A(1)\cdot A(0)\cdot u_0$$
$$u_3 = A(2)\cdot u_2$$
$$= A(2)\cdot A(1)\cdot A(0)\cdot u_0$$

....

....

$$u_x = A(x-1)\cdot A(x-2)\ldots\ldots\ldots A(2)\cdot A(1)\cdot A(0)\cdot u_0$$
$$= u_0\,[A(x-1)\cdot A(x-2)\ldots\ldots\ldots A(2)\cdot A(1)\cdot A(0)]$$
$$= u_0 \prod_{x=0}^{x=x-1} A(x)$$

(Π என்பது பெருக்கற் குறியீடாகும்.)

இப்பொழுது, $u_0 = C$ என்று கொண்டால்,

$$u_x = C \prod_{x=0}^{x-1} A(x)$$

என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

மாதிரி 164

$u_{x+1} - x^2\, u_x = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்

இங்கு, $A(x) = x^2$.

$$\therefore u_x = C \prod_{x=0}^{x-1} A(x)$$

$x = 0$ ஆனால் $A(x) = 0$ ஆகும். ஆகவே,

$$u_x = C \prod_{x=1}^{x-1} A(x)$$
$$= C \prod_{x=1}^{x-1} x^2$$

$$=C\,[1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \ldots\ldots (x-1)^2]$$
$$=C\,[1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (x-1)]^2$$
$$=C\,[(x-1)\,!]^2$$

மாதிரி 165

தீர்க்கவும் : $u_{x+1}-3\,u_x=2^x$

$x=0, 1, 2, \ldots\ldots, x$ என்று பிரதியிடவும்.

$$u_1-3\,u_0=2^0$$
$$\therefore\ u_1=2^0+3\,u_0$$
$$u_2-3\,u_1=2^1$$
$$\therefore\ u_2=2^1+3\,u_1$$
$$=2^1+3\,(2^0+3\,u_0)$$
$$=2^1+3\cdot2^0+3^2u_0$$
$$u_3-3\,u_2=2^2$$
$$\therefore\ u_3=2^2+3\,u_2$$
$$=2^2+3\,(2^1+3\cdot2^0+3^2\cdot u_0)$$
$$=2^2+3\cdot2^1+3^2\cdot2^0+3^3\cdot u_0$$

இதுபோல், $u_4=2^3+3\cdot2^2+3^2\cdot2^1+3^3\cdot2^0+3^4\cdot u_0$

....

$$u_x=2^{x-1}+3^1\cdot2^{x-2}+3^2\cdot2^{x-3}+\ldots\ldots+3^{x-1}\cdot2^0+3^x\cdot u_0$$
$$=\left(2^{x-1}+3\cdot2^{x-2}+3^2\cdot2^{x-3}+\ldots+3^{x-1}\cdot2^0\right)+C\cdot3^x$$
$$=\frac{2^{x-1}\left(\dfrac{3^x}{2^x}-1\right)}{\dfrac{3}{2}-1}+C\cdot3^x$$
$$=\frac{2^{x-1}\left(\dfrac{3^x-2^x}{2^x}\right)}{\dfrac{1}{2}}+C\cdot3^x$$
$$=\frac{2^{x-1}\left(3^x-2^x\right)}{2^{x-1}}+C\cdot3^x$$

$$=3^x-2^x+C\cdot 3^x$$
$$=(1+C)\,3^x-2^x$$
$=C_1\,3^x-2^x$, C_1 என்பது மாறிலியாகும்.

மாதிரி 166

தீர்க்கவும் : $u_{x+1}-2^x\,u_x=0$

இங்கு $A(x)=2^x$

$$\therefore u_x=C\prod_{x=0}^{x-1}A(x)$$
$$=C\prod_{x=0}^{x-1}2^x$$
$$=C\cdot(2^0\cdot 2^1\cdot 2^2\ldots\ldots 2^{x-1})$$
$$=C\cdot 2^{0+1+2+\cdots\cdots+(x-1)}$$
$$=C\cdot 2^{x(x-1)/2}$$

13.4 சமபடித்தான ஒருபடி வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கப் பொதுவான முறை

$u_{x+n}+p_1u_{x+n-1}+\ldots\ldots+p_nu_x=0$ ....(1) என்ற n–ஆம் வரிசைச் சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டைக் கருதுக. பொதுவான வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளைத் (Ordinary differential equation) தீர்க்க பயன்படும் இரண்டு தேற்றங்களையொத்த கீழ்க் காணும் இருதேற்றங்களின் அடிப்படையில் மேற்கண்ட வேறு பாட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு அமைந்துள்ளது.

(1) சமன்பாடு (1) இன் ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வு $u_1(x)$ என்றால் $c_1\,u_1(x)$ என்பதும் அச்சமன் பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

(2) $u_1(x), u_2(x),\ldots, u_n(x)$ என்பன சமன்பாடு (1) இன் n தீர்வுகளாயின், $c_1\,u_1(x)+c_2\,u_2(x)+\ldots+c_n\,u_n(x)$ என்பதுவும் அச்சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு ஆகும்.

இப்பொழுது, $E^n u_x=u_{x+n}$ என்று மாற்றுகின்ற E என்ற செய லியைப் பயன்படுத்தி, சமன்பாடு (1) ஐக் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$E^n u_x+p_1E^{n-1}u_x+p_2E^{n-2}u_x+\ldots+p_n\,u_x=0$$

அதாவது, $(E^n + p_1 E^{n-1} + p_2 E^{n-2} + \ldots + p_n)\, u_x = 0$.

அதாவது, $f(E) \equiv E^n + p_1 E^{n-1} + p_2 E^{n-2} + \ldots + p_n$ எனக் கொண்டால்,

$f(E) \cdot u_x = 0$ ஆகும்.

இங்கு, $f(E) \equiv E^n + p_1 E^{n-1} + p_2 E^{n-2} + \ldots + p_{n-1} E + p_n$ என்பது சிறப்பியல்பு சார்பலன் (Characteristic Function) எனப்படும்.

$f(E) \equiv E^n + p_1 E^{n-1} + p_2 E^{n-2} + \ldots\ldots + p_{n-1} E + p_n = 0$ என்ற சமன்பாடு, சமன்பாடு (1) இன் துணைச்சமன்பாடு (Auxiliary Equation) எனப்படும்.

வகை (i) துணைச் சமன்பாட்டின் n மூலங்களும் தனித்தனி மெய் மூலங்கள் (real and distinct roots).

துணைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ எனக் கொள்க.

$\therefore f(E) \equiv (E - \alpha_1)(E - \alpha_2) \ldots (E - \alpha_n)$. ஆகும்.

ஆகவே, $f(E)\, u_x \equiv (E - \alpha_1)(E - \alpha_2) \ldots (E - \alpha_n)\, u_x = 0$

அதாவது, $(E - \alpha_r)\, u_x = 0, \; r = 0, 1, 2, \ldots, n$.

$E\, u_x - \alpha_r\, u_x = 0, \; r = 0, 1, 2, \ldots, n$.

$u_{x+1} - \alpha_r\, u_x = 0, \; r = 0, 1, 2, \ldots, n$.

அதாவது, $u_x = c_r\, \alpha^x{}_r, \; r = 1, 2, 3, \ldots, n$.

($c_1, c_2, \ldots, c_n$ என்பன மாறிலிகளாகும்.)

அதாவது, $u_x = c_1\, \alpha_1{}^x, u_x = c_2\, \alpha_2{}^x, \ldots, u_x = c_n\, \alpha_n{}^x$ என்பன சமன்பாடு (1) இன் n தீர்வுகளாகும். ஆகவே,

$$u_x = c_1\, \alpha_1{}^x + c_2\, \alpha_2{}^x + \ldots + c_n\, \alpha_n{}^x$$

என்பது சமன்பாடு (1) இன் பொதுத் தீர்வு ஆகும்.

வகை (ii) துணைச் சமன்படு k பொருந்தும் மூலங்களைக் (coincident roots) கொண்டுள்ளது.

$f(E) = 0$இன் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ என்ற n மூலங்களுள் $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k$ எனக் கொள்க, இந்த k சம மூலங்களுக்குரிய தீர்வு.

$u_x - (c_1 + c_2 x + \ldots + c_k\, x^{k-1})\, \alpha_1{}^x$ ஆகும்.

ஆகவே, $u_x = (c_1 + c_2 + \ldots + c_k\, x^{k-x})\, \alpha_1{}^x = c_{k+1}\, \alpha_k{}^x{}_{+1} + \ldots + c_n\, \alpha_n{}^x$ என்பது சமன்பாடு (1) இன் பொதுத் தீர்வு ஆகும்.

வகை (iii) துணைச் சமன்பாடு தனித்தனிச் சிக்கல் மூலங்களைக் (complex roots) கொண்டுள்ளது.

துணைச் சமன்பாட்டின் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ என்ற n மூலங்களுள் $\alpha_1=\alpha+i\beta$, $\alpha_2=\alpha-i\beta$ எனக் கொள்க.

ஆகவே இவற்றிற்குரிய தீர்வுகள்

$$u_x=c_1\alpha_1^x=c_1(\alpha+i\beta)^x,$$
$$u_x=c_2\alpha_2^x=c_2(\alpha-i\beta)^x$$

ஆகும். இவ்விரு சிக்கல் மூலங்களுக்குமுரிய தீர்வு.

$$u_x=c_1(\alpha+i\beta)^x+c_2(\alpha-i\beta)^x$$

ஆகும். இப்பொழுது,

$$\alpha+i\beta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

என்று எழுதினால், $\alpha-i\beta=r(\cos\theta-i\sin\theta)$ ஆகும்

$$\therefore\ r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2};\quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore\ u_x&=c_1r^x(\cos\theta+i\sin\theta)^x+c_2r^x(\cos\theta-i\sin\theta)^x\\&=c_1r^x(\cos\theta x+i\sin\theta x)+c_2r^x(\cos\theta x-i\sin\theta x)\\&=r^x[(c_1+c_2)\cos\theta x+i(c_1-c_2)\sin\theta x]\end{aligned}$$

இப்பொழுது, $c_1+c_2=C_1$, $c_1-c_2=C_2$ என்று எழுதினால்,

$$u_x=r^x(C_1\cos\theta x+C_2\sin\theta x)$$

என்பது ஒரு சோடி சிக்கல் மூலங்களுக்குரிய தீர்வு ஆகும். இது போல் ஏனைய சோடி சிக்கல் மூலங்களுக்குரிய தீர்வுகளைக் காணலாம்.

வகை (iv) துணைச் சமன்பாடு சமமான சிக்கல் மூலங்களைக் கொண்டுள்ளது.

$f(E)=0$இன் n மூலங்களுள் $\alpha_1=\alpha+i\beta$, $\alpha_2=\alpha+i\beta$, $\alpha_3=\alpha-i\beta$, $\alpha_4=\alpha-i\beta$ எனக்கொள்க.

α_1, α_2 ஆகியவற்றிற்குரிய தீர்வு

$$\begin{aligned}u_x&=(c_1+c_2x)\alpha_1^x\\&=(c_1+c_2x)(\alpha+i\beta)^x\end{aligned}$$ ஆகும்.

இது போல், α_3, α_4க்குரிய தீர்வு

$$u_x=(c_3+c_4x)(\alpha-i\beta)^x$$ ஆகும்.

ஆகவே, இந்த நான்கு சிக்கல் மூலங்களுக்கு முரிய தீர்வு.

$$u_x=(c_1+c_2x)(\alpha+i\beta)^x+(c_3+c_4x)(\alpha-i\beta)^x$$ ஆகும்.

இப்பொழுது,

$$\alpha + i\,\beta = r\,(\cos\theta + i\sin\theta),$$

$$\alpha - i\,\beta = r\,(\cos\theta - i\sin\theta)$$

என்று கருதினுல், $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ ஆகும்.

முன்போல் சுருக்கினுல், இந்த நான்கு மூலங்களுக்கு முரிய தீர்வு.

$$u_x = r^x\,[(c_1+c_2x+c_3+c_4x)\cos\theta x + i\,(c_1+c_2x-c_3-c_4x)\sin\theta x]$$

$$= r^x\left\{[(c_1+c_3)+(c_2+c_4)x]\cos\theta x + i\,[(c_1-c_3)+(c_2-c_4)x]\sin\theta x\right\}$$

இப்பொழுது $c_1+c_3=C_1$, $c_2+c_4=C_2$,

$i\,(c_1-c_3)=C_3$, $i\,(c_2-c_4)=C_4$

என்று எழுதினுல்,

$u_x = r^x\,[(C_1+C_2x)\cos\theta x + (C_3+C_4x)\sin\theta x]$ என்பது அவ் விரு சோடி சம சிக்கல் மூலங்களுக்குரிய தீர்வு ஆகும். இதுபோல் எத்தனை சோடி சம சிக்கல் மூலங்கள் இருந்தாலும் அவற்றிற்குரிய தீர்வை மேற்கண்ட முறைப்படி காணலாம். பின்னர் மற்ற மூலங் களுக்குரிய தீர்வுகளையும் கண்டு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வைக் காணலாம்.

மாதிரி 167

தீர்க்கவும் : $u_{x+2} - 8\,u_{x+1} + 15\,u_x = 0$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டைக் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$E^2 u_x - 8\,E\,u_x + 15\,u_x = 0$$

$$(E^2 - 8\,E + 15)\,u_x = 0.$$

துணைச் சமன்பாடு :

$$f(E) \equiv E^2 - 8E + 15 = 0$$

அதாவது, $(E-5)\,(E-3) = 0$

துணைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் தனித்தனி மெய் மூலங்களாகும். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு :

$$u_x = c_1\,5^x + c_2\,3^x.$$

மாதிரி 168

தீர்க்கவும் : $u_{x+2}-4u_{x+1}+4u_x=0.$

துணைச் சமன்பாடு : $E^2-4E+4=0$

$$(E-2)^2=0$$

$E=2, 2$ (பொருந்தும் மூலங்கள்)

$$\therefore \quad u_x=(c_1+c_2x)\,2^x$$

என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

மாதிரி 169

தீர்க்கவும் : $u_{x+2}+2u_{x+1}+4u_x=0.$

துணைச் சமன்பாடு : $E^2+2E+4=0$

$$E=\frac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}$$

$$=\frac{-2\pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$=-1\pm i\sqrt{3}.=\alpha\pm i\beta.$$

இங்கு, $\alpha=-1$; $\beta=\sqrt{3}.$

$$\therefore\ r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{1+3}=2.$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right)=120^0=\frac{2\pi}{3}.$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வு :

$$u_x=r^x\left[C_1\cos\theta x+C_2\,\text{Sin}\,\theta x\right]$$

$$=2^x\left[C_1\cos\frac{2\pi}{3}x+C_2\,\text{Sin}\frac{2\pi}{3}\,x\right].$$

13·5 சமபடியில்லாத ஒருபடி வேறுபாட்டுச் சமன்பாடுகள் (Non-homogeneous Linear Difference Equations)

சமபடியில்லாத ஒரு n-ஆம் வரிசை (nth order) ஒரு படி வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பு

$u_{x+n}+p_1\,u_{x+n-1}+\cdots\cdots+p_{n-1}\,u_{x+1}+p_n\,u_x=\phi\,(x)$ ஆகும்.

இத்தகைய சமன் பாடுகளைத் தீர்க்க, முதலில் அச்சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்தைப் பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்திக் கிடைக்கப் பெறும்,

$$u_{x+n}+p_1\,u_{x+n-1}+\cdots\cdot+p_{n-1}\,u_{x+1}+p_n\,u_x=0$$

என்ற ஒருபடிச் சமன்பாட்டிற்குரிய தீர்வைக் காண வேண்டும். இவ்வாறு காணப்படும் தீர்வுக்குத் துணைத்தீர்வு (complementary Function) என்று பெயர். பின்னர், கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமபடியில்லாத சமன்பாட்டின் ஒரு சிறப்புத் தீர்வைக் (Particular Integral) காண வேண்டும். இப்பொழுது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு = துணைத் தீர்வு + சிறப்புத் தீர்வு ஆகும்.

சிறப்புத் தீர்வு காணல் :

மாறிலிக் குணகங்களையுடைய சமபடியில்லாத ஒருபடி வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டின் (Non-homogeneous linear difference equations with const. coefficients) பொது அமைப்பு

$$f(E).\ u_x = \phi\ (x)$$

ஆகும். இத்தகைய சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு

$$u_x = \frac{1}{f(E)} \cdot \phi\ (x)$$

ஆகும்.

$\frac{1}{f(E)} \cdot \phi\ (x)$-என்ற சிறப்புத் தீர்வைக் காணும் முறைகள்.

x-இல் m படி பெற்ற ஒரு கோவையை V_x என்று கொள்வோமேயானால்

(i) $\phi\ (x) = x^m$

(ii) $\phi\ (x) = a^x$

(iii) $\phi\ (x) = a^x V_x$

ஆகயிருக்கும் போது கீழ்க்கண்டவாறு சிறப்புத் தீர்வு காணலாம்.

(i) $\phi\ (x) = x^m$, m = 0 அல்லது ஒரு நேர் முழு எண்.

$$u_x = \frac{1}{f(E)} x^m = \frac{1}{f(1+\triangle)} x^m$$

இப்பொழுது, 1 ஆனது $f(E) \equiv f(1+\triangle) = 0$ இன் மூலமாகயில்லாவிடில் $\frac{1}{f(1+\triangle)}$ ஐ $\triangle$-இன் படிகளில் ஏறும் வரிசையில் விரித்தெழுத,

$$\frac{1}{f(1+\triangle)} = (A_0 + A_1\triangle + A_2\triangle^2 + \ldots A_m\triangle^m) + \frac{g(\triangle)\triangle^{m+1}}{f(1+\triangle)},$$

ஆகும். இங்கு $g(\triangle)$ என்பது $\triangle$-இன் படிகளில் ஒரு கோவை யாகும்.

$$\therefore\ 1 \equiv f(1+\triangle)\,(A_0+A_1\triangle+A_2\triangle^2+\ldots+A_m\triangle^m) + g(\triangle)\triangle^{m+1}$$

$$\therefore\ x^m = f(1+\triangle)\,(A_0+A_1\triangle+A_2\triangle^2+\ldots+A_m\triangle^m)\,x^m + g(\triangle)\triangle^{m+1}x^m$$

ஆனல், $\triangle^{m+1}x^m = 0$ ஆகும்.

$$\therefore\ x^m = f(1+\triangle)\,(A_0+A_1\triangle+A_2\triangle^2+\ldots+A_m\triangle^m)\,x^m$$

அல்லது, $\dfrac{x^m}{f(1+\triangle)} = (A_0+A_1\triangle+A_2\triangle^2+\ldots\ldots+A_m\triangle^m)\,x^m.$

அதாவது, $\dfrac{1}{f(E)}\cdot x^m = (A_0+A_1\triangle+A_2\triangle^2+\ldots\ldots+A_m\triangle^m)\,x^m.$

என்பது ஒரு சிறப்புத் தீர்வு ஆகும்.

இப்பொழுது, $f(E)=0$ என்ற சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டின் (characteristic equation) மூலங்களுள் 1 என்ற மூலம் r தடவை மடங்கி வருவதாகக் கொள்வோம். எனவே,

$$f(E) \equiv f_1(E)\,(E-1)^r$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு

$$f_1(E)\,(E-1)^r\,u_x = x^m$$

என்று மாறுகிறது. இங்கு $f_1(E)$ என்பது E-இல் $(n-r)$ படி பெற்ற ஒரு கோவையாகும்.

இப்பொழுது, $(E-1)^r u_x = \triangle^r u_x = v_x$ எனக் கொள்க. ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு

$$f_1(E)\,.\,v_x = x^m$$

என்று மாறுகிறது.

$$\therefore\quad v_x = \frac{x^m}{f_1(E)}$$
$$= (B_0+B_1\triangle+B_2\triangle^2+\ldots+B_m\triangle^m)\,x^m$$

என்று காணலாம். இது x-இல் m படி பெற்ற கோவையாகும். ஆகவே, இக்கோவையை

$$b_0\,x\,c_m + b_1\,x\,c_{m-1} + b_2\,x\,c_{m-2} + \ldots + b_m\,x\,c_0$$

என்று எழுதலாம். அதாவது,

$$v_x = b_0\,x\,c_m + b_1\,x\,c_{m-1} + b_2\,x\,c_{m-2} + \ldots + b_m\,x\,c_0.$$

$$\therefore\ \triangle^r u_x = v_x = b_0 \times c_m + b_1 \times c_{m-1} + b_2 \times c_{m-2} + \dots + b_m \times c_0.$$

$$\therefore\ u_x = \frac{1}{\triangle^r}\left[b_0 \times c_m + b_1 \times c_{m-1} + b_2 \times c_{m-2} + \dots + b_m \times c_0\right]$$

$$= b_0 \times c_{m+r} + b_1 \times c_{m+r-1} + \dots\dots + b_{m-1} \times c_{r+1} + b_m \times c_r$$

இதுவே, வேண்டிய சிறப்புத் தீர்வு ஆகும்.

(ii) $\phi(x) = a^x$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு :

$$f(E).u_x = a^x$$

$$\therefore\quad u_x = \frac{a^x}{f(E)}$$

$f(E) = 0$ என்ற சிறப்பியல்பு சமன்பாட்டின் n மூலங்களுள் a என்பது r தடவை மடங்கி வரும் மூலம் எனக் கொள்க.

$$\therefore\quad f(E) \equiv f_1(E)\ (E-a)^r \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $f_1(E)$ என்பது E-இல் $(n-r)$ படி பெற்ற கோவையாகும்.

ஆனால், $E = a$ என்பது $f(E) = 0$ இன் ஒரு மூலமானால், $E = a$ என்பது $f(aE) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கும் ஒரு மூலமாகும்.

ஆகவே, $f(aE) \equiv f_1(aE)\ (Ea-a)^r$ ஆகும்.

இப்பொழுது, $u_x = a^x v_x$ என்று எழுதினால்,

$$f(E)\ u_x = a_x$$

என்ற சமன்பாடு

$$f_1(E)\ (E-a)^r\ a^x\ v_x = a^x$$

என்று மாறுகிறது. அதாவது,

$$f_1(aE)\ (aE-a)^r\ a^x\ v_x = a^x$$

என்று மாறும்.

அதாவது, $f_1(aE)\ [a(E-1)]^r\ a^x\ v_x = a^x$

$$f_1(aE)\ a^r\ (E-1)^r\ a^x\ v_x = a^x$$

$$f_1(aE)\ a^r\ \triangle^r\ a^x\ v_x = a^x$$

அல்லது, $a^r\ \triangle^r\ v_x = \dfrac{1}{f_1(aE)} = \dfrac{1}{f_1(a+a\triangle)} = \dfrac{1}{f_1(a)}$ ஆகும்.

ஆனால் a என்பது $f(E) = 0$ இன் r தடவை மடங்கி வரும் மூலமாகையால்,

$$f(E) = (E-a)^r\ f_1(E).$$

இங்கு, $f_1(E) = \frac{f^{(r)}(E)}{r!}$

$$\therefore \quad f_1(a) = \frac{f^{(r)}(a)}{r!}$$

$$\therefore \quad a^r \triangle^r v_x = \frac{1}{f_1(a)} = \frac{r!}{f^{(r)}(a)}$$

$$\therefore \quad \triangle^r v_x = \frac{a^{-r} r!}{f^{(r)}(a)}$$

$$= \frac{a^{-r} r!}{f^{(r)}(a)} \cdot x c_0.$$

$$\therefore \quad v_x = \frac{1}{\triangle^r}\left[\frac{a^{-r} r!}{f^{(r)}(a)} \cdot x c_0\right]$$

$$= x c_r \cdot \frac{a^{-r} r!}{f^{(r)}(a)}$$

ஆகவே, $u_x = a^x v_x = x c_r \frac{a^{-r} \cdot a^x r!}{f^{(r)}(a)}$ என்பது சிறப்புத் தீர்வு ஆகும்.

(iii) $\phi(x) = a^x V_x$.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு $f(E) u_x = a^x V_x$ ஆகும்.

அதாவது, $u_x = a^x v_x$ என்று எழுதலாம்.

இப்பொழுது, $u_x = a^x v_x$ என்று எழுதவும்.

$$\therefore \quad f(aE) a^x v_x = a^x V_x$$

$$\therefore \quad f(aE) v_x = V_x$$

இச்சமன்பாட்டின் சிறப்புத்தீர்வை, வகை (i) இல் விளக்கப் பட்டுள்ள முறையில் காணலாம்.

மாதிரி 170

தீர்க்கவும் : $u_{x+2} - 9 u_x = 16 x^2$

துணைச்சமன்பாடு : $E^2 - 9 = 0$

$\therefore \quad E = \pm 3.$

$\therefore$ துணைத்தீர்வு : $\overline{u_x} = c_1 3^x + c_2 (-3)^x$

சிறப்புத் தீர்வு $=\frac{1}{E^2-9}\cdot 16x^2$

$$=\frac{1}{(1+\triangle)^2-9}\cdot 16x^2$$

$$=\frac{1}{1+2\triangle+\triangle^2-9}\cdot 16x^2$$

$$=\frac{1}{-8+2\triangle+\triangle^2}\cdot 16x^2$$

$$=\frac{1}{-8\left(1-\frac{2\triangle+\triangle^2}{8}\right)}\cdot 16x^2$$

$$=-2\left[1-\left(\frac{2\triangle+\triangle^2}{8}\right)\right]^{-1} x^2$$

$$=-2\left[1+\left(\frac{2\triangle+\triangle^2}{8}\right)+\frac{(2\triangle+\triangle^2)^2}{64}+\ldots\right] x^2$$

$$=-2\left[1+\frac{2\triangle+\triangle^2}{8}+\frac{4\triangle^2}{64}+\ldots\ldots\right] x^2$$

$$=-2\left[1+\frac{1}{4}\triangle+\frac{1}{8}\triangle^2+\frac{1}{16}\triangle^2+\ldots\ldots\right] x^2$$

$$=-2\left[1+\frac{1}{4}\triangle+\frac{3\triangle^2}{16}+\ldots\ldots\right] x^2$$

$$=-2\left[1+\frac{1}{4}\triangle+\frac{3\triangle^2}{16}+\ldots\ldots\right][x(x-1)+x]$$

$$=-2\left[1+\frac{1}{4}\triangle+\frac{3}{16}\triangle^2+\ldots\ldots\right][x^{(2)}+x^{(1)}]$$

$$=-2\left[1\cdot x^{(2)}+\frac{1}{4}\cdot 2\,x^{(1)}+\frac{3}{16}\cdot 2+x^{(1)}+\frac{1}{4}\right]$$

$$=-2\left[x(x-1)+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}+x+\frac{1}{4}\right]$$

$$=-2\left[x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{8}\right]$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு:

$u_x=$ துணைத்தீர்வு $+$ சிறப்புத்தீர்வு

$$=c_1\cdot 3^x+c_2(-3)^x-2x^2-x-\frac{5}{4}\cdot$$

மாதிரி 171

தீர்க்கவும்: $u_{x+4} - 5u_{x+3} + 9u_{x+2} - 7u_{x+1} + 2u_x = x^3 + 1.$

துணைச் சமன்பாடு: $E^4 - 5E^3 + 9E^2 - 7E + 2 = 0$

$$(E-1)^3(E-2) = 0$$

துணைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள்: $E = 1, 1, 1, 2.$

ஆகவே, துணைத்தீர்வு: $u_x = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)\, 1^x + c_4 \cdot 2^x.$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு:

$$(E-1)^3(E-2)\, u_x = x^3 + 1$$

$E = 1 + \triangle$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\triangle^3(\triangle - 1)\, u_x = x^3 + 1$$

இப்பொழுது, $\triangle^3 u_x = v_x$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad (\triangle - 1)\, v_x = x^3 + 1$$

$$\therefore \quad v_x = \frac{x^3+1}{\triangle - 1}$$

$$= -\frac{x^3+1}{1-\triangle}$$

$$= -(1-\triangle)^{-1}(x^3+1)$$

$$= -(1 + \triangle + \triangle^2 + \triangle^3 + \ldots\ldots)(x^3+1)$$

ஆனால், $x^3 + 1 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x + 1$

$$= x^{(3)} + 3x^{(2)} + x^{(1)} + 1$$

$$\therefore \quad v_x = -(1 + \triangle + \triangle^2 + \triangle^3 + \ldots\ldots)[x^{(3)} + 3x^{(2)} + x^{(1)} + 1]$$

$$= -[x^{(3)} + 3x^{(2)} + x^{(1)} + 1 + 3x^{(2)} + 6x^{(1)} + 1 + 6x^{(1)} + 6 + 6]$$

$$= -[x^{(3)} + 6x^{(2)} + 13x^{(1)} + 14]$$

அதாவது, $\triangle^3 u_x = v_x = -[x^{(3)} + 6x^{(2)} + 13x^{(1)} + 14]$

$$= -[x(x-1)(x-2) + 6x(x-1) + 13x + 14]$$

$$= -\left[6\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + 12\frac{x(x-1)}{1\cdot 2} 13x + 14\right]$$

$$= -[6\, x c_3 + 12\, x c_2 + 13\, x c_1 + 14\, x c_0]$$

$\therefore$ சிறப்புத் தீர்வு:

$$u_x = -\frac{1}{\triangle^3}[6\, x c_3 + 12\, x c_2 + 13\, x c_1 + 14\, cx_0]$$

$$= -[6\, x c_6 + 12\, x c_5 + 13\, x c_4 + 14\, x c_3]$$

ஆகவே, சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு = துணைத்தீர்வு + சிறப்புத் தீர்வு.

அதாவது, $u_x = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) 1^x + c_4 2^x$
$- (6 x c_6 + 12 x c_5 + 13 x c_4 + 14 x c_3)$

அதாவது, $u_x = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 2^x$
$- (6 x c_6 + 12 x c_5 + 13 x c_4 + 14 x c_3)$

மாதிரி 172

தீர்க்கவும்: $u_{x+2} - 4u_x = 5 \cdot 3^x$

துணைச் சமன்பாடு: $E^2 - 4 = 0$

$\therefore \quad E = \pm 2$

துணைத்தீர்வு: $u_x = c_1 2^x + c_2 (-2)^x$

சிறப்புத்தீர்வு காண, $u_x = A \cdot 3^x$ என்று பிரதியிடவும்.

$\therefore \quad u_{x+1} = A \cdot 3^{x+1}$

$u_{x+2} = A \cdot 3^{x+2}$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டில் இவற்றைப் பிரதியிட,

$A \cdot 3^{x+2} - 4 A \cdot 3^x = 5 \cdot 3^x$

$A \cdot 3^x (9 - 4) = 5 \cdot 3^x$

$A \cdot 3^x \cdot 5 = 5 \cdot 3^x$

$\therefore \quad A = 1$

$\therefore$ சிறப்புத்தீர்வு: $u_x = 3^x$.

$\therefore$ பொதுத்தீர்வு = துணைத்தீர்வு + சிறப்புத்தீர்வு.

அதாவது, $u_x = c_1 \cdot 2^x + c_2 (-2)^x + 3^x$.

மாதிரி 173

தீர்க்கவும்: $u_{x+2} - 7 u_{x+1} + 10 u_x = 12 \cdot 5^x$.

துணைச் சமன்பாடு: $E^2 - 7 E + 10 = 0$

$(E - 2)(E - 5) = 0$

$\therefore \quad E = 2, E = 5.$

$\therefore$ துணைத் தீர்வு: $u_x = c_1 \cdot 2^x + c_2 \cdot 5^x$.

சிறப்புத் தீர்வு காண $u_x = A \cdot 5^x$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore \quad A\cdot 5^{x+2} - 7\cdot A\cdot 5^{x+1} + 10\cdot A\cdot 5^{x} = 12\cdot 5^{x}$$

$$A\cdot 5^{x}\,(5^{2} - 7\cdot 5 + 10) = 12\cdot 5^{x}$$

$$A\cdot 5^{x}\,(25 - 35 + 10) = 12\cdot 5^{x}$$

$$A\cdot 5^{x}\,(0) \quad = 12\cdot 5^{x}$$

ஆகவே, இதன் மூலம் A-யின் மதிப்பைப் பெறமுடியாது.

எனவே, $u_x = A\,(x\ 5^{x})$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore \quad A\,(x+2)\,5^{x+2} - 7\,A\,(x+1)\,5^{x+1} + 10\,A\,x\,5^{x} = 12\cdot 5^{x}$$

$$A\cdot 5^{x}\,[25\,(x+2) - 35\,(x+1) + 10x] = 12\cdot 5^{x}$$

$$A\cdot 5^{x}\,[50 - 35] = 12\cdot 5^{x}$$

$$A\cdot 5^{x}\cdot 15 \quad = 12\cdot 5^{x}$$

$$\therefore \quad A = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$\therefore$ சிறப்புத் தீர்வு: $u_x = \frac{4}{5}\,x\,5^{x}$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு = துணைத் தீர்வு + சிறப்புத் தீர்வு

$$u_x = C_1\,2^{x} + C_2\,5^{x} + \frac{4}{5}x\,5^{x}$$

அதாவது, $u_x = C_1\,2^{x} + C_2\,5^{x} + 4\,x\,5^{x-1}$

13.6 மாறிலிக் குணகங்களையுடைய சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் (Homogeneous Linear Equations with constant coefficients)

$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ என்ற மாறிலிகளைக் குணகங்களாகப் பெற்ற கீழ்க்கண்ட சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டைக் கருதுக.

$$u_{x+n} + A_1\,u_{x+n-1} + A_2\,u_{x+n-2} + \ldots\ldots + A_n\,u_x = 0 \ \ldots\ldots \ (1)$$

$$u_x = a^{x}\,V_x$$

என்ற பிரதியீட்டில் V_x என்பது x-இல் m படி பெற்ற ஒரு கோவையெனக் கொள்க.

$$\therefore \quad u_{x+1} = a^{x+1}\,V_{x+1}$$

ஆனால், $\triangle V_x = V_{x+1} - V_x$

$$\therefore \quad V_{x+1} = V_x + \triangle V_x$$

$$\therefore \quad u_{x+1} = a^{x+1} (V_x + \triangle V_x)$$

$$u_{x+2} = a^{x+2} V_{x+2}$$
$$= a^{x+2} (V_{x+1} + \triangle V_{x+1})$$
$$= a^{x+2} [V_x + \triangle V_x + \triangle (V_x + \triangle V_x)]$$
$$= a^{x+2} [V_x + 2 \triangle V_x + \triangle^2 V_x]$$

$$u_{x+3} = a^{x+3} V_{x+3}$$
$$= a^{x+3} [V_{x+2} + \triangle V_{x+2}]$$
$$= a^{x+3} [V_x + 2 \triangle V_x + \triangle^2 V_x + \triangle (V_x + 2 \triangle V_x + \triangle^2 V_x)]$$
$$= a^{x+3} [V_x + 2 \triangle V_x + \triangle^2 V_x + \triangle V_x + 2 \triangle^2 V_x + \triangle^3 V_x]$$
$$= a^{x+3} [V_x + 3 \triangle V_x + 3 \triangle^2 V_x + \triangle^3 V_x]$$
$$= a^{x+3} [V_x + 3 C_1 \triangle V_x + 3 C_2 \triangle^2 V_x + \triangle^3 V_x]$$

....

....

$$u_{x+n-1} = a^{x+n-1} [V_x + {}^{n-1}C_1 \triangle V_x + {}^{n-1}C_2 \triangle^2 V_x + \ldots + \triangle^{n-1} V_x]$$
$$u_{x+n} = a^{x+n} [V_x + {}^nC_1 \triangle V_x + {}^nC_2 \triangle^2 V_x + \ldots + \triangle^n V_x]$$

இம் மதிப்புக்களைச் சமன்பாடு (1) இல் பிரதியிடவும்.

$$\begin{aligned}\therefore \quad & a^{x+n} [V_x + {}^nC_1 \triangle V_x + {}^nC_2 \triangle^2 V_x + \ldots\ldots + \triangle^n V_x] \\ & + A_1 a^{x+n-1} [V_x + {}^{n-1}C_1 \triangle V_x + {}^{n-1}C_2 \triangle^2 V_x + \ldots + \triangle^{n-1} V_x] \\ & + A_2 a^{x+n-2} [V_x + {}^{n-2}C_1 \triangle V_x + {}^{n-2}C_2 \triangle^2 V_x + \ldots + \triangle^{n-2} V_x] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A_{n-1} a^{x+1} (V_x + \triangle V_x) \\ & + A_n a^x V_x = 0\end{aligned}$$

அதாவது,

$$\begin{aligned} & a^x V_x [a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \ldots\ldots + A_n] \\ & + a^{x+1} \triangle V_x [a^{n-1} \cdot {}^nC_1 + A_1 a^{n-2} \cdot {}^{n-1}C_1 + A_2 a^{n-3} \cdot {}^{n-2}C_1 \\ & \qquad + \ldots + A_{n-1}] \\ & + a_x{}^{+2} \triangle^2 V_x [a^{n-2} \cdot {}^nC_2 + A_1 \cdot a^{n-3} \cdot {}^{n-1}C_2 + A_2 a^{n-4} \, {}^{n-2}C_2 \\ & \qquad + \ldots + A_{n-2}] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a^{x+n} \triangle^n V_x = 0.\end{aligned}$$

அதாவது,

$$a^x [a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \ldots\ldots + A_n] V_x$$
$$+ a^{x+1} [a^{n-1} + (n-1) A_1 a^{n-2} + (n-2) A_2 a^{n-3} + \ldots\ldots + A_{n-1}] \triangle V_x$$
$$+ a^{x+2} [n(n-1) a^{n-2} + (n-1)(n-2) A_1 a^{n-3} + \ldots\ldots + 2!\, A_{n-2}] \frac{\triangle^2 V_x}{2!}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots + a^{x+n}\cdot n! \frac{\triangle^n V_x}{n!} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ஆனால், கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் துணைச் சார்பு

$$f(E) \equiv E^n + A_1 E^{n-1} + A_2 E^{n-2} + \ldots\ldots + A_n$$ ஆகும்.

இத்துணைச் சார்பை

$$f(a) \equiv a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \ldots\ldots + A_n$$

என்றும் எழுதலாம்.

$$\therefore \quad f'(a) = n a^{n-1} + (n-1) A_1 a^{n-2} + (n-2) A_2 a^{n-3} + \ldots\ldots + A_{n-1}$$
$$f''(a) = n(n-1) a^{n-2} + (n-1)(n-2) A_1 a^{n-3} + \ldots\ldots + 2!\, A_{n-2}$$

....

ஆகவே, சமன்பாடு (2) ஐக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$a^x f(a) V_x + a^{x+1} f'(a) \triangle V_x + a^{x+2} f''(a) \frac{\triangle^2 V_x}{2!}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots + a^{x+n} f^{(n)}(a) \frac{\triangle^n V_x}{n!} = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

$a = a_1$ என்பது $f(a) = 0$ என்ற துணைச் சமன்பாட்டின் தனி மூலமாகவும், $V_x = 1$ எனவும் இருப்பின், $a = a_1$ என்ற மதிப்பு சமன்பாடு (3) ஐச் சமன்படுத்துமாகையால் a_1^x என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு (1) இன் ஒரு சிறப்புத் தீர்வு ஆகும். இதுபோல், $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ என்பன $f(a) = 0$ இன் n தனி மூலங்களாயின், சமன்பாடு (1) சிறப்புத் தீர்வுகள்

$$a_1^x, a_2^x, a_3^x, \ldots\ldots\ldots, a_n^x$$ ஆகும்.

ஆகவே, சமன்பாடு (1) இன் பொதுத் தீர்வு

$$u_x = c_1 a_1^x + c_2 a_2^x + c_3 a_3^x + \ldots\ldots + c_n a_n^x$$ ஆகும்.

ஆனால், a_1 என்ற மூலம் k தடவை மடங்கி வருவதாகக் கொள்வோம். அதாவது,

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\ldots, a_n$$

என்பன $f(a)=0$ இன் மூலங்களாயின், $a_1=a_2=\ldots=a_k$ என்ற k சம மூலங்களுக்குரிய சிறப்புத் தீர்வு

$$u_x=(c_1+c_2x+c_3x^2+\ldots+c_k\,x^{k-1})\,a_1^{\,x} \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, சமன்பாடு (1) இன் பொதுத் தீர்வு.

$$u_x=(c_1+c_2x+c_3x^2+\ldots+c_k\,x^{k-1})+c_{k+1}\,a_{k+1}^{\,x}+\ldots+c_n\,a_n^{\,x}.$$

13·7 மாறும் குணகங்களைக் கொண்ட ஒருபடி வேறுபாட்டுச் சமன்பாடுகள் (Linear d.fference equations with variable coefficients)

$u(x+1)-\phi(x)\,u(x)=f(x)\ \ldots\ \ldots\ (1)$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதவும்.

$u(x)=u_1(x)\,v(x)$ என்று பிரதியிடவும்.

$\therefore\ u(x+1)=u_1(x+1)\,v(x+1)$

$\therefore$ சமன்பாடு (1) இலிருந்து,

$$u_1(x+1)\,v(x+1)-\phi(x)\,u_1(x)\,v(x)=f(x)\ \ldots\ \ldots\ (2)$$

சமன்பாடு (1) இன் துணைச் சார்பு.

$u(x+1)-\phi(x)\,u(x)=0$ ஆகும்.

$\therefore\ u_1(x+1)-\phi(x)\,u_1(x)=0$

$\therefore\ \phi(x)\,u_1(x)=u_1(x+1)$

ஆகவே சமன்பாடு (2) இலிருந்து,

$$u_1(x+1)\,v(x+1)-u_1(x+1)\,v(x)=f(x)$$

அதாவது, $u_1(x+1)\,[v(x+1)-v(x)]=f(x)$

$$u_1(x+1)\,\Delta\,v(x)=f(x)$$

$$\therefore\ \Delta\,v(x)=\frac{f(x)}{u_1(x+1)}$$

$$\therefore\ v(x)=\Delta^{-1}\left[\frac{f(x)}{u_1(x+1)}\right]\ \ldots\ \ldots\ (3)$$

மேலும், $u_1(x+1)=\phi(x)\,u_1(x)$

$$\therefore\ \frac{u_1(x+1)}{u_1(x)}=\phi(x)$$

$$\therefore\ \log u_1(x+1)-\log u_1(x)=\log\phi(x)$$

அதாவது, $\Delta\,[\log u_1(x)]=\log\phi(x)$

$$\therefore\ \log u_1(x)=\Delta^{-1}\log\phi(x)$$

$$\therefore\ u_1(x)=c(x)\cdot e^{\Delta^{-1}\log\phi(x)}\ \ldots\ \ldots\ (4)$$

சமன்பாடுகள் (3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து மதிப்புக்களை $u(x)=u_1(x)\, v(x)$ என்ற சமன்பாட்டில் பிரதியிட, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு (1) இன் முழுத் தீர்வு

$$u(x)=c(x)\triangle^{-1}\left[\frac{f(x)}{u_1(x+1)}\right]e^{\triangle^{-1}\log\phi(x)}$$ என்று கிடைக்கும்.

மாதிரி 174

தீர்க்கவும் : $u(x+1)-e^{2x-1}u(x)=5x\, e^{x^2}$

$u(x)=u_1(x)\, v(x)$ எனக் கொள்க.

துணைச் சமன்பாடு : $u(x+1)-e^{2x-1}u(x)=0$

$$\therefore\quad u_1(x+1)=e^{2x-1}u_1(x)$$

$$\therefore\quad \log u_1(x+1)=(2x-1)+\log u_1(x)$$

அல்லது, $\log u_1(x+1)-\log u_1(x)=2x-1$

$$\triangle[\log u_1(x)]=(2x-1)$$

$$\therefore\quad u_1(x)=c(x)\, e^{\triangle^{-1}(2x-1)}$$

$$=c(x)\, e^{(x-1)^2}$$

இப்பொழுது, $u(x)=u_1(x)\, v(x)$

$\therefore\quad u(x)=e^{(x-1)^2}\, v(x)$. என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

$$u(x+1)=e^{x^2}\, v(x+1).$$

$$\therefore\quad e^{x^2}v(x+1)-e^{2x-1}\cdot e^{(x-1)^2}\cdot v(x)=5x\, e^{x^2}$$

$$e^{x^2}v(x+1)-e^{2x-1}\cdot e^{x^2-2x+1}\cdot v(x)=5xe^{x^2}$$

$$\therefore\quad e^{x^2}v(x+1)-e^{x^2}v(x)=5x\, e^{x^2}$$

$$\therefore\quad v(x+1)-v(x)=5x$$

$$\triangle v(x)=5x$$

$$v(x)=\triangle^{-1}5x$$

$$=\tfrac{5}{2}x^{(2)}$$

$$=\tfrac{5}{2}x(x-1)$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு:

$$u(x)=u_1(x)\, v(x)$$

$$=c(x)\, e^{(x-1)^2}\cdot\tfrac{5}{2}x(x-1).$$

மாதிரி 175

தீர்க்கவும் : $u_{x+1}-a\, u_x=(2x+1)\, a^x$ (டெல்லி எம்.ஏ. '66)

$u^{(x)}=u_1(x)\, v(x)$ என்று கொள்க.

துணைச் சமன்பாடு :

$$u_{x+1} - a\,u_x = 0$$

அதாவது $E - a = 0$

$$\therefore\ E = a.$$

$\therefore$ துணைத் தீர்வு : $u_1(x) = a^x$.

இப்பொழுது, $u_x = a^x\,v(x)$ என்று பிரதியிடுக.

$$\therefore\ u_{x+1} = a^{x+1}\,v(x+1)$$

$$\therefore\ a^{x+1}\,v(x+1) - a \cdot a^x\,v(x) = (2x+1)\,a^x$$

அதாவது, $a^{x+1}\,[v(x+1) - v(x)] = (2x+)\,a^x$

$$\therefore\ a \cdot \triangle v(x) = (2x+1)$$

$$\therefore\ \triangle v(x) = \frac{2x+1}{a}$$

$$\therefore\ v(x) = \triangle^{-1}\left[\frac{2x+1}{a}\right]$$

$$= \frac{x^{(2)} + x^{(1)} + c}{a}$$

$$= \frac{x(x-1) + x + c}{a}$$

$$= \frac{x^2 + c}{a}$$

ஆகவே, சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு :

$$u_x = u_1(x)\,v(x)$$

$$= a^x \frac{x^2 + c}{a}$$

$$= a^{x-1}\,(x^2 + c)$$

பயிற்சி 27

பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்

1. $u_{x+1} - \frac{1}{x} u_x = 0,\ x > 0$
2. $u_{x+2} - 4\,u_x = 0$
3. $16\,u_{x+2} - 8\,u_{x+1} + u_x = 0$
4. $u_{x+2} - 7\,u_{x+1} + 10 u_x = 12 \cdot 4x$
5. $u_{x+1} - 2\,u_x = 2\,x$
6. $3\,u_{x+1} - u_x = x$
7. $(x+1)\,u_{x+1} - x\,u_x = 0$
8. $u_{x+2} - 5\,u_{x+1} + 6\,u_x = 5^x$
9. $u_{x+2} - 3\,u_{x+1} - 4\,u_x = 3^x$
10. $u_{x+1} - e^{2x}\,u_x = 3x^2\,e^{x^2 + x + \frac{1}{2}}$

14. இசைப் பகுப்பாய்வு
(Harmonic Analysis)

14.1 திரும்புச் சார்பு (Periodic Function)

$$f(x)=a \sin x+b \cos x$$

என்ற சார்பினைக் கருதுக. இச்சார்பில் x-ஐ $(x+2\pi)$ என்று மாற்றுக.

$$\therefore\ f(x+2\pi)=a \sin (x+2\pi)+b \cos (x+2\pi)$$
$$=a \sin x+b \cos x$$
$$=f(x)$$

அதாவது, $f(x+2\pi)=f(x)$ என்று காண்கிறோம். இதுபோல்

$$f(x)=f(x+2\pi)=f(x+4\pi)=f(x+6\pi)=\ldots\ldots\ldots$$

என்று காணலாம் இத்தகைய சார்பு, 2π-ஐக் கால வட்டமாகக் (period) கொண்ட ஒரு திரும்புச் சார்பு எனப்படுகிறது. 2π கால வட்டமாகக் கொண்ட ஒரு திரும்புச் சார்பின் பெ அமைப்பைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$y=a_0+a_1 \cos x+a_2 \cos 2x+\ldots\ldots+a_n \cos nx$$
$$+b_1 \sin x+b_2 \sin 2x+\ldots\ldots+b_n \sin nx$$

இச் சார்பில் x என்பது சாராமாறி (independent variable) ஆ இச் சாராமாறியின் சில சம இடைவெளி மதிப்புக்களுக்கு சார்பலன்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், இச் சார்பிலுள்ள a_0, a_1 ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n என்ற மாறிலிகளின் மதிப்புக்களைக் க கிடலாம். சாராமாறியாகிய x-இன் ஏதாவது ஒரு குறிப்பி மதிப்புக்குரிய சார்பலனாகிய $y=f(x)$ என்பது நிலைத்தூ (ordinate) எனப்படும். இத்தகைய 12 நிலைத்தூரங்களைக் கொ ஒரு திரும்புச் சார்பின் மாறிலிகளின் மதிப்புக்களைப் பெறும் முறைய இங்கு ஆராய்வோம்,

14.2 12 சம இடைவெளி நிலைத்தூரங்களைக் கொண்ட திரும்புச் சார்பு (Periodic Function with 12 equally-spaced Ordinates)

கால வட்டம் 2π கொண்ட $y=f(x)$ என்ற திரும்புச் சார்பின் சாராமாறியாகிய x-இன் 12 சம இடைவெளி மதிப்புக்களுக்குரிய சார்பலன்கள் (நிலைத்தூரங்கள்) கொடுக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். ஆகவே, $y=f(x)$ஐக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$y=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+a_4\cos 4x+a_5\cos 5x+a_6\cos 6x$$
$$+b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+b_4\sin 4x+b_5\sin 5x \quad \ldots(1)$$

x-இன் 12 மதிப்புக்களும், அவற்றிற்குரிய y-இன் 12 மதிப்புக்களும் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம்.

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
y	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}

இம்மதிப்புக்களை சமன்பாடு (1)இல் ஒவ்வொன்றாகப் பிரதியிடுக.

$$y_0=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$$
$$y_1=a_0+\frac{\sqrt{3}}{2}a_1+\tfrac{1}{2}a_2-\tfrac{1}{2}a_4-\frac{\sqrt{3}}{2}a_5-a_6$$
$$+\tfrac{1}{2}b_1+\frac{\sqrt{3}}{2}b_2+b_3+\frac{\sqrt{3}}{2}b_4+\tfrac{1}{2}b_5$$
$$y_2=a_0+\tfrac{1}{2}a_1-\tfrac{1}{2}a_2-a_3-\tfrac{1}{2}a_4+\tfrac{1}{2}a_5+a_6$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_1+\frac{\sqrt{3}}{2}b_2-\frac{\sqrt{3}}{2}b_4-\frac{\sqrt{3}}{2}b_5$$
$$y_3=a_0-a_2+a_4-a_6+b_1-b_3+b_5$$
$$y_4=a_0-\tfrac{1}{2}a_1-\tfrac{1}{2}a_2+a_3-\tfrac{1}{2}a_4-\tfrac{1}{2}a_5+a_6$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_1-\frac{\sqrt{3}}{2}b_2+\frac{\sqrt{3}}{2}b_4-\frac{\sqrt{3}}{2}b_5$$
$$y_6=a_0-\frac{\sqrt{3}}{2}a_1+\tfrac{1}{2}a_2-\tfrac{1}{2}a_4+\frac{\sqrt{3}}{2}a_5-a_6$$
$$+\tfrac{1}{2}b_1-\frac{\sqrt{3}}{2}b_2+b_3-\frac{\sqrt{3}}{2}b_4+\tfrac{1}{2}b_5$$
$$y_6=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6$$

$$y_7 = a_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2 - \frac{1}{2} a_4 + \frac{\sqrt{3}}{2} a_5 - a_6$$
$$- \frac{1}{2} b_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_2 - b_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_4 - \frac{1}{2} b_5$$

$$y_8 = a_0 - \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_2 + a_3 - \frac{1}{2} a_4 - \frac{1}{2} a_5 + a_6$$
$$- \frac{\sqrt{3}}{2} b_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_4 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_5$$

$$y_9 = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 - b_1 + b_3 - b_5$$

$$y_{10} = a_0 + \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_2 - a_3 - \frac{1}{2} a_4 + \frac{1}{2} a_5 + a_6$$
$$- \frac{\sqrt{3}}{2} b_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_4 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_5$$

$$y_{11} = a_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2 - \frac{1}{2} a_4 + \frac{\sqrt{3}}{2} a_5 - a_6$$
$$- \frac{1}{2} b_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_2 - b_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_4 - \frac{1}{2} b_5$$

மேற்கண்ட 12 சமன்பாடுகளையும் தீர்த்து மாறிலிகளின் மதிப்புக்களைப் பெறலாம். மீச்சிறுபடித் தத்துவத்தைப் (Principle of Least Squares) பயன்படுத்தி மேற்கண்ட சமன்பாடுகளின் மீச்சிறு படி வழிச் சமன்பாடுகளை (Normal Equations) அமைத்து அவற்றி லிருந்து மாறிலிகளின் மதிப்புக்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு கண்டறியலாம்.

a_0 ஐக் காணப் பயன்படும் மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாட்டைக் காண, மேற்கண்ட சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றையும் அச் சமன் பாட்டிலுள்ள a_0 இன் குணகத்தால் பெருக்கிக் கூட்ட வேண்டும். அவ்வாறு பெருக்கிக் கூட்டும்போது வலப்பக்கத்தில் a_0 உறுப்பைத் தவிர மற்ற உறுப்புக்கள் யாவும் மறைந்துவிடுவதைக் காணலாம். இங்கு எல்லாச் சமன்பாடுகளிலும் a_0 இன் குணகம் 1 தான். ஆகவே, ஒவ்வொரு சமன்பாட்டையும் 1 ஆல் பெருக்கிக் கூட்டவும்.

$$\therefore\ 12\,a_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11}$$

இதுபோல், ஒவ்வொரு சமன்பாட்டையும் அதிலுள்ள a_1 இன் குணகத்தால் பெருக்கிக் கூட்டவும்.

$$\therefore\ 6\,a_1 = y_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{2} y_4 - \frac{\sqrt{3}}{2} y_5 - y_6 - \frac{\sqrt{3}}{2} y_7 - \frac{1}{2} y_8$$
$$+ \frac{1}{2} y_{10} + \frac{\sqrt{3}}{2} y_{11}$$

இதுபோல் எல்லா மாறிகளுக்கும் இம்முறையைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாடுகளைப் பெறவும்.

$$6\,a_2 = y_0 + \tfrac{1}{2}\,y_1 - \tfrac{1}{2}\,y_2 - y_3 - \tfrac{1}{2}\,y_4 + \tfrac{1}{2}\,y_5 + y_6 + \tfrac{1}{2}\,y_7 - \tfrac{1}{2}\,y_8 - y_9 - \tfrac{1}{2}\,y_{10} + \tfrac{1}{2}\,y_{11}$$

$$6\,a_3 = y_0 - y_2 + y_4 - y_6 + y_8 - y_{10}$$

$$6\,a_4 = y_0 - \tfrac{1}{2}\,y_1 - \tfrac{1}{2}\,y_2 + y_3 - \tfrac{1}{2}\,y_4 - \tfrac{1}{2}\,y_5 + y_6 - \tfrac{1}{2}\,y_7 - \tfrac{1}{2}\,y_8 + y_9 - \tfrac{1}{2}\,y_{10} - \tfrac{1}{2}\,y_{11}$$

$$6\,a_5 = y_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,y_1 + \tfrac{1}{2}\,y_2 - \tfrac{1}{2}\,y_4 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,y_5 - y_6 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,y_7 - \tfrac{1}{2}\,y_8 + y_9 - \tfrac{1}{2}\,y_{10} - \tfrac{1}{2}\,y_{11}$$

$$12\,a_6 = y_0 - y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 - y_7 + y_8 - y_9 - y_{10} - y_{11}$$

$$6\,b_1 = \tfrac{1}{2}\,y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,y_2 + y_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,y_4 + \tfrac{1}{2}\,y_5 - \tfrac{1}{2}\,y_7 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,y_8 - y_9 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,y_{10} - \tfrac{1}{2}\,y_{11}$$

$$6\,b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(y_1 + y_2 - y_4 - y_5 + y_7 + y_8 - y_{10} - y_{11})$$

$$6\,b_3 = y_1 - y_3 + y_5 - y_7 + y_9 - y_{11}$$

$$6\,b_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(y_1 - y_2 + y_4 - y_5 + y_7 - y_8 + y_{10} - y_{11})$$

$$6\,b_5 = \frac{1}{2}\,y_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,y_2 + y_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,y_4 + \frac{1}{2}\,y_5 - \frac{1}{2}\,y_7 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,y_8 - y_9 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,y_{10} - \frac{1}{2}\,y_{11}$$

மேற்கண்ட 12 சமன்பாடுகளையும் தீர்த்து மாறிலிகளின் மதிப்புக் களைப் பெற முடியும். ஆனால், இச்சமன்பாடுகளை நேரடியாகத் தீர்ப்பது மிகவும் கடினமாக யிருக்குமாதலால், கீழ்க்காணும் மாற்று முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்கலாம்.

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளின் வலப்பக்கங்களிலுள்ள உறுப்புக் களைக் கீழ்க்கண்டவாறு தொகுப்புக்களாக (groups) எழுதி, அத் தொகுப்புக்களை வேறு மாறிகளால் குறிப்பிட்டு, சமன்பாடுகளைப் புதிய மாறிகளைக் கொண்டமைந்த சமன்பாடுகளாக மாற்றி எழுதவும்.

முதல் சமன்பாட்டைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$12\,a_0 = (y_0 + y_6) + (y_1 + y_{11}) + (y_2 + y_{10}) + (y_3 + y_9) + y_4 + y_8) + (y_5 + y_7)$$

இது போல் மற்ற சமன்பாடுகளையும் மாற்றி எழுதவும்.

$$6a_1=(y_0+y_6)+\frac{\sqrt{3}}{2}(y_{11})+y_1+\frac{1}{2}(y_2+y_{10})-\frac{1}{2}(y_4+y_8)-\frac{\sqrt{3}}{2}(y_5+y_7)$$

$$6a_2=(y_0+y_6)+\tfrac{1}{2}(y_1+y_{11})-\tfrac{1}{2}(y_2+y_{10})-(y_3+y_9)-\tfrac{1}{2}(y_4+y_8)+\tfrac{1}{2}(y_5+y_7)$$

$$6a_3=(y_0-y_6)-(y_2+y_{10})+(y_4+y_8)$$

$$6a_4=(y_0+y_6)-\tfrac{1}{2}(y_1+y_{11})-\tfrac{1}{2}(y_2+y_{10})+(y_3+y_9)-\tfrac{1}{2}(y_4+y_8)-\tfrac{1}{2}(y_5+y_7)$$

$$6a_5=(y_0-y_6)-\frac{\sqrt{3}}{2}(y_1+y_{11})+\frac{1}{2}(y_2+y_{10})-\frac{1}{2}(y_4+y_8)+\frac{\sqrt{3}}{2}(y_5+y_7)$$

$$12a_6=(y_0+y_6)-(y_1+y_{11})+(y_2+y_{10})-(y_3+y_9)+(y_4+y_8)-(y_5+y_7)$$

$$6b_1=\tfrac{1}{2}(y_1-y_{11})+\frac{\sqrt{3}}{2}(y_2-y_{10})+(y_3-y_9)+\frac{\sqrt{3}}{2}(y_4-y_8)+\frac{1}{2}(y_5-y_7)$$

$$6b_2=\frac{\sqrt{3}}{2}[(y_1-y_{11})+(y_2-y_{10})-(y_4-y_8)-(y_5-y_7)]$$

$$6b_3=(y_1-y_{11})-(y_3-y_9)+(y_5-y_7)$$

$$6b_4=\frac{\sqrt{3}}{2}[(y_1-y_{11})-(y_2-y_{10})+(y_4-y_8)-(y_5-y_7)]$$

$$6b_5=\frac{1}{2}(y_1-y_{11})-\frac{\sqrt{3}}{2}(y_2-y_{10})+(y_3-y_9)-\frac{\sqrt{3}}{2}(y_4-y_8)+\tfrac{1}{2}(y_5-y_7)$$

இப்பொழுது, கீழ்க்காணும் பிரதியீடுகளைச் செய்யவும்.

$$\begin{array}{ll} y_0+y_6=u_0 & y_0-y_6=v_0 \\ y_1+y_{11}=u_1 & y_1-y_{11}=v_1 \\ y_2+y_{10}=u_2 & y_2-y_{10}=v_2 \\ y_3+y_9=u_3 & y_3-y_9=v_3 \\ y_4+y_8=u_4 & y_4-y_8=v_4 \\ y_5+y_7=u_5 & y_5-y_7=v_5 \end{array}$$

ஆகவே, மேலேயுள்ள 12 மீச்சிறு படிவழிச் சமன்பாடுகளும் கீழ்க்கண்டவாறு மாறுகின்றன.

$$12\,a_0 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$$
$$= (u_0 + u_3) + (u_1 + u_5) + (u_2 + u_4)$$

$$6\,a_1 = v_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} u_1 + \tfrac{1}{2} u_2 - \tfrac{1}{2} u_4 - \frac{\sqrt{3}}{2} u_5$$

$$= v_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} (u_1 - u_5) + \tfrac{1}{2} (u_2 - u_4)$$

$$6\,a_2 = u_0 + \tfrac{1}{2} u_1 - \tfrac{1}{2} u_2 - u_3 - \tfrac{1}{2} u_4 + \tfrac{1}{2} u_5$$
$$= (u_0 - u_3) + \tfrac{1}{2} (u_1 + u_5) - \tfrac{1}{2} (u_1 + u_4)$$

$$6\,a_3 = v_0 - u_2 + u_4$$
$$= v_0 - (u_2 - u_4)$$

$$6\,a_4 = u_0 - \tfrac{1}{2} u_1 - \tfrac{1}{2} u_2 + u_3 - \tfrac{1}{2} u_4 - \tfrac{1}{2} u_5$$
$$= (u_0 + u_3) - \tfrac{1}{2} (u_1 + u_5) - \tfrac{1}{2} (u_2 + u_4)$$

$$6\,a_5 = v_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} u_1 + \tfrac{1}{2} u_2 - \tfrac{1}{2} u_4 + \frac{\sqrt{3}}{2} u_5$$

$$= v_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} (u_1 - u_5) + \tfrac{1}{2}\, u_2 - u_4)$$

$$12\,a_6 = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5$$
$$= (u_0 - u_3) - (u_1 + u_5) + (u_2 + u_4)$$

$$6\,b_1 = \tfrac{1}{2} v_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} v_2 + v_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} v_4 + \tfrac{1}{2} v_5$$

$$= \tfrac{1}{2} (v_1 + v_5) + \frac{\sqrt{3}}{2} (v_2 + v_4) + v_3$$

$$6\,b_2 \equiv \frac{\sqrt{3}}{2} (v_1 + v_2 - v_4 - v_5)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} (v_1 - v_5) + (v_2 - v_4)]$$

$$6\,b_3 = v_1 - v_3 + v_5$$
$$= (v_1 + v_5) - v_3$$

$$6\,b_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (v_1 - v_2 + v_4 + v_5)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} [(v_1 - v_5) - (v_2 - v_4)]$$

$$6\,b_5 = \tfrac{1}{2}\,v_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_2 + v_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_4 + \tfrac{1}{2}\,v_5$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(v_1 + v_5) - \frac{\sqrt{3}}{2}(v_2 + v_4) + v_3)$$

மீண்டும் கீழ்க்கண்டவாறு பிரதியீடுகளைச் செய்யவும்.

$$u_0 + u_3 = r_0 \qquad u_0 - u_3 = s_0 \qquad v_1 + v_5 = p_1 \qquad v_1 - v_5 = q_1$$
$$u_1 + u_5 = r_1 \qquad u_1 - u_5 = s_1 \qquad v_2 + v_4 = p_2 \qquad v_2 - v_4 = q_2$$
$$u_2 + u_4 = r_2 \qquad u_2 - u_4 = s_2$$

ஆகவே, மீச்சிறு வழிபாட்டுச் சமன்பாடுகள் கீழ்க்கண்டவாறு அமைகின்றன.

$$12\,a_0 = r_0 + r_1 + r_2 = r_0 + (r_1 + r_2)$$

$$6\,a_1 = v_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}s_1 + \tfrac{1}{2}\,s_2$$

$$6\,a_2 = s_0 + \tfrac{1}{2}\,r_1 - \tfrac{1}{2}\,r_2 = s_0 + \tfrac{1}{2}(r_1 - r_2)$$

$$6\,a_3 = v_0 - s_2$$

$$6\,a_4 = r_0 - \tfrac{1}{2}\,r_1 - \tfrac{1}{2}\,r_2 = r_0 - \tfrac{1}{2}\,(r_1 + r_2)$$

$$6\,a_5 = v_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}s_1 + \tfrac{1}{2}\,s_2$$

$$12\,a_6 = s_0 - r_1 + r_2 = s_0 - (r_1 - r_2)$$

$$6\,b_1 = \tfrac{1}{2}\,p_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}p_2 + v_3 = v_3 + \tfrac{1}{2}\,p_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}p_2$$

$$6\,b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(q_1 + q_2)$$

$$6\,b_3 = p_1 - v_3$$

$$6\,b_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}(q_1 - q_2)$$

$$6\,b_5 = \tfrac{1}{2}\,p_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}p_2 + v_3 = v_3 + \tfrac{1}{2}\,p_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,p_2.$$

இப்பொழுது கீழ்க்கண்ட பிரதியீடுகளைச் செய்யவும்.

$$r_1 + r_2 = l \qquad r_1 - r_2 = m$$
$$q_1 + q_2 = g \qquad q_1 - q_2 = h$$

ஆகவே, கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$a_0=\frac{1}{12}(r_0+l)$$

$$a_1=\frac{1}{6}\left[v_0+\frac{\sqrt{3}}{2}s_1+\tfrac{1}{2}\ s_2\right]$$

$$a_2=\frac{1}{6}(s_0+\tfrac{1}{2}\ m)$$

$$a_3=\frac{1}{6}(v_0-s_2)$$

$$a_4=\frac{1}{6}\ (r_0-\tfrac{1}{2}\ l)$$

$$a_5=\frac{1}{6}\left[v_0-\frac{\sqrt{3}}{2}s_1+\tfrac{1}{2}\ s_2\right]$$

$$a_6=\frac{1}{12}\ (s_0-m)$$

$$b_1=\frac{1}{6}\left[v_3+\tfrac{1}{2}p_1+\frac{\sqrt{3}}{2}p_2\right]$$

$$b_2=\frac{\sqrt{3}}{12}\ g$$

$$b_3=\frac{1}{6}(p_1-v_3)$$

$$b_4=\frac{\sqrt{3}}{12}\ h$$

$$b_5=\tfrac{1}{6}\left[v_3+\frac{1}{2}\ p_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\ p_2\right]$$

மேற்கண்ட எளிய சமன்பாடுகளின் மூலம் திரும்புச் சார்பிலுள்ள மாறிலிகளின் மதிப்புக்களை எளிதில் பெறலாம். ஆனால் மேற்கண்ட முறையில் மீண்டும் மீண்டும் பிரதியீடுகள் செய்யப்பட்டுள்ளன. இவ்வாறு செய்யப்படுகின்ற பிரதியீடுகள் யாவற்றையும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூட்டல்—கழித்தல் முறையில் மிக எளிதாகச் செய்யலாம்.

முதலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள 12 நிலைத் தூரங்களையும் கீழ்க் கண்டவாறு எழுதிக் கொள்ளவேண்டும். பின்னர், பல்வேறு கூட்டல், கழித்தல்களின் மூலம் எல்லாப் பிரதியீடுகளையும் பெறலாம்.

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	y_6	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7
(+) கூட்டுத்தொகை :	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
(−) வித்தியாசம் :	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5

	u_0	u_1	u_2
	u_3	u_5	u_4
(+) கூட்டுத்தொகை :	r_0	r_1	r_2
(−) வித்தியாசம் :	s_0	s_1	s_2

	v_1	v_2
	v_5	v_4
(+) கூட்டுத்தொகை :	p_1	p_2
(−) வித்தியாசம் :	q_1	q_2

	r_1	q_1
	r_2	q_2
(+) கூட்டுத்தொகை :	l	g
(−) வித்தியாசம் :	m	h

a, b ஆகிய பல்வேறு மாறிலிகளைக் கணக்கிடப் பயன்படும் மேற்கூறப்பட்ட முறை முதன்முதலில் கி.பி. 1903 ஆம் ஆண்டு ரேஞ்ச் (Range) என்பவரால் கண்டு பிடிக்கப்பட்டது.

மேற்கண்ட முறையில் கணக்கிடும்போது தவறுகள் பல ஏற்படலாமாகையால், கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் முறையைப் பின்பற்றி, கணக்கிடப்பட்டுள்ள a, b ஆகியவற்றின் மதிப்புக்கள் சரியானவையா என்று சோதித்துப் பார்த்துக் கொள்ளலாம்.

(i) கணக்கிடப்பட்ட a-யின் மதிப்புக்கள்

$$y_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

என்ற சமன்பாட்டைச் சமன் செய்தால், கணக்கிடப்பட்ட a-யின் மதிப்புக்கள் சரியானவையென்று கொள்ளலாம்.

(ii) இதுபோல், கணக்கிடப்பட்ட b-யின் மதிப்புக்கள்

$$v_1 = b_1 + b_5 + 2\,b_3 + \sqrt{3}\,(b_2 + b_4)$$

என்ற சமன்பாட்டைச் சமன் செய்தால், கணக்கிடப்பட்ட b-யின் மதிப்புக்கள் சரியானவை யென்று கொள்ளலாம்.

மாதிரி 176

கீழ்க்காணும் பட்டியல் மதிப்புக்களிலிருந்து, அவற்றிற்குப் பொருத்தமான திரும்புச் சார்பைப் பெறுக.

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
y	9·3	15·0	17·4	23 0	37·0	31·0	15·3	4·0	—8·0	—13·2	—14 2	—6·0

கூட்டல்—கழித்தல் முறையைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடவும்.

	0	1	2	3	4	5
y...	9·3	15·0	17·4	23·0	37·0	31·0
	15·3	—6·0	—14·2	—13·2	—8·0	4·0
(+) u...	24·6	9·0	3·2	9·8	29·0	35·0
(—) v...	—6·0	21·0	31·6	36·2	45·0	27·0

	0	1	2
u....	24·6	9·0	3·2
	9·8	35·0	29·0
(+) r....	34·4	44·0	32·2
(—) s....	14·8	—26·0	—25·8

	1	2
v....	21·0	31·6
	27·0	45·0
(+) p....	48·0	76·6
(—) q....	—6·0	—13·4

r....	44·0
	32·0
(+) l....	76·2
(—) m....	11·8

q....	—6·0
	—13·4
(+) g....	—19·4
(—) h....	7·4

$$a_0=\tfrac{1}{12}(r_0+l)=\tfrac{1}{12}(34{\cdot}4+76{\cdot}2)=\tfrac{1}{12}(110{\cdot}6)=9{\cdot}22$$

$$a_1=\tfrac{1}{6}\left[v_0+\frac{\sqrt{3}}{2}s_1+\frac{1}{2}s_2\right]$$

$$=\tfrac{1}{6}\left[-6{\cdot}0+\frac{\sqrt{3}}{2}(-26{\cdot}0)+\frac{1}{2}(-25{\cdot}8)\right]$$

$$=\tfrac{1}{6}[-6{\cdot}0-13\sqrt{3}-12{\cdot}9]$$

$$=\tfrac{1}{6}[-6{\cdot}0-22{\cdot}5-12{\cdot}9]$$

$$=\tfrac{1}{6}[-41{\cdot}4]$$

$$=\tfrac{1}{6}\ -6{\cdot}90$$

$$a_2=\tfrac{1}{6}(s_0+\tfrac{1}{2}m)$$

$$=\tfrac{1}{6}[14{\cdot}8+\tfrac{1}{2}(11{\cdot}8)]$$

$$=\tfrac{1}{6}[14{\cdot}8+5{\cdot}9]$$

$$=\tfrac{1}{6}[20{\cdot}7]$$

$$=3{\cdot}45$$

$$a_3=\tfrac{1}{6}(v_0-s_2)$$

$$=\tfrac{1}{6}(-6{\cdot}0+25{\cdot}8)$$

$$=\tfrac{1}{6}(19{\cdot}8)$$

$$=3{\cdot}30$$

$$a_4=\tfrac{1}{6}(r_0-\tfrac{1}{2}l)$$

$$=\tfrac{1}{6}[34{\cdot}4-\tfrac{1}{2}(76{\cdot}2)]$$

$$=\tfrac{1}{6}[34{\cdot}4-38{\cdot}1]$$

$$=\tfrac{1}{6}[-3{\cdot}7]$$

$$=-0{\cdot}62$$

$$a_5=\tfrac{1}{6}\left[v_0-\frac{\sqrt{3}}{2}s_1+\tfrac{1}{2}s_2\right]$$

$$=\tfrac{1}{6}\left[-6{\cdot}0-\frac{\sqrt{3}}{2}(-26{\cdot}0)+\tfrac{1}{2}(-25{\cdot}8)\right]$$

$$=\tfrac{1}{6}[-6{\cdot}0+13\sqrt{3}-12{\cdot}9]$$

$$=\tfrac{1}{6}[-6{\cdot}0+22{\cdot}5-12{\cdot}9]$$

$$=\tfrac{1}{6}[3{\cdot}6]$$

$$=0{\cdot}60$$

$$a_6=\tfrac{1}{12}(s_0-m)$$

$$=\tfrac{1}{12}(14{\cdot}8-11{\cdot}8)$$

$$=\tfrac{1}{12}(3)$$

$$=0{\cdot}25$$

$$b_1 = \frac{1}{6}\left[v_3 + \frac{1}{2}p_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}p_2\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[36{\cdot}2 + \frac{1}{2}(48{\cdot}0) + \frac{\sqrt{3}}{2}(76{\cdot}6)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[36{\cdot}2 + 24{\cdot}0 + (38{\cdot}3)\sqrt{3}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[36{\cdot}2 + 24{\cdot}0 + 66{\cdot}3\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[126{\cdot}53\right]$$

$$= 21{\cdot}09$$

$$b_2 = \frac{\sqrt{3}}{12}g$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}(-19{\cdot}4)$$

$$= -\frac{33{\cdot}60}{12}$$

$$= -2{\cdot}80$$

$$b_3 = \frac{1}{6}(p_1 - v_3)$$

$$= \frac{1}{6}(48 - 36{\cdot}2)$$

$$= \frac{1}{6}(11{\cdot}8)$$

$$= 1{\cdot}97$$

$$b^4 = \frac{\sqrt{3}}{12}h$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}(7{\cdot}4)$$

$$= \frac{12{\cdot}82}{12}$$

$$= 1{\cdot}07$$

$$b_5 = \frac{1}{6}\left[v_3 + \frac{1}{2}p_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}p_2\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[36{\cdot}2 + \frac{1}{2}(48{\cdot}0) - \frac{\sqrt{3}}{2}(76{\cdot}6)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[36{\cdot}2 + 24{\cdot}0 - 66{\cdot}33\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[-6{\cdot}13\right]$$

$$= -1{\cdot}02$$

கணக்கீட்டைச் சரிபார்த்தல்

$$\Sigma a = 9{\cdot}22 - 6{\cdot}90 + 3{\cdot}45 + 3{\cdot}30 - 0{\cdot}62 + 0{\cdot}60 + 0{\cdot}25$$
$$= 16{\cdot}62 - 7{\cdot}52$$
$$= 9{\cdot}30$$
$$= y_0$$

ஆகவே, a-யின் கணக்கிடப்பட்ட மதிப்புக்கள் சரியானவையே.

$$b_1 + b_5 + 2b_3 + \sqrt{3}\,(b_2 + b_4)$$
$$= 21{\cdot}09 - 1{\cdot}02 + 2\,(1{\cdot}97) + 1{\cdot}732\,(-2{\cdot}80 + 1{\cdot}07)$$
$$= 21{\cdot}09 - 1{\cdot}02 + 3{\cdot}94 + 1{\cdot}732\,(-1{\cdot}73)$$
$$= 21{\cdot}09 + 3{\cdot}94 - 1{\cdot}02 - 2{\cdot}996$$
$$= 21{\cdot}01$$
$$= v_1$$

ஆகவே, b-யின் கணக்கீட்டு மதிப்புக்கள் சரியானவையே.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளுக்குப் பொருத்தமான சூத்திரம் வருமாறு :

$$y = 9{\cdot}22 - 6{\cdot}90 \cos x + 3{\cdot}45 \cos 2x + 3{\cdot}30 \cos 3x$$
$$- 0{\cdot}62 \cos 4x + 0{\cdot}60 \cos 5x + 0{\cdot}25 \cos 6x$$
$$+ 21{\cdot}09 \sin x - 2{\cdot}80 \sin 2x + 1{\cdot}97 \sin 3x$$
$$+ 1{\cdot}07 \sin 4x - 1{\cdot}02 \sin 5x.$$

பயிற்சி 28

கீழ்க்காணும் அட்டவணை மதிப்புக்களுக்குப் பொருத்தமான திரும்புச் சார்பைக் காண்க.

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	40°2	270°	300°	330
y	38·4	11·8	4·3	13·8	3·9	−18·1	−22·9	−27·2	−23·8	8·2	31·7	34

15. நழுவுச் சட்டம்
(Slide Rule)

நழுவுச் சட்டம் என்பது கணிதச் செய்கைகளை (mathematical operations) மிக விரைவாகவும், எளிதாகவும், துல்லியமாகவும் செய்யப் பயன்படும் ஒரு கருவியாகும். இது " நழுவுக் கணிப்பான் " என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. இச் சட்டத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ள அளவுகோல்கள் . எண்களின் மடக்கைகளாலானவையாகையால் இதைப் பயன்படுத்த மடக்கையறிவு அவசியம். ஒரு சாதாரண நழுவுச் சட்டம் 10 அங்குல நீளமுள்ளதாகயிருக்கும். இருப்பினும், அலுவலக உபயோகத்திற்கென 20 அங்குல நழுவுச் சட்டமும், எளிதாகத் தூக்கிச் செல்லத் தக்கவாறு 5 அங்குல நழுவுச் சட்டமும் இருக்கின்றன. சாதாரண 10 அங்குல நழுவுச் சட்டத்தின் அமைப்பு படம் 18-இல் விளக்கப்பட்டுள்ளது.

நழுவுச் சட்டம் கீழ்க்கண்ட செயல்களுக்குப் பயன்படுகிறது.

1. எண்களின் மடக்கைகளைக் காணல்.
2. எண்களைப் பெருக்கவும் வகுக்கவும்.
3. எண்களின் தலைகீழ் மதிப்புக்களைக் காணல்.
4. எண்களின் வர்க்கங்கள், வர்க்க மூலங்கள், முப்படிகள், முப்படி மூலங்கள் ஆகியவை காணல்.
5. எண்களின் பின்னப் படிகளையும், பின்ன மூலங்களையும் காணல்.
6. கோணங்களுக்குரிய வட்டச் சார்பு (circular function)களைக் காணல்.
7. விகிதங்களைச் சதவீதங்களாக மாற்றுதல்.
8. எண்களின் பெருக்குச் சராசரி (G.M.) காணல்.
9. எண்களின் π மடங்குகளைக் காணல்.

இருப்பினும், கூட்டலும் கழித்தலும் நழுவுச் சட்டத்தினுல் செய்ய முடியாது. ஏனெனில் மடக்கை மதிப்புக்களைக் கொண்டு இச்சட்டம் அமைந்துள்ளது. நழுவுச் சட்டத்தின் அமைப்பும், அதைக் கையாள வேண்டிய முறைகளின் அடிப்படைக் கொள்கைகளும் மட்டுமே இங்கு விவரிக்கப்பட்டுள்ளன. ஆனுல், நழுவுச் சட்டத்தைக் கையாளும் திறமையைப் பழக்கத்தினுல் மட்டுமே பெற முடியும்.

நழுவுச் சட்டத்தில் மூன்று பாகங்கள் உள்ளன. அவைகளாவன :

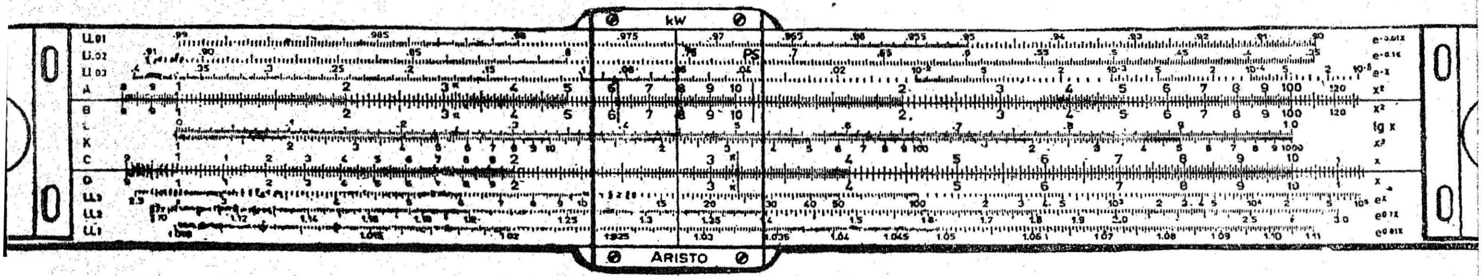
1. சட்டம் (Body or Frame)
2. நழுவும் அளவுச் சட்டம் (Slide)
3. காட்டி (Indicator or Cursor)

15.1 நழுவுச் சட்டத்தின் அளவுகோல்கள்

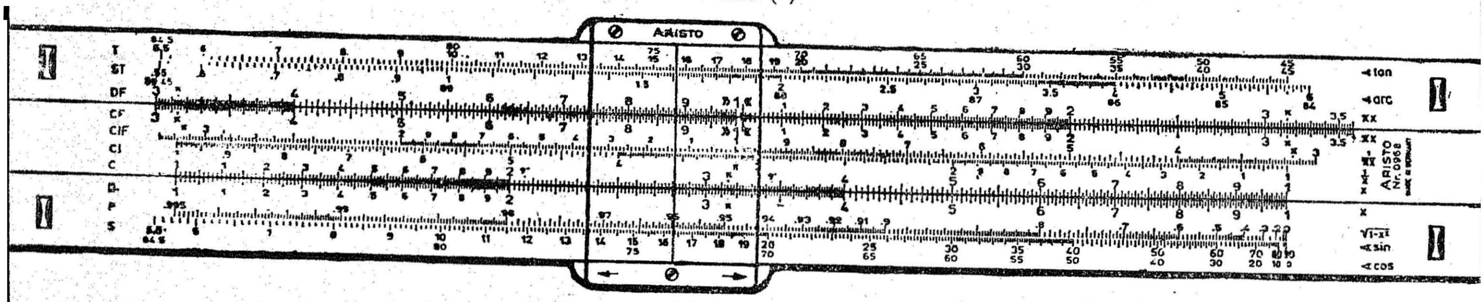
ஒரு நகராச் சட்டத்தின் (body or frame) நடுவில் முன்னும் பின்னுமாக நழுவிச் செல்லக்கூடிய ஒரு நழுவும் அளவுச் சட்டம் (Slide) உள்ளது. இவ்விரண்டுக்கும் மேலே முன்னும் பின்னும் நகரக்கூடிய ஒரு காட்டி (indicator or cursor) உள்ளது. இம் மூன்று பாகங்களையும் கொண்டு அமைந்ததுதான் நழுவுச் சட்டம் என்ற கருவியாகும். கருவியின் இரு பக்கங்களையும் பக்கம் 1, பக்கம் 2 என்று குறிப்பிடுவோம். ஒவ்வொரு பக்கத்திலும், நகராச் சட்டம், நழுவும் அளவுகோல் ஆகியவற்றின்மேல் அநேக அளவு கோல்கள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. பக்கம் 1-இல் A, B, C, D, K, L, LL_1, LL_2, LL_3, LLO_1, LLO_2, LLO_3 என்று பெயரிடப்பட்ட அளவு கோல்கள் உள்ளன. இப்பக்கத்தை மடக்கைப் பக்கம் (Log Log Side) என்றும் அழைப்பதுண்டு. பக்கம் 2-இல் C, D, CF, DF, CI, CIF, S, T, ST, P என்று பெயரிடப்பட்ட அளவுகோல்கள் உள்ளன. இப்பக்கத்தை கோண விகிதப் பக்கம் (Trigonometric Side) என்றும் அழைப்பதுண்டு. இரு பக்கங்களிலுமுள்ள ஒவ்வொரு அளவு கோலும் ஒவ்வொரு வகையான கணிதச் செயலுக்குப் பயன் படுகிறது.

C, D அளவு கோல்கள் :

C அளவுகோல் என்பது நழுவும் அளவுச் சட்டத்தின் கீழ் ஓரத்திலும், D அளவுகோல் என்பது அதையொட்டி நகராச் சட்டத்திலும் அமைந்துள்ளன. இவ்விரு அளவு கோல்களும் மடக்கை யளவுகளாலான அளவு கோல்களாகும். $\log_{10} 1 = 0$ ஆகையால் இவ்விரு அளவு கோல்களும் 1 என்ற அளவுக் குறி (graduation mark)யிலிருந்து தொடங்குகின்றன. இந்த அளவு கோல்களின் முக்கிய அளவுக் குறியீடுகள் 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1 என்று



18 (i) Log Log Side
மடக்கைப் பக்கம்
பக்கம் (1)



18 (ii) Trigonometric Side
கோணவிகிதப் பக்கம்
பக்கம் (2)

குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றுள் 1க்கும் 2க்குமிடையேயுள்ள இடைவெளி 10 சிறு அசம இடைவெளிகளாக 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 2 என்ற அளவுக் கோடுகளால் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. இச்சிறு இடைவெளிகள் ஒவ்வொன்றும் மீண்டும் 10 இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன. 2க்கும் 3க்குமிடையேயுள்ள இடைவெளி யானது 1க்கும் 2க்குமிடையேயுள்ள இடைவெளியைவிடச் சிறியதாக யிருக்கும். இந்த இடைவெளி 10 அசம இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு இடைவெளியும் மீண்டும் 10 பாகங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன. 2க்கும் 3க்குமிடையேயுள்ள இடைவெளி 1க்கும் 2க்குமிடையேயுள்ள இடைவெளியைவிடச் சிறியதாக யிருக்கும். இவ்விடைவெளியும் (1, 2) இடைவெளியைப் போலவே பிரிக்கப்பட்டிருக்கும். மற்ற இடைவெளிகள் ஒவ்வொன்றும் முதலில் 10 சிறு இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுப் பின்னர் ஒவ்வொரு சிறு இடைவெளியும் 2 பாகங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கும். இந்த அளவு கோடுகள் யாவும் மடக்கை யளவு கோடுகளாகும். ஒரு எண்ணின் மடக்கைப் பின்னம் (mantissa), அந்த எண்ணின் தசமப் புள்ளியிருக்கும் இடத்தைச்சாராத காரணத்தினுல், C, D-அளவு கோல்கள் 1-இலிருந்து 10 வரை அல்லது 10-இலிருந்து 100 வரை அல்லது 100-இலிருந்து 1000 வரை........ குறிக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்ளலாம். இந்த அளவு கோல்களில் 1-இலிருந்து p என்ற ஏதாவது ஒரு அளவுக்குறி வரையுள்ள தூரம் p என்ற எண்ணின் மடக்கைப் பின்னத்திற்கு (mantissa) விகித சமமாகயிருக்கும். C-அளவு கோலின் தொடக்கத்திலுள்ள 1 என்ற அளவுக்குறி C-அளவு கோலின் குறியீடு (index) அல்லது C-அளவு கோலின் இடப்பக்கக் குறியீடு என்று அழைக்கப்படுகிறது. C-அளவு கோலின் இறுதியிலுள்ள அளவுக்குறி 10 ஆகும். ஆனுல் இது 1 என்றே குறிக்கப்பட்டிருக்கும். ஏனெனில், C-அளவு கோலை D-அளவு கோலுடன் வலமிருந்து இடமாகப் பொருத்திப் பார்க்க இந்த அளவு கோட்டைப் பயன்படுத்துவதால் இந்த அளவு கோடு 10 என்று குறிக்கப்படுவதற்குப் பதிலாக 1 என்றே குறிக்கப்பட்டிருக்கிறது. ஆகவே, இந்த 1 என்ற அளவுக் குறியானது C-அளவு கோலின் வலப்பக்கக் குறியீடு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

A,B-அளவு கோல்கள் :

A, B என்ற இரண்டு அளவு கோல்களும் ஒரே மாதிரியான மடக்கையளவுகளாலான அளவு கோல்களாகும். B-அளவுகோல் நழுவும் அளவுச் சட்டத்தின் மேல் ஓரத்திலும், A-அளவு கோல் அதையடுத்து நகராச் சட்டத்தின் மேலும் அமைந்துள்ளன. இவ்விரு அளவு கோல்களிலும் முக்கிய அளவுக் குறிகள் இடமிருந்து வலமாக முதலில் 1, 2, 3,......, 10 என்றும், பின் 20, 30, 40,.......,100

என்றும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. A-அளவு கோலிலுள்ள ஒவ்வொரு அளவுக் குறியும் அதற்கு நேராக D-அளவு கோலிலுள்ள அளவுக் குறி குறிப்பிடுகின்ற எண்ணின் வர்க்கத்தைக் குறிக்கின்றது. A, B-அளவு கோல்களை C, D-அளவு கோல்களுடன் ஒரு நிலைப் படுத்தி இணைத்து எண்களின் வர்க்கங்களையோ அல்லது வர்க்க மூலங்களையோ காணலாம்.

K-அளவு கோல் :

K என்ற அளவு கோல் நழுவும் அளவுச் சட்டத்தில் C-அளவு கோலையடுத்து அமைந்துள்ளது. இந்த அளவு கோல், 1, 2, 3,......, 10 ; 20, 30,......, 100 ; 200, 300,......, 1000 என்று மூன்று பாகங் களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. ஆனால் இடமில்லாத காரணத்தால் அளவுக் குறிகளில் பூச்சியங்கள் விடப்பட்டிருக்கின்றன. இதுவும் ஒரு மடக்கையளவு கோலாகும். இதிலுள்ள அளவுக் குறிகள் அவைகளுக்கு நேராக C-அளவு கோலிலுள்ள அளவுக் குறிகள் குறிப்பிடுகின்ற எண்களின் முப்படிகளைக் குறிக்கின்றன.

L-அளவு கோல் :

இது நழுவும் அளவுச் சட்டத்தில் K-அளவுகோலை யடுத்து மேலே அமைந்துள்ளது. இது C-அளவு கோல் குறிக்கும் எண்களின் மடக்கை மதிப்புக்களைக் காணப் பயன்படுகிறது.

LL, LLO-அளவு கோல்கள் :

நழுவுச் சட்டத்தின் மடக்கைப் பக்கத்தில் (பக்கம் 1) நகராச் சட்டத்தின் கீழ் ஓரத்தில் கீழிருந்து மேலாக மூன்று வரிசைகளில் முறையே LL_1, LL_2, LL_3 என்ற அளவு கோல்கள் குறிக்கப்பட்டிருக் கின்றன. இதுபோல், நகராச் சட்டத்தின் மேல் ஓரத்தில் மேலிருந்து கீழாக மூன்று வரிசைகளில் முறையே LLO_1, LLO_2, LLO_3 என்ற மூன்று அளவு கோல்கள் குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. LL-அளவு கோல்கள் 1·01 இலிருந்து 10^5 வரை குறிக்கப்பட்டுள்ள அளவு கோல் களாகும். இதுபோன்று LLO-அளவு கோல்கள் 0·99 முதல் 10^{-5} வரை குறிக்கப்பட்டுள்ள மடக்கை யளவு கோல்களாகும். LL அளவு கோல்கள் 1-ஐ விட அதிகமான எண்களின் பின்னப்படிகளையும், பின்ன மூலங்களையும் காணப் பயன்படுகின்றன. LLO அளவு கோல்கள் 1க்குக் குறைவான எண்களின் (அதாவது தசம எண் களின்) பின்னப் படிகளையும், பின்ன மூலங்களையும் காணப் பயன் படுகின்றன.

கோண விகிதப் பக்கத்திலுள்ள அளவு கோல்கள் :

இரண்டாது பக்கமாகிய கோண விகிதப் பக்கத்தில் C, D, CF, DF, CI, CIF, S, T, ST, P என்ற அளவு கோல்கள் உள்ளன,

கோணங்களின் திரிகோண விகித மதிப்புக்களைக் காணப் பயன்படும் அளவு கோல்கள் இப் பக்கத்தில் அமைந்திருப்பதால், இப் பக்கம் "கோணவிகிதப் பக்கம் (Trigonometric side) என்று அழைக்கப் படுகிறது. இதிலுள்ள C, D என்ற அளவு கோல்கள் மடக்கைப் பக்கத்திலுள்ள C, D அளவு கோல்களைப் போலவே பயன்படு கின்றன.

CF, DF-அளவு கோல்கள் :

CF என்ற அளவு கோல் நழுவும் அளவுச் சட்டத்தின் மேல் ஓரத்தில் அமைந்துள்ளது. இதை யொட்டி நகராச் சட்டத்தின் மேல் அமைந்துள்ளதுதான் DF என்ற அளவு கோலாகும். இரண்டும் ஒரே மாதிரியான அளவுக் குறிகளைக் கொண்ட அளவு கோல்களாகும். C, D அளவு கோல்கள் குறிக்கின்ற எண்களின் π மடங்கு மதிப்புக் களை இந்த CF, DF அளவு கோல்கள் குறிக்கின்றன.

CI, CIF-அளவு கோல்கள் :

CI என்ற அளவுகோல் நழுவும் அளவுச் சட்டத்தின் மேல் C-அளவு கோலை யொட்டி அதற்கும் மேலே அமைந்துள்ளது. இதில் அளவுக் குறிகள் வலமிருந்து இடமாகக் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இதிலுள்ள அளவுக் குறிகள் C-அளவு கோல் குறிக்கின்ற எண்களின் தலைகீழ் (reciprocal) மதிப்புக்களைக் குறிக்கின்றன. நழுவும் அளவுச் சட்டத்தில் CI அளவுகோலை யொட்டி அதற்கு மேலே CIF என்ற அளவு கோல் உள்ளது. இதுவும் வலமிருந்து இடமாகவே குறியிடப் பட்டுள்ளது. இதிலுள்ள அளவுக் குறிகள் C-அளவு கோல் குறிக் கின்ற எண்களின் தலைகீழ் மதிப்புக்களின் $\frac{1}{\pi}$ மடங்குகளைக் குறிக் கின்றன.

S-அளவு கோல் :

நகராச் சட்டத்தின் கீழ் ஓரத்தில் கோண விகிதப் பக்கத்தில் S என்ற அளவு கோல் அமைந்துள்ளது. இது சைன் அளவு கோல் (sine scale) அல்லது கொசைன் அளவுகோல் (cosine scale) என்று அழைக்கப்படுகிறது. இதில் 5·5° முதல் 90° வரை கருப்பு நிறத்தில் இடமிருந்து வலமாகவும் 0° முதல் 84·5° வரை சிவப்பு நிறத்தில் வலமிருந்து இடமாகவும் குறிக்கப்பட்டிருக்கும். கருப்பு நிற அளவு கோலில் குறிக்கப்பட்டுள்ள கோணங்களுக்கு நேர் எதிராக D அளவு கோலிலுள்ள அளவுக் கோடு குறிக்கின்ற எண்ணின் $\frac{1}{10}$ மடங்கு அக்கோணத்தின் சைன் விகிதத்தைக் (sine ratio) குறிக்கும். இதுபோல், சிவப்பு நிற அளவு கோலின் அளவுக் குறிகளுக்கு நேர் எதிராக D அளவு கோலிலுள்ள அளவுக் கோடு குறிக்கின்ற

எண்ணின் $\frac{1}{10}$ மடங்கு அக்கோணத்தின் கொசைன் விகிதத்தைக் (cosine ratio) குறிக்கும். இவ்வாறு கருப்பு நிற அளவு கோலின் உதவியால் sin 5·5° இலிருந்து sin 90° வரையுள்ள மதிப்புக்களையும், சிவப்பு நிற அளவு கோலின் உதவியால் cos 0° முதல் cos 84·5° வரையுள்ள மதிப்புக்களையும் பெறலாம். எடுத்துக்காட்டாக, S-அளவு கோலில் 30°-ஐக் குறிக்கும் அளவு கோடு D-அளவு கோலில் 5 என்ற அளவுக் குறியுடன் பொருந்துவதைக் காணலாம். எனவே, sin 30° $=\frac{5}{10}=0·5$ ஆகும். இதுபோல், வலமிருந்து இடமாக சிவப்பு அளவு கோலில் 60° ஐக் குறிக்கும் அளவுக் குறியும் D- அளவு கோலில் அதே 5 என்ற அளவுக் குறியுடன் பொருந்துவதைக் காணலாம். எனவே, cos 60° $=\frac{5}{10}=0·5$.

T-அளவு கோல் :

நகராச் சட்டத்தின் உச்சியில் காணப்படுகின்ற T-அளவு கோலில் கருப்பு நிறத்தில் இடமிருந்து வலமாக 5·5°, 6°, 7°,……,10°, 11°, 12°,……, 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45° என்றும், சிவப்பு நிறத்தில் வலமிருந்து இடமாக 45°, 50°,……, 80°, 84·5° என்றும் கோணங்களைக் குறிக்கும் அளவு கோடுகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. tan 5·5° இலிருந்து tan 45° வரையுள்ள மதிப்புக்களையும், cot 45° இலிருந்து cot 84·5° வரையுள்ள மதிப்புக்களையும் அக்கோணங்களைக் குறிக்கும் அளவு கோடுகளுக்கு நேராக D-அளவு கோலில் அமைந்திருக்கும் அளவுக் கோடுகள் குறிக்கின்ற எண்களை $\frac{1}{10}$ ஆல் பெருக்கிக் காணலாம்.

இவை தவிர இன்னும் வேறு சில அளவு கோல்களும் நழுவுச் சட்டத்திலிருக்கின்றன. ஆனால் அவைகள் அதிகமாகப் பயன் படுத்தப் படுவதில்லையாகையால் அவற்றை இங்கு விவரிக்காது விட்டுவிடுவோம்.

15·2 காட்டி (indicator or cursor) யின் உபயோகம்

காட்டியென்பது நகராச்சட்டம், நழுவும் அளவுச் சட்டம் ஆகிய இரு சட்டங்களின் மேலும் முன்னும் பின்னுமாக நகரக் கூடிய சதுர வடிவமான சட்டமாகும். இதன் உட்புறமுள்ள சதுர இடைவெளியில் அவ்விரு சட்டங்களின் மேலுள்ள அளவு கோல்களை நன்கு பார்க்கலாம். இதன் நடுவில் அவ்விரு சட்டங்களுக்கும் குறுக்கு வசமாக கருப்பு நிறத்தில் மெல்லிய கோடு போன்ற கம்பியாலான குறி ஒன்று உள்ளது. இது "மயிர்க்கோடு" (Hair Line) என்று அழைக்கப்படுகிறது. நழுவும் சட்டத்திலுள்ள அளவுக் குறியையும் நகராச் சட்டத்திலுள்ள அளவுக் குறியையும் நேருக்கு நேராகப் பொருத்திப் பார்க்க இது பயன் படுகிறது. சில நழுவுச் சட்டங்களில்

இம்மயிர்க்கோடு நடுவில் சிறு விடுபட்டிருக்கும். இவ்வாறு விடுபட்டிருப்பதால் இரு சட்டங்களின் அளவுக் குறிகளைப் பொருத்திப் பார்ப்பதற்கும், அளவுக் குறியீடுகளைக் கணிப்பதற்கும் வசதியாகயிருக்கும்.

15·3 நழுவுச் சட்டத்தைப் பயன் படுத்தும் முறைகள்

நழுவுச் சட்டத்தைப் பல்வேறு கணிதச் செயல்களுக்கும் பயன் படுத்தும் முறைகள் கீழே விளக்கப்பட்டுள்ளன.

15·3·1 பெருக்கல்

29×32 இன் மதிப்பைக் காண வேண்டுமென வைத்துக் கொள்வோம். முதலில் நழுவும் அளவுச் சட்டத்தை நகர்த்தி C-அளவு கோலின் குறியீடாகிய 1 (சுருக்கமாக 1C) ஆனது D-அளவு கோலில் 29 ஐக் குறிக்கும் அளவுக்கோடுடன் (சுருக்கமாக 29 D) பொருந்துமாறு வைக்கவேண்டும். பின்னர், காட்டியைச் சட்டத்தில் நகர்த்தி அதன் மயிர்க்கோடு C-அளவு கோலில் 32 ஐக் குறிக்கும் அளவுக் கோடுடன் பொருந்துமாறு வைக்க வேண்டும். இப்பொழுது, நழுவும் சட்டம் நகராச் சட்டத்தின் வலப்பக்கமாகச் சிறிது நீட்டிக் கொண்டிருப்பதைப் பார்க்கலாம். இந்த நிலையில் மயிர்க்கோடு D-அளவு கோலில் எந்த அளவுக் கோடுடன் பொருந்து கிறதோ அதுவே நமக்கு வேண்டிய பெருக்கற் பலனைக் குறிக்கும் அளவு கோடாகும். மேற்கண்ட பெருக்கலில் மயிர்க்கோடு D-அளவு கோலில் 928 ஐக் குறிக்கும் கோடுடன் பொருந்தியிருப்பதைக் காண லாம். ஆகவே, $29 \times 32 = 928$ என்று அறிகிறோம். மேற்கண்ட பெருக்கற் செயலைக் கீழ்க்கண்டவாறு சுருக்கிக் கூறலாம்.

"1 C-ஐ 29 D யுடன் பொருத்தவும். காட்டியை 32 C-க்கு நகர்த்தவும். மயிர்க்கோடு 928 D யுடன் பொருந்தியிருப்பதைக் காணலாம். ஆகவே, $29 \times 32 = 928$ ஆகும்".

இப்பொழுது 48×64 இன் மதிப்பைக் காண்போம். 1 C யை 48D யுடன் பொருத்தவும். காட்டியை 64C க்கு நகர்த்தவும். இப்போது மயிர்க்கோடு D அளவு கோலைத் தாண்டி வெளியே யிருப்பதைப் பார்க்கலாம். அதனால் அது D-அளவு கோலின் எந்த அளவு கோலுடனும் பொருந்தாமல் நிற்கும். ஆகவே, நழுவும் அளவுச் சட்டத்தை வலமிருந்து இடமாக நகர்த்தி C-அளவு கோலின் வலப்பக்கக் குறியீடாகிய 1 ஐ 48D யுடன் பொருத்தி, காட்டியை 64C க்கு நகர்த்த வேண்டும். இப்போது நழுவும் சட்டம் நகராச் சட்டத்தைவிட்டு வெளியே சிறிது நீட்டிக்கொண்டிருப்பதைக் காண லாம். இந்நிலையில் மயிர்க்கோடு D-அளவு கோலில் பொருந்தும்

அளவு கோட்டிலிருந்து 48×64 இன் பெருக்கற்பலன் 3072 என்று அறிகிறோம்.

15·3·2 பெருக்கற்பலனின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை

மேலே விவரிக்கப்பட்டுள்ள இரு பெருக்கல்களிலும் நாம் கீழ்க் கண்ட வேறுபாடுகளைக் காணலாம். 29×32 பெருக்கலில் நழுவும் அளவுச் சட்டத்திலிலுள்ள C அளவு கோலின் இடப்பக்கக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தினோம். ஆகவே, நழுவும் அளவுச் சட்டம் நகராச் சட்டத்தின் வலப்பக்கமாக நீட்டிக்கொண்டிருந்தது. ஆனால் 48×64 பெருக்கலில் C அளவு கோலின் வலப்பக்கக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தினோம். ஆகவே, நழுவும் அளவுச்சட்டம் நகராச் சட்டத்தின் இடப்பக்கமாக நீட்டிக்கொண்டிருந்தது. நழுவும் அளவுச் சட்டம் நகராச் சட்டத்தின் எந்தப் பக்கம் நீட்டிக்கொண்டிருக்கிறது என்பதையறிந்தால், பெருக்கற்பலனிலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் கீழ்க்கண்டவாறு நிர்ணயிக்கலாம்.

பெருக்குகின்ற எண்களிலுள்ள இலக்கங்களின் மொத்த எண்ணிக்கையைக் காணவேண்டும். பெருக்கலின் போது நழுவும் அளவுச் சட்டம் நகராச் சட்டத்தின் வலப்பக்கமாக நீட்டிக்கொண்டிருந்தால், பெருக்கற்பலனிலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை பெருக்கப்படும் காரணிகளிலுள்ள இலக்கங்களின் மொத்த எண்ணிக்கையைவிட 1 குறைவாகயிருக்கும்; இடப்பக்கமாக நீட்டிக் கொண்டிருந்தால் பெருக்கற்பலனிலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையானது காரணிகளிலுள்ள இலக்கங்களின் மொத்த எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகயிருக்கும். மேற்கண்ட 29×32 என்ற பெருக்கலில், காரணிகளின் இலக்கங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $=2+2=4$; நழுவும் சட்டம் வலப்பக்கம் நீட்டிக் கொண்டிருப்பதால் பெருக்கற்பலனிலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை $=4-1=3$ ஆகும். ஆகவே, $29\times32=928$. ஆனால், 48×64 இல் இலக்கங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $=2+2=4$; நழுவும் சட்டம் இடப் பக்கம் நீட்டிக்கொண்டிருப்பதால் பெருக்கற்பலனிலுள்ள எண்ணிக் கையும் 4 தான். ஆகவே, $48\times64=3072$. இவ்வாறு, பல காரணி களைப் பெருக்கும்போது, நழுவும் சட்டம் வலப்பக்கம் நீட்டிக்கொண் டிருக்கும் ஒவ்வொரு தடவைக்கும் 1 வீதம் பெருக்கும் காரணிகளின் மொத்த எண்ணிக்கையிலிருந்து கழித்து மீதி வரும் எண்ணிக்கை தான் பெருக்கற்பலனிலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையென்று அறியவேண்டும். இவ்வாறு கழிக்கப்படும் எண்ணிக்கையை ΣC_1 என்று குறிப்பிடுவோம். ஆகவே, பெருக்கற்பலனின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை $=$ பெருக்கும் காரணிகளின் மொத்த இலக்கங்கள் $-\Sigma C_1$. தசம பின்னத்தில் தசம புள்ளியை யடுத்துள்ள பூச்சியங்

களின் எண்ணிக்கையின் எதிர் எண்ணை அத்தசம பின்னத்தின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையாகக் கொண்டால் மேற்கூறிய விதி தசம பின்னங்களின் பெருக்கற் பலனுக்கும் பொருந்தும். அதாவது, 0·48, 0·048, 0·0048,......ஆகிய தசம பின்னங்களின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை முறையே 0, −1, −2,......ஆகும். தசம பின்னத்துடன் கூடிய பல எண்களைப் பெருக்க, அந்த எண்களின் தசம புள்ளிகளை நீக்கி வந்த முழு எண்களின் பெருக்கற் பலனில் மேற்கூறிய விதிப்படி இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் கணித்து, தசம புள்ளியைக் குறித்துப் பெருக்கற் பலனைப் பெறலாம். உதாரணமாக, 0·29×32-ஐப் பெருக்க, முதலில் 29×32-ஐப் பெருக்கி 928 என்ற விடையைப் பெறுகிறோம். 0·29, 32 ஆகியவற்றின் இலக்கங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $=0+2=2$; நழுவும் அளவுச் சட்டம் வலப்பக்கம் நீட்டிக் கொண்டிருப்பதால் $\Sigma\ C_1=1$; பெருக்கற் பலனில் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை $=2-1=1$; ஆகவே, $0{\cdot}29\times32=9{\cdot}28$ என்று பெறுகிறோம். இதுபோலவே, $4{\cdot}8\times6{\cdot}4=30{\cdot}72$ என்று காணலாம்.

மாதிரி 177

நழுவுச் சட்டத்தின் துணையுடன் 35·2×113-இன் மதிப்பைக் காண்க.

1C-ஐ 35·2 D-யுடன் பொருத்தி, காட்டியை 113C-க்கு நகர்த்துக. மயிர்க் கோட்டின் கீழ் D-அளவு கோலில் 3977 என்று கிடைக்கிறது. நழுவும் அளவுச் சட்டம் வலப்பக்கம் நீட்டியிருப்பதால் $\Sigma\ C_1=1$. ஆகவே, பெருக்கற் பலனின் இலக்கங்கள் $=2+3-1=4$. ஆகவே,

$$35{\cdot}2\times113=3977.$$

மாதிரி 178

நழுவுச் சட்டத்தைப் பயன்படுத்தி 124×2·26×310-இன் மதிப்பைப் பெறுக.

1C-யை 124D-யுடன் பொருத்தி, காட்டியை 226C-க்கு நகர்த்தவும். இப்பொழுது மயிர்க்கோட்டின் கீழுள்ள D-யின் அளவுக் கோடுதான் 124×226-இன் பெருக்கற்பலனைக் கொடுக்கும். ஆனால், இப்பெருக்கற் பலன் நமக்கு வேண்டியதில்லை. ஆகவே, இந்த அளவுக் கோட்டை அடுத்த பெருக்கலின் தொடக்கக் கோடாகக் கருதி 1C-யை மயிர்க் கோட்டுடன் பொருத்திப் பின்னர், காட்டியை 31C-க்கு நகர்த்தவும். இப்பொழுது மயிர்க்கோட்டின் கீழேயுள்ள D-யின் அளவு கோட்டிலிருந்து 8687 என்று கிடைக்கிறது. இத்

தொடர் பெருக்கலின்போது, இரு பெருக்கல்களின் போதும் நழுவும் சட்டம் வலப்பக்கமே நீட்டிக்கொண்டிருப்பதால் $\Sigma C_1 = 2$. ஆகவே, பெருக்கற் பலனிலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை $= 3+1+3-2 = 5$. ஆகவே,

$$124 \times 2{\cdot}26 \times 3{,}0 = 86870$$

என்று தோராயமாகப் பெறுகிறோம்.

குறிப்பு: 310 என்ற எண்ணைப் பூச்சியத்தை நீக்கி 31 என்றே எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

மாதிரி 179

$1{\cdot}75 \times 550 \times 86$-இன் மதிப்பைக் காண்க.

1C-யை 175D-யுடன் பொருத்தி, காட்டியை 55 C-க்கு நகர்த்தவும். பின்னர் 1C-யைக் காட்டியின் கீழ்ப்பொருத்தவும். இப்பொழுது காட்டியை 86C-க்கு நகர்த்தினுல் அது D-அளவு கோலைத் தாண்டி வெளியே நிற்கும். ஆகவே, 1C-யை 175D-யுடன் பொருத்தி, காட்டியை 55C-க்கு நகர்த்திய பின் C அளவு கோலின் வலப் பக்கக் குறியீட்டைக் காட்டியின் கீழ்ப் பொருத்தி, காட்டியை இடப்பக்கமாக நகர்த்தி 88-உடன் பொருத்தி, மயிர்க் கோட்டின் கீழே D அளவு கோலில் பார்த்தால் 8278 என்று கிடைக்கும்.

காரணிகளின் மொத்த இலக்கங்கள்	$= 1+3+2 = 6$
ΣC_1	$= 1$
ஆகவே, பெருக்கற் பலனின் இலக்கங்கள்	$= 5$

ஆகவே, $1{\cdot}75 \times 550 \times 86 = 82780$.

மாதிரி 180

$0{\cdot}003 \times 23{\cdot}4 \times 116 \times 21{\cdot}2 \times 53{\cdot}1 \times 0{\cdot}9$-இன் மதிப்பைக் காண்க.

1C-யை 3D-யுடன் பொருத்துக. காட்டியை 234C-க்கு நகர்த்திப் பின் 1C-யைக் காட்டியின் கீழே பொருத்தி, காட்டியை 116C-க்கு நகர்த்தவும். இப்பொழுது காட்டியின் கீழே D அளவு கோலில் $3 \times 234 \times 116$-க்குரிய அளவு கோடு கிடைக்கிறது. பின்னர், 1C-யைக் காட்டியின் கீழே பொருத்தி. காட்டியை 212-க்கு நகர்த்தி, மீண்டும் 1C-யைக் காட்டியின் கீழே பொருத்தி, காட்டியை 531C-க்கு நகர்த்த வேண்டும். மீண்டும் 1C-யைக் காட்டியின் கீழேகொண்டு வந்து பொருத்தி, காட்டியை 9C-க்கு நகர்த்தினுல், மயிர்க்கோட்டின் கீழே D அளவு கோலில் 8249 என்று கிடைக்கும்.

மேற்கூறப்பட்ட செயல்களில் C-யின் இடப்பக்கக் குறியீட்டைப் பொருத்த முடியாதபோது வலப்பக்கக் குறியீட்டைப் பொருத்த வேண்டுமென்பது தெரிந்ததே. இப்பொழுது,

காரணிகளின் மொத்த இலக்கங்கள் $= -2+2+3+2+2+0$
$= 7$

மூன்று பெருக்கல்களின்போது, நழுவும் சட்டம் வலப்பக்கம் நீட்டிக்கொண்டிருப்பதால் $\Sigma\ C_1 = 3$.

ஆகவே, பெருக்கற் பலனில் இலக்கங்கள் $= 7 - 3 = 4$.

ஆகவே, வேண்டிய பெருக்கற் பலன் $= 8249$.

மாதிரி 181

$3 \cdot 14 \times 2 \cdot 67 \times 0 \cdot 002 \times 0 \cdot 312 \times 98 \cdot 2 \times 538$-இன் மதிப்பைக் காண்க. (நழுவுச் சட்டத்தைப் பயன்படுத்தும் முறையை விளக்க வேண்டாம்.)

காரணிகளின் மொத்த இலக்கங்கள் $= 1+1-2+0+2+3 = 5$.
$\Sigma\ C_1 = 2$

$\therefore$ பெருக்கற் பலனில் இலக்கங்கள் $= 5 - 2 = 3$.

ஆகவே, பெருக்குத் தொகை $= 285 \cdot 3$.

15·3·2 வகுத்தல்

x-ஐ y-ஆல் வகுக்க வேண்டுமெனக் கொள்க. முதலில், காட்டியை x D-க்கு நகர்த்த வேண்டும். பின், y C-யைக் காட்டியின் கீழே பொருத்தினால் 1 C-யின் கீழே D-யில் காணப்படும் அளவு தான் வேண்டிய ஈவு ஆகும். இதிலுள்ள இலக்கங்கள் = தொகுதி x-இலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை—பகுதி y-யிலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை + எத்தனை தடவைகள் நழுவும் சட்டம் வலப்பக்கம் நீட்டியிருந்ததோ அத்தனை ஒன்றுகள். நழுவும் சட்டம் வலப்பக்கம் $\Sigma\ C_2$ தடவைகள் வலப்பக்கம் நீட்டியிருந்ததாகக் கொண்டால் ஈவிலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை = தொகுதியிலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை—பகுதியிலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை $+ \Sigma C_2$ ஆகும்.

மாதிரி 182

$\dfrac{3 \cdot 17}{1 \cdot 92}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

காட்டியை 317D யுடன் பொருத்திப் பின்னர் 192C யைக் காட்டியின் கீழே கொண்டு வந்து 1C க்கு நேர் D யில் பார்த்தால்

165 என்று கிடைக்கும். மேலும், நழுவும் சட்டம் வலப்பக்கம் நீட்டிக் கொண்டிருப்பதால் $\Sigma C_2 = 1$.

$\therefore$ ஈவிலுள்ள இலக்கங்கள் $= 1 - 1 + 1 = 1$.

$$\therefore \quad \frac{3 \cdot 17}{1 \cdot 92} = 1 \cdot 65$$

மாதிரி 183

$\dfrac{6 \cdot 28 \times 27 \cdot 5}{0 \cdot 2351 \times 0 \cdot 0031}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

முதலில் $6 \cdot 28 \times 27 \cdot 5$ இன் மதிப்பைக் காண்க. பெருக்கற் பலன் 172·7 என்று கிடைக்கும். பின், $0 \cdot 2351 \times 0 \cdot 0031$ இன் மதிப்பைக் காண்க. பெருக்கற் பலன் 0·000729 என்று கிடைக்கும். இப்பொழுது 1727 ஐ 729 ஆல் வகுக்கவும். D யில் 2369 என்று கிடைக்கும்.

172·7 இல் உள்ள இலக்கங்கள் $= 3$.

0·000729 இல் உள்ள இலக்கங்கள் $= -3$.

$$\Sigma C_2 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{172 \cdot 7}{0 \cdot 000729} \text{இல் உள்ள இலக்கங்கள்} = 3 - (-3) + 0$$
$$= 6.$$

$$\therefore \quad \frac{172 \cdot 7}{0 \cdot 000729} = 236900.$$

மாதிரி 184

$\dfrac{6 \cdot 28 \times 322 \times 432}{1095 \times 896 \times 2 \cdot 19}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

முதலில் காட்டியை 628 D யுடன் பொருத்தி, 1095 C யைக் காட்டியின் கீழே கொண்டு வரவும். $C_2 = 1$ என்று காணலாம். இப்பொழுது, காட்டியை 1C க்கு நகர்த்தினால் $\frac{628}{1095}$ இன் மதிப்பை D யில் காணலாம். ஆனால் அம்மதிப்புத் தேவையில்லையாதலால் காட்டியை அடுத்த எண் 322C க்கு நகர்த்தவும். ஆனால் இப்பொழுது காட்டியின் மயிர்க்கோடு D க்கு வெளியே யிருப்பதால், காட்டியை இடது 1C க்கு நகர்த்திப் பின் நழுவும் அளவுச் சட்டத்தை இடப்புறமாக நகர்த்தி, வலது 1C யைக் காட்டியின் கீழே கொண்டு வரவும். இப்பொழுது காட்டியை 322C க்கு நகர்த்தவும். பின்னர், 896C யைக் காட்டியின் கீழே கொண்டு வந்து, காட்டியை 432C க்கு நகர்த்தவும். ஆனால், காட்டியானது D க்கு வெளியே

இடப்பக்கமாக நீட்டியிருப்பதைப் பார்க்கலாம். ஆகவே, காட்டியை வலது 1C க்கு நகர்த்தி, நழுவும் சட்டத்தை இடது 1C காட்டியின் யின் கீழே வருமாறு நகர்த்த வேண்டும். இப்பொழுது காட்டியை 432C க்கு நகர்த்தவும். நகரும் அளவு கோல் வலப்பக்கமாக நீட்டியிருப்பதால் $C_1=1$ என்று கிடைக்கிறது. இறுதியாக, 219C யைக் காட்டியின் கீழே கொண்டு வரவும். இப்பொழுது நழுவும் சட்டம் மீண்டும் வலப்பக்கம் நீட்டியிருப்பதால் $C_2=1$ என்று கிடைக்கிறது. ஆகவே, $\Sigma C_1=1$, $\Sigma C_2=2$ என்று கிடைக்கிறது. இப்பொழுது, 1C யின் கீழே D யின் அளவு 406 என்று கிடைக்கும்.

தொகுதியின் இலக்கங்கள் $=1+3+3=7$

பகுதியின் இலக்கங்கள் $=4+3+1=8$

ஆகவே, விடையிலுள்ள இலக்கங்கள் $=7-8-\Sigma C_1+\Sigma C_2$

$$=7-8-1+2$$
$$=0$$

ஆகவே, விடை $=0{\cdot}406$.

15·3·3 தலைகீழ் மதிப்புக் காணல்

எண்களின் தலைகீழ் மதிப்புக்களை நழுவுச் சட்டத்தின் உதவியால் மிக எளிதாகப் பெறலாம். ஒரு எண்ணின் தலைகீழ் மதிப்பு என்பது 1 ஐ அந்த எண்ணால் வகுத்துக் கிடைக்கப் பெறும் ஈவு ஆகும். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்ணுக்குரிய C-அளவு கோட்டை 1D யில் பொருத்தி, 1C க்குக் கீழே D யில் பார்த்தால் அந்த எண்ணின் தலைகீழ் மதிப்புக் கிடைக்கும். தலைகீழ் மதிப்பின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையைப் பின்வருமாறு கணிக்க வேண்டும்.

தலைகீழ் மதிப்பைக் காணும்போது, நழுவும் அளவுச் சட்டம் வலது அல்லது இடது ஆகிய எந்தப் பக்கம் நீட்டிக் கொண்டிருந்தாலும் ஒரே மதிப்புத்தான் கிடைக்கும். ஆகவே, தலைகீழ் மதிப்பின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையைப் பெற 1-இலிருந்து அந்த எண்ணின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் கழிக்க வேண்டும். ஆனால், அந்த எண் 10, 100, 1000,...... என்ற 10 இன் படிகளாகயிருப்பின் இந்த விதியைப் பயன்படுத்தக் கூடாது. ஆனால் இவைகளின் தலைகீழ் மதிப்புக்கள் முறையே 0·1, 0·01, 0,001,...... என்று எளிதில் காணலாம்.

மாதிரி 185

2·5 இன் தலைகீழ் மதிப்பைக் காண்க.

முதலில் 25C யை 1D யுடன் பொருத்துக. இப்பொழுது 1C க்கு நேராகவுள்ள D யின் அளவு 4 என்று காண்கிறோம். ஆனால் தலைகீழ் மதிப்பிலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை $= 1 - 1 = 0$.

$$\therefore \quad \frac{1}{2 \cdot 5} = 0 \cdot 4$$

15·3·4 வர்க்கமும், வர்க்க மூலமும் காணல்

A, B என்ற அளவு கோல்களின் முக்கிய அளவுக் குறிகள் C, D அளவு கோல்களின் முக்கிய அளவுக் குறிகளைப் போலவே 1, 2, 3, 4,...... என்று மடக்கையளவு தூரங்களில் குறிக்கப்பட்டிருக்கும். ஆனால், A ; B யிலுள்ள ஒவ்வொரு முக்கிய இடைவெளியும் அதற்கு ஒத்த C, D யின் முக்கிய இடைவெளியிலுள்ள அளவு கோடுகளைப் போல் இருமடங்கு அளவு கோடுகளால் பிரிக்கப்பட்டிருக்கும். ஆகவே, C, D அளவு கோல்களில் 2 அங்குல தூரம் log N ஐக் குறிப்பிட்டால், A, B அளவு கோல்களில் அதே 2 அங்குல தூரம் 2 log N (அதாவது log N^2) ஐக் குறிக்கும். ஆகவே, ஒரு எண் C அளவு கோலில் 1 C யிலிருந்து 2 அங்குல தூரத்திலிருந்தால், A அளவு கோலில் 1 A யிலிருந்து 2 அங்குல தூரத்திலுள்ள அளவு கோடு குறிக்கின்ற எண் தான் அந்த எண்ணின் வர்க்கமாகும். அதே போல், ஒரு எண் 2 அங்குல தூரத்தில் A யிலிருந்தால் அதே 2 அங்குல தூரத்தில் C யிலுள்ள அளவு கோடு குறிக்கின்ற எண்தான் அந்த எண்ணின் வர்க்க மூலமாகும். ஆகவே, ஒரு எண்ணின் வர்க்கத்தைக் காண, D-அளவு கோலில் அந்த எண்ணின் அளவுக் கோட்டின் மேல் காட்டியைப் பொருத்தி, அதற்கு நேர் A அளவு கோலிலுள்ள எண்ணைக் காண வேண்டும். இது போன்று, ஒரு எண்ணின் வர்க்க மூலம் காண, A-அளவு கோலில் அந்த எண்ணின் அளவுக் கோட்டின் மேல் காட்டியைப் பொருத்தி, அதற்கு நேர் D-அளவு கோலிலுள்ள எண்ணைக் காண வேண்டும். அதுவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்ணின் வர்க்க மூலமாகும். ஆனால், A-அளவு கோலில் 1, 2, 3,..., 9, 1, 2, 3,......, 9, 1 என்று இரண்டு அளவு கோல்கள் இருப்பதைக் காணலாம். இவற்றை இடது அளவு கோல், வலது அளவு கோல் என்று அழைக்கலாம். ஆகவே, வர்க்க மூலம் காண வேண்டிய எண்ணின் இலக்கங்கள் இரட்டையெண்ணிக்கையிலிருந்தால் அந்த எண்ணின் வர்க்க மூலத்தை A யின் வலது அளவு கோலிலிருந்து பெற வேண்டும். அந்த எண்ணின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை ஒற்றையெண்ணுயிருந்தால் வர்க்க மூலத்தை A யின் இடது அளவு கோலிலிருந்து பெற வேண்டும்.

15·3·5 வர்க்கம், வர்க்கமூலம் ஆகியவற்றின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காணல்

ஒரு எண்ணின் வர்க்கம் A யின் வலது அளவு கோலில் காணப் பட்டால் அந்த வர்க்கத்தின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை $= 2 \times$ அந்த எண்ணின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையாகும். அதாவது, d என்பது அந்த எண்ணின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையையும் D என்பது அதன் வர்க்கத்தின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையையும் குறிப்பிட்டால், $D = 2d$ ஆகும். ஆனால், அந்த எண்ணின் வர்க்கம் A யின் இடது அளவு கோலில் காணப்பட்டால் $D = 2d - 1$ ஆகும். இதுபோன்று, வர்க்க மூலங்களின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையையும் காணலாம். A யின் வலது அளவு கோலிலுள்ள எண்ணின் வர்க்க மூலத்தின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை $d = \frac{D}{2}$ ஆகும். A யின் இடது அளவு கோலிலுள்ள எண்ணின் வர்க்க மூலத்தின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை $d = \frac{D+1}{2}$ ஆகும்.

மாதிரி 186

26·54 இன் வர்க்க மூலம் காண்க.

வலது 2654 இல் காட்டியைப் பொருத்தி அதற்கு நேர் D அளவு கோலில் பார்த்தால் 516 என்று கிடைக்கும். இங்கு $D = 2$. (இரட்டையெண்) $\therefore d = \frac{D}{2} = 1$

$$\therefore \sqrt{26{\cdot}54} = 5{\cdot}16$$

மாதிரி 187

$\sqrt{267{\cdot}4}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

இலக்கங்கள் ஒற்றை யெண்ணிக்கையிலிருப்பதால் இடது 2674 இல் காட்டியைப் பொருத்தி அதற்கு நேர் Dயில் பார்த்தால் 1635 கிடைக்கும். இங்கு $D = 3$ (ஒற்றையெண்)

$$\therefore d = \frac{D+1}{2} = 2$$

$$\therefore \sqrt{267{\cdot}4} = 16{\cdot}35.$$

மாதிரி 188

$(46{\cdot}2)^2$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

காட்டியை 46·2 D யில் பொருத்தி அதற்கு நேர் A யில் பார்த்தால் வலது A யில் 2134 என்று கிடைக்கும். இங்கு $d = 2$; வர்க்கம் வலது A யில் கிடைப்பதால், $D = 2\,d = 4$.

$$\therefore (46{\cdot}2)^2 = 2134 \text{ (தோராயமாக)}$$

மாதிரி 189

$\sqrt{0.000227}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

$$0.000227 = 10^{-4} \times 2.27$$

$$\therefore \sqrt{0.000227} = 10^{-2}\sqrt{2.27}.$$

2.27 இல் D = 1 (ஒற்றையெண்). ஆகவே, இடது 227A யில் காட்டியைப் பொருத்தி அதற்கு நேர் D யில் பார்த்தால் 1505 கிடைக்கும்.

$$d = \frac{D+1}{2} = 1.$$

$$\therefore \sqrt{2.27} = 1.505$$

$$\therefore \sqrt{0.000227} = 10^{-2} \times 1.505 = 0.01505.$$

15.3.6 முப்படியும் முப்படி மூலமும் காணல்

K, C-அளவு கோல்கள் எண்களின் முப்படிகளையும், முப்படி மூலங்களையும் காணப் பயன்படுகின்றன. இவ்விரு அளவு கோல் களும் நழுவும் அளவுச் சட்டத்தின் மேலேயே அமைந்துள்ளன. ஒரு எண்ணின் முப்படியைக் காண C யிலுள்ள அந்த எண்ணுக்குரிய அளவுக்குறியில் காட்டியைப் பொருத்தி, மயிர்க் கோட்டின் கீழ் K-அளவு கோலில் பார்த்தால், அந்த எண்ணின் முப்படி மதிப்புக் கிடைக்கும். இதுபோல், ஒரு எண்ணின் முப்படி மூலம் காண K-அளவு கோலில் அந்த எண்ணுக்குரிய அளவுக்குறியில் காட்டியைப் பொருத்தி, மயிர்க் கோட்டின் கீழ் C-அளவு கோலில் பார்த்தால் அந்த எண்ணின் முப்படி மூலம் கிடைக்கும். முப்படி மூலத்திலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிட வேண்டும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்ணின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை = N எனக் கொள்க.

முப்படி மூலத்தின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை = n எனக் கொள்க.

N ஆனது மூன்றின் மடங்கானால், $n = \frac{N}{3}.$

N ஆனது மூன்றின் மடங்குக்கு 1 குறைவானால், $n = \frac{N+1}{3}.$

N ஆனது மூன்றின் மடங்குக்கு 2 குறைவானால், $n = \frac{N+2}{3}$

மாதிரி 190

$\sqrt[3]{638}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

638 K யில் காட்டியைப் பொருத்தினுல் மயிர்க் கோட்டின்கீழ் C யில் 86 என்று கிடைக்கும். இங்கு $N=3 \therefore n=1$.

$$\therefore \sqrt[3]{638}=8{\cdot}6$$

மாதிரி 191

$(13{\cdot}5)^3$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

13·5 C யில் காட்டியைப் பொருத்தினுல் மயிர்க் கோட்டின்கீழ் 246 என்று கிடைக்கும். இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையைப் பழக்கத்தின் மூலம் நிர்ணயிக்க வேண்டும். இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை 4 என்று அறிகிருேம். ஆகவே,

$$(13{\cdot}5)^3=2460 \text{ (தோராயமாக)}$$

மாதிரி 192

$\sqrt[3]{0{\cdot}00001228}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

$0{\cdot}00001228=10^{-6}\times 12{\cdot}28.$

$\therefore \sqrt[3]{0{\cdot}00001228}=10^{-2}\times \sqrt[3]{12{\cdot}28.}$

ஆகவே, 1228 K-யில் காட்டியைப் பொருத்தினுல் C-யில் 2307 என்று கிடைக்கிறது. இங்கு $N=2 \therefore n=\frac{2+1}{1}=1$

$$\therefore \sqrt[3]{12{\cdot}28}=2{\cdot}307$$

$$\therefore \sqrt[3]{0{\cdot}00001228}=10^{-2}\times 2{\cdot}307$$
$$=0{\cdot}02307$$

15.3.7 பின்னப் படிகளேயும் பின்னப் படி மூலங்களேயும் காணல்

நகராச் சட்டத்தின் கீழ் ஓரத்தில் ஒன்றன்கீழ் ஒன்ருக மூன்று வரிசைகளில் அமைந்துள்ள LL_1, LL_2, LL_3 அளவு கோல்களும், இதேபோல் மேல் ஓரத்தில் மூன்று வரிசைகளில் அமைந்துள்ள LLO_1, LLO_2, LLO_3 அளவு கோல்களும் எண்களின் பின்னப் படிகளேயும் (fractional powers), பின்னப் படி மூலங்களேயும் (fractional roots) காணப் பயன்படுகின்றன. 1ஐவிட அதிகமான எண்களுக்கு LL அளவு கோல்களேயும், 1க்குக் குறைவான தசம பின்னங்களுக்கு LLO அளவு கோல்களேயும் பயன்படுத்த வேண்டும். LL-அளவு கோல்களில், LL_1-இல் 1·01 முதல் 1·11 வரையுள்ள

எண்களும், LL_2-இல் 1·1 முதல் 3 வரையுள்ள எண்களும், LL_3-இல் 2·5 முதல் 10^5 வரையுள்ள எண்களும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. ஆகவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்ணுக்குரிய அளவு கோலை மிக எளிதில் தெரிவு செய்து கொள்ளலாம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்ணுக்குரிய LL அளவு கோலில் அந்த எண்ணின் அளவு கோட்டுக்கு நேர் 1 C-யைப் பொருத்தி, C-யில் அந்த எண்ணின் படியின் மதிப்பைக் குறிக்கும் அளவு கோட்டில் காட்டியைப் பொருத்தி, மயிர்க் கோட்டின்கீழ் LL அளவு கோலில் அந்த எண்ணின் படியின் மதிப்பைக் கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம்.

a^x-இன் மதிப்பைக் காண வேண்டுமெனக் கொள்க.

(i) $1 < x < 10$; $a > 1$.

a^x-இன் மதிப்பு a-யைவிட அதிகமாகயிருக்கும். a-க்குரிய LL அளவு கோலில் a-க்கு நேர் காட்டியைப் பொருத்தி, 1 C-யைக் காட்டியின்கீழ்க் கொண்டுவந்து, பின்னர், காட்டியை C-யில் x-க்கு நகர்த்த வேண்டும். இப்பொழுது மயிர்க் கோடு a-க்கு வலப்பக்கமாகயிருந்தால், a-க்குரிய LL அளவு கோலிலேயே மயிர்க் கோட்டின் கீழ் a^x-இன் மதிப்புக் கிடைக்கும். ஆனால் மயிர்க் கோடு a-க்கு இடப்பக்கமாகயிருந்தால் a-க்குரிய LL அளவு கோலுக்கு அடுத்த மேல் வரிசை LL அளவு கோலில் மயிர்க் கோட்டின்கீழ் a^x-இன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

மாதிரி 193

$(3{\cdot}75)^{2{\cdot}96}$ இன் மதிப்பைப் பெறுக. (சென்னை '64 செப்.)

இங்கு 3·75 என்பது LL_3 அளவு கோலில் உள்ளது. ஆகவே, 3·75 LL_3-யில் காட்டியைப் பொருத்தி, 1 C-யைக் காட்டியின் கீழ்க் கொண்டுவந்து, பின்னர் காட்டியை 2·96 C-க்கு நகர்த்த வேண்டும். இப்பொழுது மயிர்க் கோடு 3·75 LL_3-க்கு வலப்பக்கமாகவே யிருப்பதைக் காணலாம். ஆகவே, மயிர்க் கோட்டின்கீழ் LL_3 அளவு கோலில் வேண்டிய மதிப்பு 50 என்று கிடைக்கிறது.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்ணின் படியின் மதிப்பு 10க்கும் 1000க்கும் இடையேயிருப்பின், படியின் மதிப்பு 1க்கும் 10க்கு மிடையேயுள்ள மதிப்பாக மாறும் வண்ணம் தசம புள்ளியை 1 அல்லது இரண்டு இடங்களுக்கு இடப்பக்கமாக நகர்த்தி வைத்துக் கொண்டு மேற்கண்டவாறு செய்ய வேண்டும். பின்னர், தசம புள்ளியைத் தள்ளிவைத்த இடங்களின் எண்ணிக்கைக்குத் தக்கவாறு a-க்குரிய LL அளவு கோலுக்கு நேர் மேலே, அல்லது

அதற்கும் மேலேயுள்ள LL அளவு கோலில் விடையைக் காண வேண்டும்.

மாதிரி 194

$(1{\cdot}25)^{25}$ இன் மதிப்பைப் பெறுக.

25 என்பது 10க்கும் அதிகமாகயிருப்பதால் தசம புள்ளியை ஒரு இடம் இடப்பக்கமாகத் தள்ளிவைத்துப் படியின் மதிப்பை 2·5 என வைத்துக்கொள்க. இப்பொழுது, காட்டியை 1·25 LL_2 இல் பொருத்தி, 1 C-யைக் காட்டியின் கீழ்க் கொண்டுவந்து, பின்னர், காட்டியை 2·5 C-க்கு நகர்த்தி, LL_2-க்கு ஒரு வரிசை மேலே LL_3யில் (ஏனெனில் 25ஐ 1 தசம இடம் தள்ளிவைத்து 2·5 என்று மாற்றியிருப்பதால்) விடையை 264 என்று பெறுகிறோம்.

ஆகவே, $(1{\cdot}25)^{25} = 264$ (தோராயமாக).

(ii) $0{\cdot}1 < x < 1$ எனக் கொள்க.

இப்போது a^x இன் மதிப்பு a-யைவிடக் குறைவாகயிருக்கும். ஆகவே, மயிர்க் கோடு a-க்குரிய LL அளவு கோலில் a-க்கு இடப் பக்கமாகயிருந்தால், அதே LL அளவு கோலில் மயிர்க் கோட்டின் கீழ் விடையைப் பெறலாம். ஆனால், மயிர்க் கோடு a-க்கு வலப் பக்கமாகயிருந்தால் அந்த LL அளவு கோலுக்கு அடுத்து கீழேயுள்ள அளவு கோலில் மயிர்க் கோட்டின் கீழ் விடையைப் பெறலாம். x-இன் மதிப்பு $0{\cdot}001 < x < 0{\cdot}1$ ஆகயிருந்தால், x-இன் தசம புள்ளியை $0{\cdot}1 < x < 1$ ஆகயிருக்குமாறு ஒன்று அல்லது இரண்டு இடங்களுக்கு வலப்பக்கமாக நகர்த்தி, முன்போல் செய்து, தசம புள்ளியை நகர்த்திய இடங்களின் எண்ணிக்கைக்குத் தக்கவாறு a-க்குரிய LL அளவு கோலுக்கு நேர் கீழே அல்லது அதற்கும் கீழேயுள்ள அளவு கோலில் விடையைக் காணலாம்.

மாதிரி 195

$(21{\cdot}5)^{0\ 19}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

21·5 LL_3-யில் காட்டியைப் பொருத்தி, 1C-யைக் காட்டியின் கீழ்க் கொண்டுவந்து, பின்னர் காட்டியை 0·19 C-க்கு நகர்த்த வேண்டும். ஆனால் C-யில் அளவுக் குறிகள் 1 இலிருந்து தொடங்குவதால் 0·19 கிடையாது. இப்பொழுது மயிர்க் கோடு LL_3-யில் 21·5க்கு வலப்பக்கமிருப்பதைக் காணலாம். 1·9 என்பது 1க்கும் 10க்குமிடையிலிருப்பதாலும், மயிர்க் கோடு 21·5 LL_3-க்கு வலப் பக்கமிருப்பதாலும், $(21{\cdot}5)^{1{\cdot}9}$ இன் மதிப்பை LL_3 அளவு கோலிலேயே மயிர்க் கோட்டின் கீழ்ப் பார்க்க வேண்டும். ஆனால் 0·19 என்ற

படியின் மதிப்பை ஒரு இடம் தசம புள்ளியை நகர்த்தி 1·9 என்று மாற்றியிருப்பதால் $(21\cdot5)^{0\cdot19}$ இன் மதிப்பை LL_3-க்கு அடுத்துக் கீழே யுள்ள LL_2 அளவு கோலில் மயிர்க் கோட்டின் கீழே காண வேண்டும். ஆகவே,

$$(21\cdot5)^{0\cdot19}=1\cdot76 \text{ என்று காணலாம்.}$$

மாதிரி 196

$(86\cdot0)^{0\cdot062}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

முதலில் 0·062 இன் தசம புள்ளியை ஒரு இடம் வலப்பக்கம் நகர்த்தி 0·62 என்று மாற்றிக் கொள்ளவும். காட்டியை 86 LL_3-யில் பொருத்தி, 1C-யைக் காட்டியின் கீழ்க் கொண்டு வரவும். C-யில் 0·62 இல்லையாகையால் காட்டியை 6·2C-க்கு நகர்த்த வேண்டும். ஆனால் 6·2C நகராச் சட்டத்திற்கு வெளியேயிருப்பதால் காட்டியை 6·2C-க்கு நகர்த்த முடியாது. ஆகவே, இடது 1C-க்குப் பதிலாக வலது 1C-யை காட்டியின் கீழ்க் கொண்டுவந்து, பின்னர் காட்டியை 6·2C-க்கு நகர்த்தவும். இப்பொழுது மயிர்க் கோடு 86 LL_3-க்கு இடப்பக்கமாகயிருப்பதைக் காணலாம். ஆகவே, $(86\cdot0)^{6\cdot2}$ இன் மதிப்பை LL_3-க்கு மேலேயிருக்கும் அளவு கோலில் பார்க்க வேண்டும். ஆனால் 0·62C-க்குப் பதிலாக 6·2C என்று மாற்றியிருப்பதால் $(86\cdot0)^{0\cdot62}$ இன் மதிப்பை ஒரு வரிசை கீழேயுள்ள LL அளவு கோலில், அதாவது LL_3 அளவு கோலிலேயே பார்க்க வேண்டும். மேலும் 0·062 இன் தசம புள்ளியை ஒரு இடம் வலப் பக்கமாக நகர்த்தி 0·62 என்று மாற்றியிருப்பதால், LL_3-க்கு ஒரு வரிசை கீழேயுள்ள LL_2 அளவு கோலில் மயிர்க் கோட்டின் கீழ் விடையை 1·318 என்று காண்கிறோம். அதாவது,

$$(86\cdot0)^{0\cdot062}=1\cdot318.$$

(iii) $a < 1$.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்ணின் மதிப்பு 1க்கும் குறைவாக யிருந்தால், LL அளவு கோல்களுக்குப் பதில் LLO அளவு கோல் களைப் பயன்படுத்த வேண்டும். செய்முறைகளில் மாறுதல் எதுவும் இல்லை.

மாதிரி 197

$(0\cdot953)^{5\cdot62}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

0·953 என்பது LLO_1 அளவு கோலில் இருக்கிறது. ஆகவே, 0·953 LLO_1 இல் காட்டியைப் பொருத்தி 1C-யைக் காட்டிக்குக்

கீழ்க் கொண்டு வரவும். இப்பொழுது காட்டியை 5·62C-க்கு நகர்த்த வேண்டும். ஆனால் 5·62C யானது நகராச் சட்டத்திற்கு வெளியேயிருப்பதால், காட்டியை 5·62C-க்கு நகர்த்த முடியாது. ஆகவே, வலது 1C-யைக் காட்டிக்குக் கீழ்க் கொண்டுவந்து, காட்டியை 5·62 C-க்கு நகர்த்தினால் மயிர்க் கோட்டின்கீழ் LLO_2 இல் விடை 0·763 என்று கிடைக்கும்.

மாதிரி 198

$(0{\cdot}875)^{0{\cdot}25}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

0·875 LLO_2 இல் காட்டியைப் பொருத்தி 1C-யைக் காட்டியின் கீழ்க் கொண்டு வரவும். இப்பொழுது காட்டியை 2·5C-க்கு நகர்த்தினால் LLO_1 இல் மயிர்க் கோட்டின்கீழ் விடை 0·96715 என்று கிடைக்கிறது.

மாதிரி 199

$(0{\cdot}656)^{1/21{\cdot}2}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

$\frac{1}{21{\cdot}2}$ ஐ $\frac{1}{2{\cdot}12}$ என்று மாற்றி வகுத்தல் முறையைப் பின்பற்றி 0·656-க்குரிய LLO அளவு கோலுக்கு முந்திய அளவு கோலில் விடையைக் காணவேண்டும்.

0·656 LLO_2 இல் காட்டியைப் பொருத்தி, 2·12 Cயைக் காட்டியின் கீழ்க்கொண்டு வந்து, பின்னர், காட்டியை 1 Cக்கு நகர்த்த வேண்டும். இப்பொழுது LLO_2க்கு முந்திய LLO, அளவு கோலில் மயிர்க் கோட்டின் கீழ் விடை 0·9803 என்று கிடைக்கிறது.

iv எதிரெண்படிகள் : (அதாவது $x<0$)

$a>1$ ஆனால், LL-அளவு கோலைக் கொண்டு செயல்களைத் தொடங்கி, விடைகளை LL-அளவு கோலுக்கு ஒத்த LLO-அளவு கோலில் காணவேண்டும். $a<1$ ஆனால், LLO-அளவு கோலைக் கொண்டு தொடங்கி, விடைகளை LLO-அளவு கோலுக்கு ஒத்த LL-அளவு கோலில் காணவேண்டும்.

மாதிரி 200

$(1{\cdot}025)^{-0{\cdot}6}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

LL_1 அளவு கோலில் 1·025 இல் காட்டியைப் பொருத்தி, வலது 1 Cயைக் காட்டியின் கீழ்க்கொண்டு வந்து, பின்னர் காட்டியை 6 Cக்கு நகர்த்தவும். இப்பொழுது LLO_1 இல் மயிர்க் கோட்டின் கீழ் 0·98525 என்று விடை கிடைக்கிறது.

மாதிரி 201

$(0{\cdot}925)^{-2{\cdot}36/4{\cdot}65}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

0·925 LLO_1 இல் காட்டியைப் பொருத்தி, 4·65Cயைக் காட்டியின் கீழ்க் கொண்டு வந்து, பின்னர் காட்டியை 2·36க்கு நகர்த்தவும். இப்பொழுது LL_1 அளவு கோலில் மயிர்க் கோட்டின் கீழ் 1·0402 என்று விடை கிடைக்கிறது.

மாதிரி 202

நழுவுச் சட்டத்தின் உதவியால் $\frac{\sqrt{86{\cdot}2}\times 35\times 10{\cdot}68}{98\times 57}$ இன் மதிப்பைக் காண்க. (சென்னை '68 ஏப்.)

காட்டியை 86·2 A யுடன் பொருத்தினால் மயிர்க்கோட்டின் கீழ் D யில் $\sqrt{86{\cdot}2}$ கிடைக்கும். இப்பொழுது 98C யைக் காட்டியின் கீழ்க் கொண்டு வந்து, காட்டியை 1 Cக்கு நகர்த்தவும். இப்பொழுது நழுவும் சட்டம் இடப் பக்கமாக நீட்டிக் கொண்டிருக்கும். மயிர்க் கோட்டின் கீழ் Dயில் $\frac{\sqrt{86{\cdot}2}}{98}$ இன் மதிப்புக் கிடைக்கும். இப்போது காட்டியை 35 Cக்கு நகர்த்தவும். மயிர்க் கோட்டின் கீழ் D யில் $\frac{\sqrt{86{\cdot}2}}{98}\times 35$ இன் மதிப்புக் கிடைக்கும். இப்போது 57 C யைக் காட்டியின் கீழ்க் கொண்டு வந்து, காட்டியை வலது 1 C க்கு நகர்த்தவும். மயிர்க் கோட்டின் கீழ் D யில் $\frac{\sqrt{86{\cdot}2}\times 35}{98\times 57}$ இன் மதிப்புக் கிடைக்கும். இப்போது காட்டியை 1068 Cக்கு நகர்த்த முடியாது. ஆகவே, 1 Cயைக் காட்டியின் கீழ்க் கொண்டுவந்து பின்னர் காட்டியை 1068 Cக்கு நகர்த்தினால் மயிர்க் கோட்டின் கீழே Dயில் 62 என்று கிடைக்கும்.

விடையிலுள்ள இலக்கங்கள் $=(1+2+2)-(2+2)-1=0$.

ஆகவே, விடை $=0{\cdot}62$.

மாதிரி 203

$\frac{\sqrt{18{\cdot}7}\times\sqrt[3]{14{\cdot}6}}{2{\cdot}31}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

காட்டியை 18·7 A யுடன் பொருத்தி, 2·31 Cயைக் காட்டியின் கீழ்க் கொண்டு வந்து, (நழுவும் சட்டம் இடப்பக்கம் நீட்டியிருக்கும்)

காட்டியை வலது 1 Cக்கு நகர்த்தவும். காட்டியின் கீழ் Dயில் $\frac{\sqrt{18.7}}{2.31}$ இன் மதிப்புக் கிடைக்கும். இப்போது காட்டியை 14·6 Kக்கு நகர்த்தவும். மயிர்க் கோட்டின் கீழ் D யில் 457 என்று கிடைக்கும்.

விடையிலுள்ள இலக்கங்கள் $=(1+1)-1=1$

$\therefore$ விடை $=4.57$

மாதிரி 204

நழுவுச் சட்டத்தின் உதவியால் (i) $x^3=26$, (ii) $x^4=18$ ஆகிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும். (சென்னை '67 ஏப்., 65 செப்.)

(i) $x=\sqrt[3]{26}$. ஆகவே, காட்டியை 26 K யில் பொருத்தினால் C யில் விடை 2·96 என்று கிடைக்கும். அதாவது, $x=2.96$.

(ii) $x^4=18$

$\therefore \quad x^2=\sqrt{18}$.

காட்டியை 18 Aயில் பொருத்தினால் D யில் $\sqrt{18}=4.24$ என்று கிடைக்கும். அதாவது, $x^2=4.24$.

$$\therefore \quad x=\sqrt{4.24}.$$

இப்பொழுது, காட்டியை 4·24 Aயில் பொருத்தினால் D யில் விடை 2·058 என்று கிடைக்கும்.

$\therefore \quad x=2.058$.

15.3.8 திரிகோணக் கணித விகிதங்கள் (Trignometric ratios)

மாதிரி 205

$\frac{400\times\sin 31^\circ\times\sin 75^\circ}{\sin 101^\circ\times\sin 26^\circ}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

காட்டியை 31° S இல் பொருத்தி, D யில் மயிர்க் கோட்டின் கீழ்ப் பார்த்தால் 5·15 என்று கிடைக்கும். இதை 10 ஆல் வகுக்க, $\sin 31^\circ=0.515$ என்று கிடைக்கும்.

இவ்வாறு 75° S, 79° S ($=\sin 101^\circ$), 26° S ஆகியவை ஒவ்வொன்றிலும் காட்டியைப் பொருத்தி, D யில் பார்த்தால் 9·66, 9·81, 4·38 என்ற மதிப்புக்கள் கிடைக்கின்றன. இம் மதிப்புக்களை 10 ஆல் வகுத்தால், $\sin 75^\circ=0.9.66$, $\sin 101^\circ=\sin 79^\circ=0.981$, $\sin 26^\circ=0.438$ என்று காண்கிறோம்.

$$\therefore \quad \frac{400\times\sin 31^\circ\times\sin 75^\circ}{\sin 101^\circ\times\sin 26^\circ}=\frac{400\times0.515\times0.966}{0.981\times0.438}$$

இப்பொழுது 9·81 Cயை 4 D யில் பொருத்துக. (நழுவும் சட்டம் இடப்பக்கம் நீட்டுகிறது). காட்டியை 5·15 Cக்கு நகர்த்தி, 4·38 Cயைக் காட்டியின் கீழ்க் கொண்டு வரவும். (மீண்டும் நழுவும் சட்டம் இடப்பக்கம் நீட்டுகிறது). இப்பொழுது காட்டியை 966 Cக்கு நகர்த்தி D யில் பார்த்தால் 463 கிடைக்கும்.

விடையிலுள்ள இலக்கங்கள் $= (3+0+0)-(0+0)-0 = 3.$

$\therefore$ விடை $= 463.$

மாதிரி 206

நழுவுச் சட்டத்தைப் பயன்படுத்தி

$$\frac{\tan 55^\circ\ 3' \times \sin^2 46^\circ\ 8'}{\sqrt{\cos 54^\circ\ 18'}}$$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

(சென்னை '70 ஏப்.)

T-அளவு கோலில் $\tan\theta$ இன் மதிப்பு $5{\cdot}5^\circ < \theta < 45^\circ$க்கும் $\cot\theta$ இன் மதிப்பு $45^\circ < \theta < 84{\cdot}5^\circ$க்கும்தான் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

ஆகவே, $\tan 55^\circ\ 3' = \dfrac{1}{\cot 55^\circ\ 3'}$ என்று மாற்றி மதிப்பைக் காண வேண்டும்.

காட்டியை 55° 3′ T யில் பொருத்தி D யில் கிடைக்கும் 6·98 ஐ 10 ஆல் வகுத்தால்

$\tan 55^\circ\ 3' = \dfrac{1}{0{\cdot}698}$ என்று கிடைக்கிறது. இப்பொழுது காட்டியை 46°8′S-இல் பொருத்தி A-யில் கிடைக்கும் 52-ஐ 100-ஆல் வகுக்க $\sin^2 46^\circ 8' = 0{\cdot}52$ என்று கிடைக்கிறது. காட்டியை 54°18′S இல் பொருத்தி D-யில் கிடைக்கும் 5·85-ஐ 10-ஆல் வகுக்க $\cos 54^\circ 18' = 0{\cdot}585$ என்று கிடைக்கிறது. பின்னர், காட்டியை 595 A-யில் பொருத்தி D-யில் பார்க்க 765 கிடைக்கிறது. இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிட்டால் $\sqrt{\cos 54^\circ 18'} = \sqrt{0{\cdot}585} = 0{\cdot}765$ என்று கிடைக்கிறது.

$$\therefore \frac{\tan 55^\circ 3' \times \sin^2 46^\circ 8'}{\sqrt{\cos 54^\circ 18'}} = \frac{0{\cdot}52}{0{\cdot}698 \times 0{\cdot}765}$$

இப்பொழுது 698 C-யில் 52D-யைப் பொருத்தி (நழுவும் சட்டம் இடப்பக்கம் நீட்டுகிறது) வலது 1C-க்குக் காட்டியை நகர்த்தி 765 C-யைக் காட்டிக்குக் கீழே கொண்டு வந்து, (நழுவும் சட்டம் இடப்

பக்கம் நீட்டுகிறது) காட்டியை வலது 1C-க்கு நகர்த்தி D-யில் பார்த்தால் 974 கிடைக்கும்.

விடையிலுள்ள இலக்கங்கள் $=0-0=0$.

$\therefore$ விடை $=0{\cdot}974$.

15·4. சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்

மாதிரி 207

$x^2+2x-4=0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

$$x^2+2x=4$$

$$\therefore \quad x+2=\frac{4}{x}.$$

சமன்பாட்டை இவ்வாறு மாற்றியபின் வலது 1 C-யை 4 D யுடன் பொறுத்துக. (இடது 1C-யை 4 D-யுடன் பொருத்தி விடை காண முடியாது). மயிர்க் கோட்டின் கீழே D-யின் அளவுக் குறி யுடன் xஇன் குணகமாகிய 2ஐக் கூட்டினுல் மயிர்க்கோட்டின் கீழ் CI-இன் அளவுக் குறிக்குச் சமமாகும் வண்ணம் காட்டியை நகர்த்த வும். இப்பொழுது D-யில் 1·235 என்று கிடைக்கிறது.

$\therefore$ $x_1=1{\cdot}235$ என்பது ஒரு மூலமாகும்.

ஆனுல் இரண்டு மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$x_1+x_2=-2$$

$$\therefore \quad x_2=-2-x_1$$
$$=-2-1{\cdot}235$$
$$=-3{\cdot}235.$$

ஆகவே, சமன்பாட்டின் மூலங்கள் : $1{\cdot}235, -3{\cdot}235$

மாதிரி 208

$x^2+8x+4=0$ ஐத்தீர்க்கவும்.

$x^2+8x=-4$ (எதிரெண்)

ஆகவே, $f(x)\equiv x^2+8x+4=0$ இல் xஐ $-x$ஆக மாற்றவும்

$$\therefore \quad f(-x)\equiv x^2-8x+4=0$$

$$\therefore \quad 8-x=\frac{4}{x}$$

இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களின் எதிர் எண் மதிப்புக்கள் தாம் வேண்டிய மூலங்களாகும்.

1C-யை 4D-யுடன் பொருத்துக. மயிர்க்கோட்டின் கீழேயுள்ள D-யின் அளவை 8-லிருந்து கழித்தால் CI-இன் அளவுக்குச் சமமாக யிருக்குமாறு காட்டியை நகர்த்தவும். இப்பொழுது D-யில் 7·46 என்று கிடைக்கிறது. ஆகவே,

$x^2-8x=4=0$ இன் ஒரு மூலம் $=7{\cdot}46$.

இருமூலங்களின் மொத்தம் $=8$

$\therefore$ இர்ண்டாவது மூலம் $=8-7{\cdot}46=0{\cdot}54$.

$\therefore$ $x^2+8x+4=0$ இன் மூலங்கள் : $-7{\cdot}46, -0{\cdot}54$.

மாதிரி 209

$x^3+2x=5$ஐத் தீர்க்கவும்.

சமன்பாட்டை $x^2+2=\dfrac{5}{x}$ என்று எழுதவும்.

வலது 1C-யை 5D-யுடன் பொருத்துக. A-யின் அளவு+2=CI-இன் அளவு இருக்குமாறு காட்டியை நகர்த்தவும். இப்பொழுது காட்டியின் கீழே D-யின் அளவு 1·325 என்று கிடைக்கும்.

$\therefore$ $x=1{\cdot}325$ என்பது ஒரு மூலமாகும். மற்ற இரு மூலங்களும் கற்பனையானவை.

மாதிரி 210

$3x^3+4x^2+3x+4=0$ ஐத் தீர்க்கவும். (சென்னை 62 ஏப்.)

$f(x)\equiv 3x^3+4x^2+3x+4=0$.

இச்சமன்பாட்டிற்கு நேர் மூலம் கிடையாது. ஆகவே, x-ஐ $-x$ ஆக மாற்றி வந்த சமன்பாட்டின் நேர் மூலத்தைக் காணவும்.

$f(-x)\equiv 3x^3-4x^2+3x-4=0$

மூலத்தை $\frac{4}{9}$ குறைத்து இரண்டாவது உறுப்பை நீக்கவும். இப்பொழுது மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு.

$$3x^3+\frac{33}{27}x-\frac{776}{243}=0 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, $x^3+0{\cdot}41x-7{\cdot}06=0$.

இதன் நேர் மூலம் 0-க்கும் 1-க்கும் இடையேயிருப்பதால் நழுவுச் சட்டத்தைக் கொண்டு அதைக் காண முடியாது. ஆகவே, மூலத்தை இரண்டு மடங்காக்கிச் சமன்பாட்டை மாற்றவும். எனவே, $y=2x$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\frac{y^3}{8}+\frac{0{\cdot}41}{2}y-1{\cdot}06=0.$$

அதாவது, $y^3+1 \cdot 64y=8 \cdot 48$

$$\therefore\ y^2+1 \cdot 64=\frac{8 \cdot 48}{y}$$

இப்பொழுது, வலது 1C-யை 8·48D-யுடன் பொருத்தி, A-யின் அளவு + 1·64 = CI-இன் அளவு இருக்குமாறு காட்டியை நகர்த்தி D-யில் பார்க்க 1·775 கிடைக்கிறது.

ஆகவே, $y=1 \cdot 775$.

$\therefore\ x=\frac{y}{2}=0 \cdot 8875$.

$\therefore\ f(-x)=0$-இன் மூலம் $=0 \cdot 8875+\frac{4}{9}=1 \cdot 3319$.

$\therefore\ f(x)=0$-இன் மூலம் $=-1 \cdot 3319$.

பயிற்சி 29

கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புக்களை நழுவுச் சட்டத்தின் உதவியால் காண்க :

1. $\frac{6888\times 80}{11\times 54}$
2. $\frac{\cdot 25\times(21 \cdot 63)^2}{6 \cdot 45}$
3. $\sqrt{\frac{1239 \cdot 4}{18 \cdot 73}}$
4. $\frac{3 \cdot 12\times\sqrt{10 \cdot 35}}{(6 \cdot 231)^2}$
5. $\frac{\sqrt{45 \cdot 6}\times 25\times 8 \cdot 67}{67\times 43}$
3. $\sqrt[3]{12 \cdot 28}$
7. $\frac{\sqrt{18 \cdot 7}\times\sqrt[3]{14 \cdot 6}}{2 \cdot 31}$
8. $\sqrt[3]{\frac{96 \cdot 54\cdot\times 76 \cdot 34}{(29 \cdot 4)^2}}$
9. $\frac{6 \cdot 25\times(21 \cdot 63)^{1/3}}{(4 \cdot 27)^{1/2}}$
10. $(245)^{\sqrt{2 \cdot 47}/6 \cdot 33}$
11. $\frac{16 \cdot 8\times \text{Sin } 35^\circ}{\cos 70^\circ}$
12. $\frac{\text{Sin } 43^\circ\times\cos 70^\circ}{5 \text{ Sin } 50^\circ}$
13. $\frac{13 \cdot 2\times\tan 58^\circ}{\text{Sin } 43^\circ\times\cos 56^\circ}$
14. $\frac{12 \cdot 9\times \text{Sin } 54^\circ}{\tan 12^\circ\times\cos 38^\circ}$
15. $\frac{36 \cdot 3\times \text{Sin } 47^\circ}{\sqrt{3 \cdot 26}}$

கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளை நழுவுச் சட்டத்தின் உதவியால் தீர்க்கவும்.

16. $x^3=111$
17. $x^4=86$
18. $x^3-9 \cdot 15x-3 \cdot 26=0$ (சென்னை '61 ஏப்.)
19. $2x^3-3x^2+18x-27=0$ (சென்னை '62 ஏப்.)
20. $x^3+x^2-16x+20=0$ (சென்னை '66 செப்., 66 செப்.)

16. நேமவரையம்

(Nomogram)

வரைபட முறையில் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறைகளைப் பற்றி இரண்டாவது அத்தியாயத்தில் விரிவாகப் பார்த்தோம். ஆனால் அம்முறைகளிலெல்லாம் ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிற்கும் அதற்கென ஒரு வரைபடம் வரைந்து அதன்மூலம் அதன் தீர்வுகளைக் கண்டோம். ஆனால் நேமவரைய முறையென்பது இம்முறைகளுக்குச் சற்று மாறுபட்டது. இம்முறையில் ஒரே வகையைச் சார்ந்த சமன்பாடுகள் யாவற்றையும் ஒரே வரைபடத்தின் மூலம் தீர்த்துவிடலாம். உதாரணமாக,

$$2x^2 + 6x - 7 = 0$$

என்ற சமன்பாட்டை வரைபட முறையில் பின்வருமாறு தீர்க்கலாம்.

$y = 2x^2 + 6x - 7$ எனக் கொண்டு, இதன் வளைவை ஒரு வரைபடத் தாளில் வரைந்து வளைவு x-அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளின் x அச்சுத் தூரங்களிலிருந்து தீர்வுகளைப் பெறுகிறோம். இதே சமன்பாட்டை வரைபட முறையில் பின்வருமாறும் தீர்க்கலாம்.

சமன்பாட்டை $x^2 + (x+3)^2 = 16$ என எழுதி, $y = x + 3$ என்று பிரதியிட, $x^2 + y^2 = 4^2$ என்ற வட்டத்தின் சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இந்த வட்டத்தையும், $y = x + 3$ என்ற நேர் கோட்டையும் ஒரே வரைபடத்தில் வரைந்தால், நேர்கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளின் x-அச்சுத் தூரங்களிலிருந்து மூலங்களைப் பெறலாம்.

மேற்கண்ட வரைபட முறைகளில் ஒவ்வொரு சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதற்கும் அதற்குரிய வரைபடத்தை வரைந்துதான் தீர்க்க முடியும். ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கென வரைந்த வரைபடத்திலிருந்து இன்னொரு இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க முடியாது. ஆகவே, இத்தகைய முறைகள் யாவும் அவ்வளவு பயனுடையன

வாக யில்லை. ஆனால், ஒரே வகையைச் சார்ந்த சமன்பாடுகள் யாவற்றையும் ஒரே வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்கும் முறை யொன்று உள்ளது. இம்முறைதான் நேமவரைய முறை (Nomography) என்று வழங்கப்படுகிறது. இம்முறையில் பயன் படுத்தப்படு கின்ற அந்த பொதுவான வரைபடம் நேமவரையம் (Nomogram) என்று அழைக்கப்படுகின்றது.

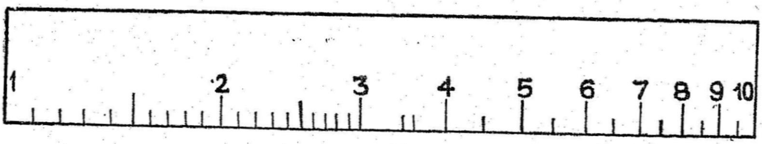
16·1 சார்பளவு கோல்கள் (Functional scales)

நேம வரைபட முறையில் ஒரு சமன்பாட்டுக்குரிய நேம வரையத்தை வரைய நாம் சார்பளவை என்று சொல்லப்படுகின்ற அளவுகோலைப் பயன் படுத்துகின்றோம். இந்தச் சார்பளவு கோலில் சார்பலன்களுக்குப் பதிலாக அவைகளுக்குரிய மாறிகளின் மதிப்புக் கள் குறிக்கப்பட்டிருக்கும். அதாவது, அளவு கோலில் சார்பலன் களின் மதிப்புக்களுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறித்து, அப்புள்ளிகளில் அச்சார்பலன்களுக்குரிய மாறியின் மதிப்புக்கள் குறிக்கப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டாக,

$y = \log_{10} x$ என்ற சார்புக்குரிய சார்பளவு கோலைக் கீழ்க்கண்ட வாறு அமைக்கவேண்டும். $x=1$ முதல் $x=10$ வரையுள்ள மதிப்புக் களுக்குரிய சார்பளவு கோலை அமைக்க $x=1, 2, 3, \ldots\ldots, 10$ க்குரிய y இன் மதிப்புக்களை முதலில் கணக்கிடவேண்டும். (மதிப்புக்களை இரண்டு தசம இடங்களுக்குக் கணக்கிடுக).

x:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y:	0	0·30	0·48	0·60	0·70	0·78	0·85	0·90	0·95	1



படம் 19

மடக்கை அளவு கோல், சார்பளவு கோல்

ஒரு நேர்க்கோடு வரைந்து அதில் ஆரம்பப் புள்ளியைக் குறித்து அதில் 1 என்று எழுதுக. 1 அலகு = 5 அங்குலம் என்று எடுத்துக் கொண்டால், ஆரம்பப் புள்ளியிலிருந்து 0·30 அலகு (= 1·5″) தூரத்தில் 2 என்று குறிக்கவேண்டும். இதுபோல் ஆரம்பப் புள்ளி யிலிருந்து 0·48 அலகு (= 2·4″) தூரத்தில் 3 என்று குறிக்கவேண்டும். இவ்வாறு, ஆரம்பப் புள்ளியிலிருந்து 0·60, 0·70, 0·78, 0·85, 0·90,

0·95, 1 அலகுகள் (அதாவது 3″, 3·5″, 3·9″, 4·25″, 4·5″, 4·75″, 5″) தூரங்களில் முறையே 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்க வேண்டும். இவ்வாறு கிடைக்கப்பெறும் அளவுகோலுக்குப் பெயர் தான் சார்பளவு கோல். இது ஒரு மடக்கையளவு கோல். ஆகவே, நழுவுச் சட்டத்திலுள்ள C, D அளவு கோல்கள் சார்பளவு கோல்களாகும். மேற்கண்ட சார்பளவு கோலில் ஆரம்பப் புள்ளியாகிய 1 இலிருந்து ஏதாவது ஒரு அளவுக்குறியின் தூரம் அந்த அளவுக் குறியின் மடக்கைக்கு விகித சமத்தில் (Proportional) இருக்கும். அதாவது 1 இலிருந்து 4 என்ற அளவுக்குறியின் தூரம் $\log_{10} 4$ க்கு விகித சமத்திலிருக்கும். $\log 1 = 0$ ஆகையால், இந்த தூரத்தை $(\log_{10} 4 - \log_{10} 1)$ க்கு விகித சமத்திலிருக்கும் என்றும் சொல்லலாம். அதாவது, ஆரம்பப் புள்ளியை x_1 என்று குறித்தால், x_1-இலிருந்து p என்ற அளவுக் குறியின் தூரம் $(\log_{10} p - \log_{10} x_1)$ க்கு விகித சமத்திலிருக்கும். x_1-இலிருந்து p-க்குள்ள தூரத்தை l என்று குறித்தால்,

$$l = \lambda\,(\log_{10} p - \log_{10} x_1)$$

என்று எழுதலாம். இதில் λ என்பது ஒரு மாறிலியாகும். பொதுவாக, $y = \log_{10} x$ என்ற சார்புக்குப் பதிலாக, $y = f(x)$ என்ற சார்பினை எடுத்துக்கொள்வோம். x இன் மதிப்பு x_1 முதல் x_2 வரை மாறுவதாகக் கொள்வோம். ஆகவே, சார்பின் குறைந்த மதிப்பு $f(x_1)$ ஆகும்; அதிகமான மதிப்பு $f(x_2)$ ஆகும். x_1 க்கும் x_2 க்குமுள்ள தூரத்தை l எனக் கொள்வோம். இப்பொழுது x_1 இலிருந்து x_2 வரையுள்ள தூரம் $[f(x_2) - f(x_1)]$ க்கு விகித சமத்திலிருக்கும்.

அதாவது,

$$l = \lambda\,[f(x_2) - f(x_1)]$$

இங்கு λ என்பது ஒரு மாறிலியாகும். இது அச்சார்பின் அளவையெண் (Scale modulus) என்று அழைக்கப்படுகிறது. ஆகவே,

$$\lambda = \frac{l}{f(x_2) - f(x_1)}$$

அதாவது,

$$\text{அளவையெண்} = \frac{\text{அளவு கோலின் நீளம்}}{\text{சார்பின் அதிகமான மதிப்பு} - \text{குறைந்த மதிப்பு}}$$

மேற்கூறப்பட்ட மடக்கைச் சார்பளவு கோலில்,

$$\lambda = \frac{5}{\log_{10} 10 - \log_{10} 1} = \frac{5}{1-0} = 5 \text{ ஆகும்.}$$

வரைபடத்தில் சார்பளவு கோலைப் பயன் படுத்தும்போது சார்பலன்களை இந்த அளவையெண்ணால் பெருக்கி வரும் மதிப்புக்

களை வரைபடத்தாளில் குறிக்கவேண்டும். மேற்கூறப்பட்ட மடக்கை யளவு கோலை வரையும்போது 0·30, 0·48, 0·60, ………… ஆகிய சார்பலன்களைக் குறிக்க இவற்றை அளவையெண்ணாகிய 5 ஆல் பெருக்கி வரும் மதிப்புக்களாகிய 1·5″, 2·4″, 3″, …… ஆகிய தூரங் களில் 2, 3, 4, …… என்ற புள்ளிகள் குறிக்கப்பட்டன என்பதைக் கவனித்திருக்கலாம். ஆகவே, சார்பளவு கோலில் ஆரம்பப் புள்ளி யிலிருந்து ஏதாவது ஒரு புள்ளியின் தூரம் = அளவையெண் × அப்புள்ளியின் சார்பலன் என்று அறிகிறோம். தூரத்தை y எனக் கொண்டால் இத்தொடர்பை

$$y = \lambda f(x)$$

என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் குறிப்பிடலாம். இச்சமன்பாட்டிற்குக் "குறிக்கும் சமன்பாடு" (Plotting equation) என்று பெயர்.

16·2 இணையளவை நேமவரையம் (Parallel scale Nomogram)

f_1, f_2, f_3 என்பவற்றைச் சார்புகளாகக் கொண்ட x, y, z என்ற மாறிகளைக் கருதுக. இம்மூன்று சார்புகளும்

$$f_1(x) + f_2(y) = f_3(z)$$

என்ற சார்புத் தொடர்பால் இணைக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்வோம். இந்தச் சார்புத் தொடர்புக்கு மூன்று இணை நேர்கோடுகளாலான நேமவரையம் வரையும் முறையைக் காண்போம்.

x, y ஆகிய மாறிகளின் சார்பலன்களை முறையே l_1, l_2 நீளங் களையுடைய இணை நேர்கோடுகளில் (x_1, x_2), (y_1, y_2) ஆகிய இடை வெளி வீச்சுக்களில் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். இவ்விரு நேர்கோடு களுக்கும் முறையே x-அளவுகோல் (x-scale), y-அளவுகோல் (y-scale) என்று பெயர். x, y ஆகியவற்றின் அளவையெண்கள் முறையே λ_1, λ_2 என்றால்,

$$\lambda_1 = \frac{l_1}{f_1(x_2) - f_1(x_1)}, \quad \lambda_2 = \frac{l_2}{f_2(y_2) - f_2(y_1)}$$

என்ற தொடர்புகளிலிருந்து λ_1, λ_2 ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பெறலாம்.

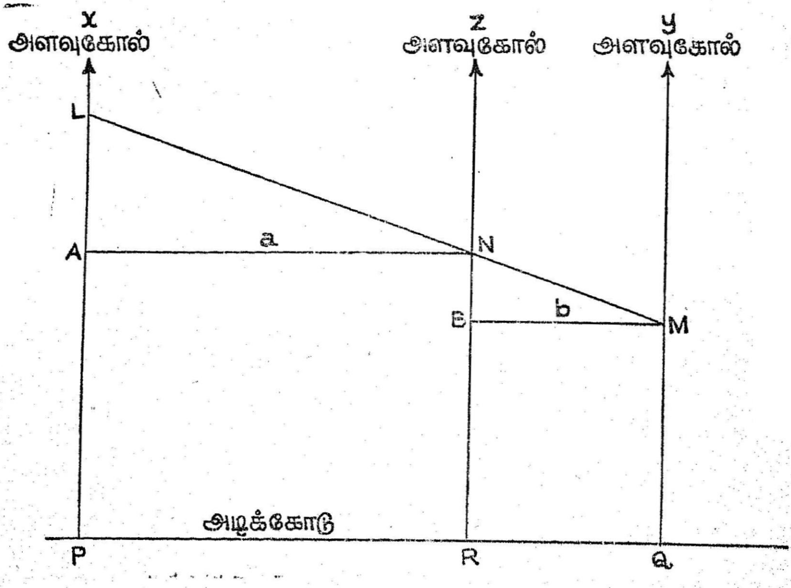
x, y என்ற அளவு கோல்களை d என்ற ஏதாவது ஒரு இடை வெளியில் இணை கோடுகளாக எடுத்துக் கொள்க.

$$u = \lambda_1 f_1(x), \quad v = \lambda_2 f_2(y)$$

என்பன முறையே x, y ஆகியவற்றைக் குறிக்கும் சமன்பாடுகள் எனக் கொள்க. λ_3 என்பது z-அளவு கோலின் அளவை யெண் ணென்றால், நாம் λ_3 இன் மதிப்பையும், x, y அளவு கோல்களுக்கு

எந்தப் பக்கத்தில் எவ்வளவு தூரத்தில் z-அளவு கோல் அமைந்துள்ளது என்பதையும் காண வேண்டும்.

z-அளவு கோலைக் குறிக்கும் சமன்பாட்டை $w=f_3(z)$ எனக் கொள்க. z-அளவு கோல், x, y அளவு கோல்களுக்கிடையே அமைந்துள்ளதாகக் கொள்வோம். x, y - அளவு கோல்களின் ஆரம்பப் புள்ளிகளை P, Q எனக் குறிப்பிடுவோம். P, Q-ஐச் சேர்க்கும் நேர்கோடு z - அளவு கோலை R என்ற புள்ளியில் வெட்டுவதாகக் கொள்வோம். R-ஐ z-அளவு கோலின் ஆரம்பப் புள்ளியாகக் கொள்வோம். இம் மூன்று புள்ளிகளும் அமைந்திருக்கின்ற PRQ என்ற நேர் கோட்டிற்கு அடிக்கோடு (base line) என்று பெயர்.



படம் 20

x, y அளவு கோல்களில் முறையே L, M என்ற புள்ளிகளை $u=f_1(x)$, $v=f_2(y)$ என்ற தூரங்களில் குறித்துக் கொள்க. L, M ஐ ஒரு நேர் கோட்டினால் சேர்க்கவும். இந்த நேர் கோடு z-அளவு கோலை வெட்டும் புள்ளியை N என்று குறிக்கவும். ஆகவே,

$$PL=u=\lambda_1 f_1(x); \quad QM=v=\lambda_2 f_2(y).$$

இப்பொழுது, $RN = W = \lambda_3 f_3 (z)$ இன் மதிப்பைக் காண வேண்டும்.

$NA \perp PL$, $MB \perp NR$ வரைக.

$AN = a$, $BM = b$ எனக் கொள்க.

இப்பொழுது, $\triangle LAN \,|||\, \triangle NBM$

$$\therefore \frac{LA}{AN} = \frac{NB}{BM}$$

அதாவது, $$\frac{u-w}{a} = \frac{w-v}{b}$$

$$\therefore \quad \frac{u}{a} + \frac{v}{b} = \frac{w}{a} + \frac{w}{b} = \frac{w\,(a+b)}{ab}$$

அதாவது, $$\frac{\lambda_1 f_1 (x)}{a} + \frac{\lambda_2 f_2 (y)}{b} = \frac{\lambda_3 f_3 (z)}{ab/(a+b)}$$

இங்கு $a = \lambda_1$, $b = \lambda_2$, $\lambda_3 = \dfrac{ab}{a+b} = \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ எனக் கொண்டால்,

$$\frac{\lambda_1 f_1 (x)}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2 f_2 (y)}{\lambda_2} = \frac{\lambda_3 f_3 (z)}{\lambda_3}$$

என்று கிடைக்கிறது. அதாவது,

$$f_1 (x) + f_2 (y) = f_3 (z)$$

λ_3 இன் மதிப்பு λ_1, λ_2 ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களிலிருந்து கிடைப்பதால் z-அளவு கோலின் அளவுக் குறிகளை எளிதில் குறிக்கலாம். மேலும் x-அளவு கோலிலிருந்து z-அளவு கோல் a அலகு தூரத்தில் உள்ளது. x, y அளவு கோல்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் $d = a + b$. ஆகவே, x-அளவு கோலிலிருந்து z-அளவு கோலின் தூரம் $= a$

$$= \frac{a}{a+b} \cdot (a+b)$$

$$= \frac{a}{a+b} \cdot d$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot d \cdot \quad \text{ஆகும்.}$$

மாதிரி 211

$S = \dfrac{6}{5} E + \dfrac{1}{4} l + 0{\cdot}14$ என்ற சமன்பாட்டில் F இன் மதிப்பு 2·5 முதல் 6·0 வரையும், l இன் மதிப்பு 25 முதல் 36 வரையும் மாறுகிறதென்றால், அச்சமன்பாட்டின் நேம வரையத்தை வரைக.

(சென்னை '61 ஏப்.)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை

$$S=1{\cdot}2\ F+(0{\cdot}25\ l+0{\cdot}14)$$

என்று எழுதிக் கொள்க.

F, l, S ஆகிய அளவு கோல்களின் அளவை யெண்களை முறையே λ_1, λ_2, λ_3 எனக் கொள்க. ஆகவே, இந்த அளவு கோல்களைக் குறிக்கும் சமன்பாடுகள் முறையே

$u=\lambda_1\ (1{\cdot}2\ F)$, $v=\lambda_2\ (0{\cdot}25\ l+0{\cdot}14)$, $w=\lambda_3\ S$ என்று கொள்ளலாம். F, l அளவு கோல்களின் நீளங்களை முறையே l_1, l_2 எனக் கொள்க. ஆகவே,

$$\lambda_1=\frac{l_1}{1{\cdot}2\ (6)-1{\cdot}2\ (2{\cdot}5)}=\frac{l_1}{4{\cdot}2}$$

$$\lambda_2=\frac{l_2}{[0{\cdot}25\ (36)+0{\cdot}14]-[0{\cdot}25\ \ (25)+0{\cdot}14]}=\frac{l_2}{2{\cdot}75}$$

ஆகவே, $l_1=4{\cdot}2$ செ மீ., $l_2=11$ செ.மீ., என எடுத்துக் கொண்டால் $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$ என்று கிடைக்கும்.

$$\therefore\ \lambda_3=\frac{\lambda_1\ \lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{4}{5}=0{\cdot}8$$

ஆகவே, F, l, S அளவு கோல்களைக் குறிக்கும் சமன்பாடுகள் முறையே

$$u=1{\cdot}2\,F;\ v=4\ (0{\cdot}25\ l+0{\cdot}14)=l+0{\cdot}56,\ w=0{\cdot}8\ S\ \text{ஆகும்.}$$

F, l-அளவு கோல்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் $=\lambda_1+\lambda_2=5$ செ. மீ. இருக்குமாறு F, l அளவு கோல்களை PP′, QQ′ என்ற இரு இணை கோடுகளாக வரைந்து கொள்க. S-அளவு கோல் F-அளவு கோலி லிருந்து,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot d=\frac{1}{5}(5)=1\ \text{செ. மீ.}$$

தூரத்தில் அமைந்துள்ள இணை கோடாகும். P Q ஐச் சேர்த்து, P யிலிருந்து 1 செ.மீ. தூரத்தில் R என்ற புள்ளியைக் குறித்து RR′ என்ற இணைகோடு வரையவும்.

இப்பொழுது, $F=2{\cdot}5$, $l=25$ ஆகயிருக்கும் போது,

$$\begin{aligned}S&=1{\cdot}2\ (2{\cdot}5)+0{\cdot}25\ (25)+0{\cdot}14\\&=9{\cdot}39.\end{aligned}$$

ஆகவே, P, Q, R என்ற ஆரம்பப் புள்ளிகளின் குறியீடுகள் முறையே 2·5, 25, 9·39 ஆகும்.

4·2 செ. மீ. நீளமுள்ள PP′ என்ற F அளவு கோல் 2·5 முதல் 6·0 வரையுள்ள F-அளவுக் குறிகளைக் குறிக்கிறது. ஆகவே, இந்த அளவு கோலில் 3·0, 4·0, 5·0,......என்ற அளவுக் குறிகளை F-இலிருந்து முறையே

$$1{\cdot}2\ (3-2{\cdot}5)=0{\cdot}6 \text{ செ.மீ.,}$$
$$1{\cdot}2\ (4-2{\cdot}5)=1{\cdot}8 \text{ செ.மீ.,}$$
$$1{\cdot}2\ (5-2{\cdot}5)=3{\cdot}0 \text{ செ.மீ.,}$$

....

ஆகிய தூரங்களில் குறிக்கவும். இதுபோல், QQ′ என்ற l-அளவு கோல் 25 முதல் 36 வரையுள்ள அளவுக் குறிகளைக் குறிக்கிறது. ஆகவே, இந்த அளவு கோலில், 26, 27, 28,...........என்ற அளவுக் குறிகளை Q-இலிருந்து முறையே

$$(26+0{\cdot}56)-(25+0{\cdot}56)=1 \text{ செ.மீ.,}$$
$$(27+0{\cdot}56)-(25+0{\cdot}56)=2 \text{ செ.மீ.,}$$
$$(28+0{\cdot}56)-(25+0{\cdot}56)=3 \text{ செ.மீ.,}$$

....

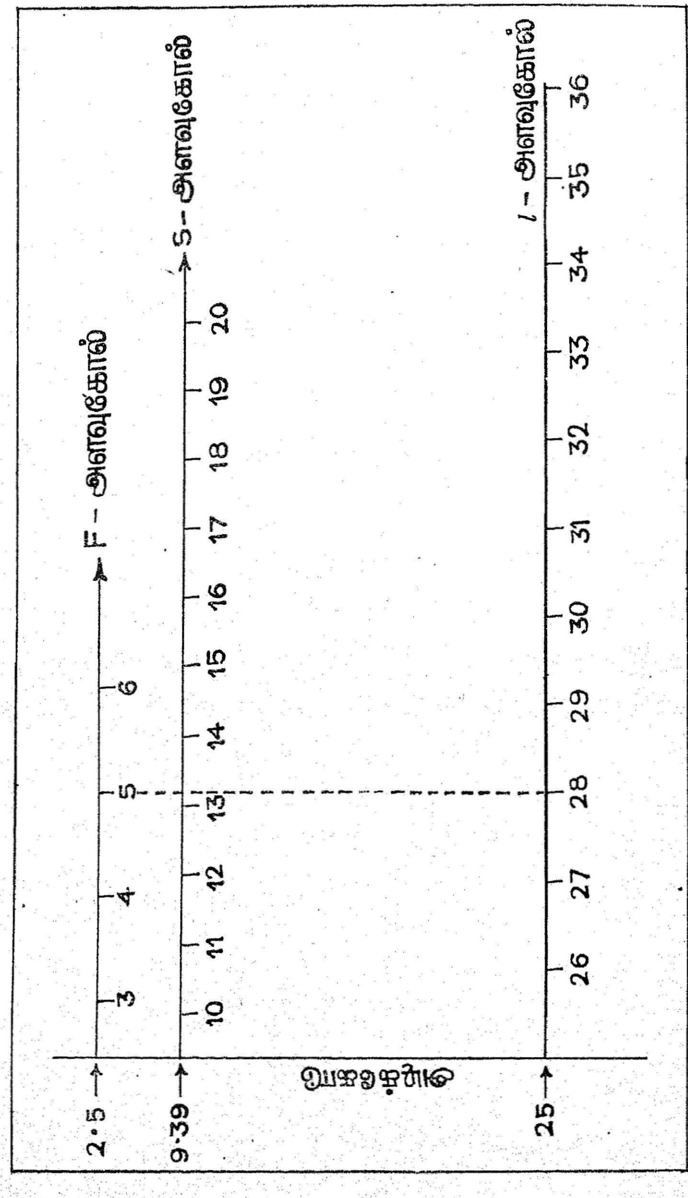
ஆகிய தூரங்களில் குறிக்கவும். RR′ என்ற அளவு கோல் 9·39 இலிருந்து தொடங்குகிறது. இதைக் குறிக்கும் சமன்பாடு $w=0.8\ S$. ஆகவே, இந்த அளவு கோலில் 10, 11, 12,...... என்ற அளவுக் குறிகளை R-இலிருந்து முறையே

$$0{\cdot}8\ (10-9{\cdot}39)=0{\cdot}488 \text{ செ.மீ.,}$$
$$0{\cdot}8\ (11-9{\cdot}39)=1{\cdot}288 \text{ செ.மீ.,}$$
$$0{\cdot}8\ (12-9{\cdot}39)=2{\cdot}088 \text{ செ.மீ.}$$

ஆகிய தூரங்களில் குறிக்கவும். இவ்வாறு கிடைக்கப் பெறும் படம் தான் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் நேம வரையமாகும்.

F, l, S ஆகியவற்றுள் ஏதாவது இரண்டினுடைய மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், மூன்ருவதின் மதிப்பை இந்த நேம வரையத்தின் மூலம் கீழ்க்கண்டவாறு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $F=5$, $l=28$-க்குரிய S-இன் மதிப்பைக் காண, F அளவு கோலிலுள்ள 5 என்ற அளவுக் குறியையும் l அளவு கோலிலுள்ள 28 என்ற அளவுக் குறியையும் ஒரு நேர் கோட்டினுல் சேர்க்க வேண்டும். இந்த நேர் கோடு S அளவு கோலை வெட்டும் புள்ளியின் அளவுக் குறியிலிருந்து S-இன் மதிப்பு 13·1 என்று கிடைக்கிறது.


F - அளவுகோல்
S - அளவுகோல்
l - அளவுகோல்
2·5
9·39
25
3 4 5 6
10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

படம் 21

மாதிரி 212

$S = 3\sqrt[3]{x} + 4y$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $x = 1{\cdot}1$ முதல் $2{\cdot}0$ வரையும் $y = 0{\cdot}1$ முதல் $1{\cdot}0$ வரையும் இருக்குமாறு ஒரு நேம வரையம் வரைந்து $S = 4{\cdot}8$, $x = 1{\cdot}7$ ஆகயிருக்கும்போது y-இன் மதிப்பைக் காண்க. (சென்னை '68 ஏப்.)

x, y, S அளவு கோல்களைக் குறிக்கும் சமன்பாடுகளை

$$u = \lambda_1\, 3\sqrt[3]{x},\ v = 4\,\lambda_2\, y,\ W = \lambda_3\, S$$

என்று கொள்க. x, y அளவு கோல்களின் நீளங்களை முறையே l_1, l_2 எனக் கொள்க.

x-இன் இடைவெளி வீச்சு $(1{\cdot}1,\ 2{\cdot}0)$ ஆகையால்,

$$\begin{aligned} l_1 &= 3\,\lambda_1\,(\sqrt[3]{2{\cdot}0} - \sqrt[3]{1{\cdot}1}) \\ &= 3\,\lambda_1\,(1{\cdot}26 - 1{\cdot}03) \\ &= 0{\cdot}69\,\lambda_1 \end{aligned}$$

$l_1 = 6{\cdot}9$ செ.மீ. எனக் கொண்டால், $\lambda_1 = 10$ ஆகும்.

y-இன் வீச்சு $(0{\cdot}1,\ 1{\cdot}0)$ ஆகையால்

$$\begin{aligned} l_2 &= 4\,\lambda_2\,(1{\cdot}0 - 0{\cdot}1) \\ &= 3{\cdot}6\,\lambda_2 \end{aligned}$$

$l_2 = 7{\cdot}2$ செ.மீ. எனக் கொண்டால், $\lambda_2 = 2$ ஆகும்.

$$\therefore\ \lambda_3 = \frac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{20}{12} = 1{\cdot}67.$$

ஆகவே, அளவு கோல்களைக் குறிக்கும் சமன்பாடுகள் வருமாறு:

$$u = 30\sqrt[3]{x}\,;\ v = 8y\,;\ W = 1{\cdot}67\,S.$$

x, y அளவு கோல்களுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தை 6 செ.மீ. எனக் கொள்க. $\therefore\ d = 6.$

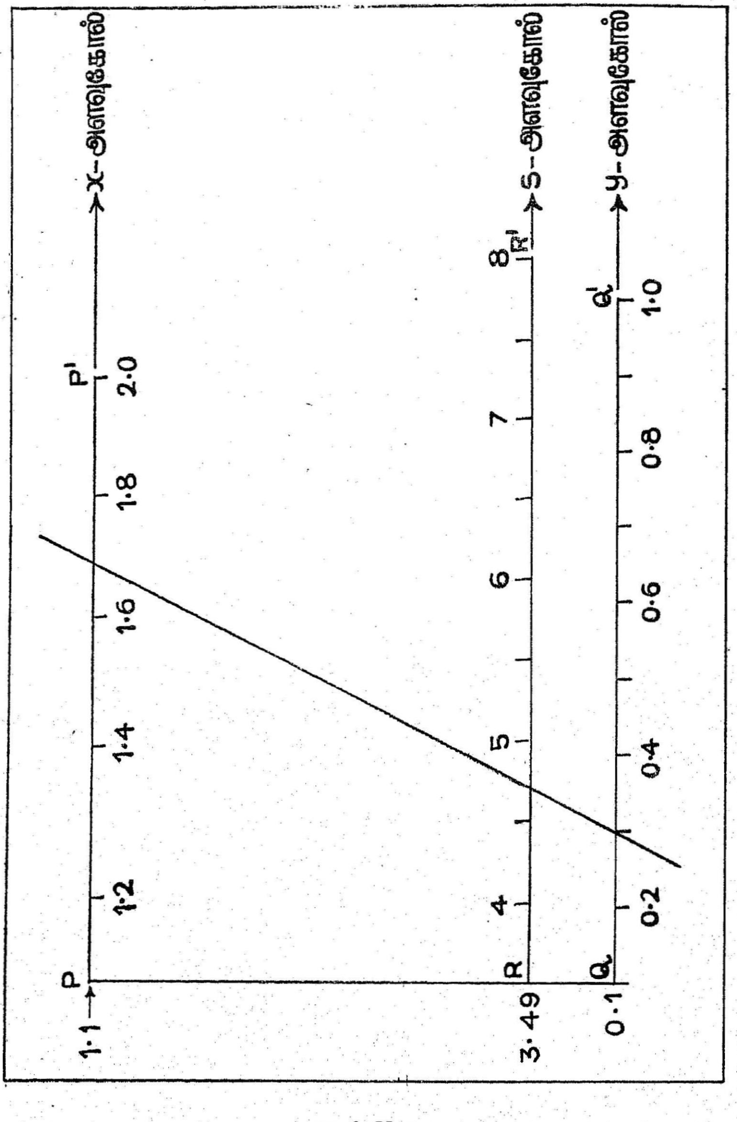
$\therefore$ x அளவு கோலிலிருந்து S அளவு கோலின் தூரம்

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\, d = \frac{10}{12}\,(6) = 5 \text{ செ.மீ.}$$

$x = 1{\cdot}1$, $y = 0{\cdot}1$ ஆகயிருக்கும்போது,

$$S = 3\sqrt[3]{1{\cdot}1} - 4\,(0{\cdot}1) = 3{\cdot}09 - 0{\cdot}4 = 3{\cdot}49.$$

ஆகவே, x, y, S அளவு கோல்களின் ஆரம்ப அளவுகள் முறையே 1·1, 0·1, 3·49 ஆகும். இந்த ஆரம்ப அளவுகள் யாவும் PRQ என்ற அடிக் கோட்டிலிருக்கும்.



படம் 22

$S=3\sqrt[3]{x}+4y$–க்குரிய நேம வரையம்

PP′ = 6·9 செ.மீ. QQ′ = 7·2 செ.மீ.

PQ′ = 6·0 செ.மீ. PR = 5·0 செ.மீ,

இப்போது $PP' = 6{\cdot}9$ செ மீ., $QQ' = 7{\cdot}2$ செ.மீ. இருக்குமாறு இரண்டு இணைகோடுகள் 6 செ.மீ. இடைவெளியில் வரைந்து கொள்க. PQ என்ற அடிக்கோட்டில் $PR = 5$ செ.மீ. இருக்குமாறு R என்ற புள்ளியைக் குறித்துக் கொள்க. அந்த இரு இணை கோடுகளுக்கும் இணையாக R வழியே RR′ என்ற இணைகோடு வரைக.

PP′ என்ற x அளவு கோலில் 1·1 இலிருந்து 2·0 வரை கீழ்க் கண்டவாறு அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

P-யிலிருந்து 1·2 இன் தூரம் $= 30\,(\sqrt[3]{1{\cdot}2} - \sqrt[3]{1{\cdot}1}) = 30(1{\cdot}0627 - 1{\cdot}0323)$
$= 0{\cdot}91$ செ.மீ.

P-யிலிருந்து 1·4 இன் தூரம் $= 30\,(\sqrt[3]{1{\cdot}4} - \sqrt[3]{1{\cdot}1}) = 30(1{\cdot}1187 - 1{\cdot}0323)$
$= 2{\cdot}59$ செ.மீ.

இதுபோன்று, P-யிலிருந்து 1·6, 1·8 ஆகிய அளவுக் குறிகளின் தூரங்கள் முறையே 4·12 செ.மீ., 5·52 செ.மீ. என்று காணலாம்.

QQ′ என்ற அளவு கோலில் Q-இலிருந்து 0·1 முதல் 1·0 வரையுள்ள அளவுக் குறிகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிக்கலாம்.

Q-இலிருந்து 0·2 இன் தூரம் $= 8\,(0{\cdot}2 - 0{\cdot}1) = 0{\cdot}8$ செ.மீ.

Q-இலிருந்து 0·3 இன் தூரம் $= 8\,(0{\cdot}3 - 0{\cdot}1) = 1{\cdot}6$ செ.மீ.

இதுபோல், 0·4, 0·5, 0·6, ... ஆகிய அளவுக் குறிகளின் தூரங்கள் முறையே 2·4 செ.மீ., 3·2 செ.மீ., 4·0 செ.மீ., ... என்று கணக்கிடலாம்.

RR′ என்ற அளவு கோலில் R-இலிருந்து 4·0, 4·5, 5·0, 5·5, ... என்ற அளவுக் குறிகளின் தூரங்கள் முறையே,

$1{\cdot}67\,(4{\cdot}0 - 3{\cdot}49) = 0{\cdot}85$ செ.மீ.,

$1{\cdot}67\,(4{\cdot}5 - 3{\cdot}49) = 1{\cdot}69$ செ.மீ.,

$1{\cdot}67\,(5{\cdot}0 - 3{\cdot}49) = 2{\cdot}52$ செ.மீ.,

$1{\cdot}67\,(5{\cdot}5 - 3{\cdot}49) = 3{\cdot}35$ செ.மீ.,

.... ஆகும்.

இவ்வாறு கணக்கிடப்பட்ட அளவுக் குறிகளை மூன்று அளவு கோலிலும் குறித்தபின் கிடைக்கப்பெற்ற படம் தான் கொடுக்கப் பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் நேம வரையமாகும்.

இப்போது, S அளவு கோலில் 4·8க்குரிய புள்ளியையும், x அளவு கோலில் 1·7க்குரிய புள்ளியையும் ஒரு நேர் கோட்டினல்

சேர்க்கவும். இந்த நேர் கோடு y அளவு கோலை வெட்டும் புள்ளியின் அளவுக் குறிதான் வேண்டிய y-இன் மதிப்பாகும். படத்திலிருந்து, y-இன் மதிப்பு 0·3 என்று அறிகிறோம்.

மாதிரி 213

$30{\cdot}5 \leq g \leq 32{\cdot}8$, $1 \leq T \leq 10$ என்ற இடைவெளிகளுக்குள் $l = \frac{4\pi^2 g}{T^2}$ என்ற வாய்பாட்டிற்குரிய நேம வரையத்தை வரையும் முறையினை விளக்குக. (சென்னை '62 செப்.)

l, T, g என்ற மாறிகளின் தொடர்பு $l = \frac{4\pi^2 g}{T^2}$ ஆகும். இரு பக்கங்களிலும் மடக்கையெடுத்தால்,

$$\begin{aligned}\log l &= \log 4\pi^2 + \log g - 2 \log T \\ &= \log g + 2 \log 2\pi - 2 \log T \\ &= \log g + 2 (\log 2\pi - \log T).\end{aligned}$$

ஆகவே, g, T, l ஆகிய அளவு கோல்களைக் குறிக்கும் சமன்பாடுகள் முறையே,

$$u = \lambda_1 \log g\,;\quad v = 2\,\lambda_2 (\log 2\pi - \log T)\,;$$
$$w = \lambda_3 \log l \text{ ஆகும்.}$$

l_1, l_2 என்பன முறையே g, T அளவு கோல்களின் நீளங்கள் என்றால்,

$$l_1 = \lambda_1 (\log 32{\cdot}8 - \log 30{\cdot}5) = 0{\cdot}0316\,\lambda_1$$

ஆகவே, $l_1 = 3{\cdot}16$ செ.மீ. எனக் கொண்டால் $\lambda_1 = 100$ ஆகும்.

$$\begin{aligned}l_2 &= 2\,\lambda_2 (\log 2\pi - \log 10) - 2\,\lambda_2 (\log 2\pi - \log 1) \\ &= 2\,\lambda_2 (-1) \\ &= -2\,\lambda_2\end{aligned}$$

ஆகவே, $l_2 = 10$ செ.மீ. எனக் கொண்டால், $\lambda_2 = -5$.

$$\therefore\ \lambda_3 = \frac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{-500}{95} = -5{\cdot}3.$$

ஆகவே, அளவு கோல்களைக் குறிக்கும் சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு:

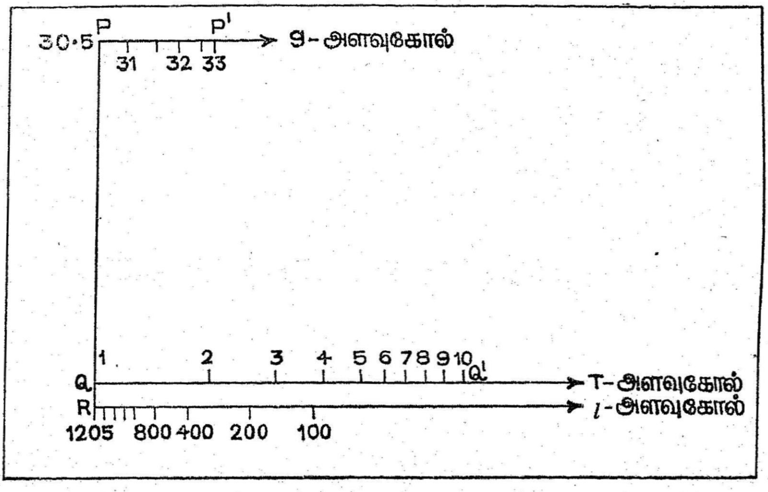
$$u = 100 \log g\,;\ v = -10 (\log 2\pi - \log T)\,;$$
$$w = -5{\cdot}3 \log l.$$

g, T அளவு கோல்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் $d = 9{\cdot}5$ செ.மீ. எனக் கொண்டால், g அளவு கோலிலிருந்து l அளவு கோலின் தூரம் $= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\, d$

$$= \frac{100}{95}\,(9{\cdot}5)$$

$= 10$ செ.மீ. ஆகும்.

ஆகவே, ஒரு அடிக் கோட்டின்மேல் g, T, l அளவு கோல்களைக் குறிக்கும் இணைகோடுகளை வரைந்து அவற்றில் அளவுக் குறிகளைக் குறிக்கவும்.



படம் 23

$l = \frac{4\pi^2 g}{T^2}$க்குரிய நேமவரையம்

PQ = 9·5 செ.மீ. QR = 0·5 செ.மீ.
PP' = 3·6 செ.மீ. QQ' = 10·0 செ.மீ.

$g = 30{\cdot}5$, $T = 1$ ஆகயிருக்கும்போது $l = \frac{4\pi^2\,(30{\cdot}5)}{1}$

$= 1205.$

ஆகவே, g, T, l ஆகிய அளவு கோல்களின் ஆரம்ப அளவுகள் முறையே 30·5, 1, 1205 ஆகும்.

g-அளவு கோலில் ஆரம்பப் புள்ளியிலிருந்து 31, 31·5, 32, 32·5 ஆகிய அளவுக் குறிகளின் தூரங்கள் பின்வருமாறு :

31 இன் தூரம் $= 100\,(\log 31 - \log 30{\cdot}5) = 0{\cdot}7$ செ.மீ.,
31·5 இன் தூரம் $= 100\,(\log 31{\cdot}5 - \log 30{\cdot}5) = 1{\cdot}4$ செ.மீ.,
32·0 இன் தூரம் $= 100\,(\log 32{\cdot}0 - \log 30{\cdot}5) = 2{\cdot}08$ செ.மீ.,
32·5 இன் தூரம் $= 100\,(\log 32{\cdot}5 - \log 30{\cdot}5) = 2{\cdot}76$ செ.மீ.,

T-அளவு கோலில் ஆரம்பப் புள்ளியிலிருந்து 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ஆகிய அளவுக் குறிகளின் தூரங்கள் வருமாறு :

2 இன் தூரம் $= -10 (\log 2\pi - \log 2) + 10 (\log 2\pi - \log 1)$
$= 10 \log 2 = 3{\cdot}0$ செ.மீ.,
3 இன் தூரம் $= 10 \log 3 = 4{\cdot}8$ செ.மீ.,
4 இன் தூரம் $= 10 \log 4 = 6{\cdot}0$ செ.மீ.,
5 இன் தூரம் $= 10 \log 5 = 7{\cdot}0$ செ.மீ.,
6 இன் தூரம் $= 10 \log 6 = 7{\cdot}8$ செ.மீ.,
7 இன் தூரம் $= 10 \log 7 = 8{\cdot}5$ செ.மீ.,
8 இன் தூரம் $= 10 \log 8 = 9{\cdot}0$ செ.மீ.,
9 இன் தூரம் $= 10 \log 9 = 9{\cdot}5$ செ.மீ.,
10 இன் தூரம் $= 10 \log 10 = 10{\cdot}0$ செ.மீ.,

l அளவு கோலில் ஆரம்பப் புள்ளியிலிருந்து 1100, 1000, 900, 800, 700, ... ஆகிய அளவுக் குறிகளின் தூரங்கள் வருமாறு :

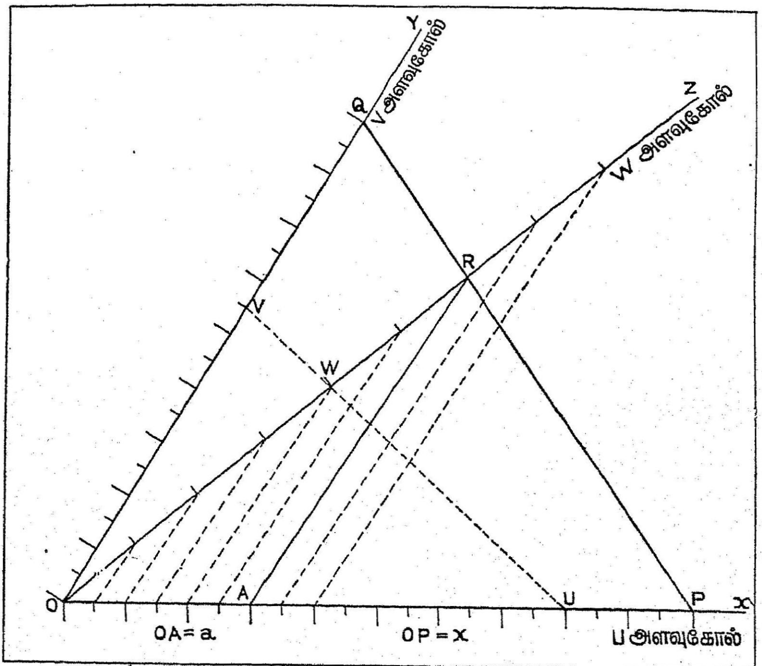
1100 இன் தூரம் $= -5{\cdot}3 \log 1100 + 5{\cdot}3 \log 1205$
$= 5{\cdot}3 (\log 1205 - \log 1100) = 0{\cdot}2$ செ.மீ.,
1000 இன் தூரம் $= 5{\cdot}3 (\log 1205 - \log 1000) = 0{\cdot}43$ செ.மீ.,
900 இன் தூரம் $= 5{\cdot}3 (\log 1205 - \log 900) = 0{\cdot}67$ செ.மீ.,
800 இன் தூரம் $= 5{\cdot}3 (\log 1205 - \log 800) = 0{\cdot}94$ செ.மீ.,
600 இன் தூரம் $= 5{\cdot}8 (\log 1205 - \log 600) = 1{\cdot}60$ செ.மீ.,
400 இன் தூரம் $= 5{\cdot}3 (\log 1205 - \log 400) = 2{\cdot}54$ செ.மீ.,
200 இன் தூரம் $= 5{\cdot}3 (\log 1205 - \log 200) = 4{\cdot}13$ செ.மீ.,
100 இன் தூரம் $= 5{\cdot}3 (\log 1205 - \log 100) = 5{\cdot}73$ செ.மீ.,

g, T, l ஆகிய அளவு கோல்களில் அளவுக் குறிகளைக் குறித்த பின் கிடைக்கும் படம்தான் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூத்திரத்திற்குரிய நேம வரையமாகும்.

16·3 ஆரை நேமவரையம் (Radial Nomogram)

$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{1}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}$ என்ற அமைப்பிலுள்ள சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கப் பயன்படும் நேமவரையம் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கின்ற மூன்று நேர்க்கோடுகளைக் கொண்டு அமைந்திருக்கும். இதிலுள்ள மூன்று அளவு கோல்களைக் குறிக்கின்ற நேர்கோடுகள் ஒரே புள்ளியில் சந்திப்பதால் அவைகளுடைய ஆரம்ப அளவுகள் ஒரே மாதிரியாக யிருக்க வேண்டும்,

வசதியான ஒரு கோணத்தில் OX, OY என்ற இரு நேர்கோடுகள் வரைந்து, அவைகளுக்கிடையே OZ என்ற மூன்ருவது நேர்கோடு ஒன்றை வரைக. இம்மூன்று நேர்கோடுகளையும் முறையே P, Q, R என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்குமாறு ஒரு நேர்கோடு வரைக. OX, OY ஆகிய நேர்கோடுகளில் முறையே $OP = x = \lambda_1 f_1(u)$, $OQ = y = \lambda_2 f_2(v)$ என்ற அளவுகளை எடுத்துக்கொள்க. λ_1, λ_2 என்பன முறையே u, v அளவுகோல்களின் அளவையெண்களாகும். இப்போது, QO-க்கு இணையாக RA என்ற நேர்கோட்டை OX ஐ A யில் வெட்டுமாறு வரைக. $OA = a$ எனக்கொள்க. ஆகவே, $PA = x - a$.



படம் 24
ஆரை நேமவரையம்

இப்பொழுது, $\triangle PAR \;|||\; POQ$.

$$\therefore \quad \frac{RA}{QO} = \frac{PA}{PO}$$

அதாவது, $$\frac{RA}{y} = \frac{x-a}{x}$$

இப்பொழுது, $\dfrac{OA}{AR} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ எனக் கொண்டால்,

$$AR = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot OA = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} a$$

ஆகவே, $$\frac{\lambda_2 a}{\lambda_1 y} = \frac{x-a}{x} = 1 - \frac{a}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{\lambda_2}{y} = \frac{\lambda_1}{a}\left(1 - \frac{a}{x}\right) = \frac{\lambda_1}{a} - \frac{\lambda_1}{x}$$

அதாவது, $$\frac{\lambda_1}{x} + \frac{\lambda_2}{y} = \frac{\lambda_1}{a}$$

இப்பொழுது $a = \lambda_1 f_3(w)$ எனக் கொண்டால்,

$$\frac{\lambda_1}{x} + \frac{\lambda_2}{y} = \frac{1}{f_3(w)}$$ என்று கிடைக்கும்.

ஆனால், $x = \lambda_1 f_1(u)$, $y = \lambda_2 f_2(v)$

$$\therefore \quad \frac{1}{f_1(u)} + \frac{1}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}$$ ஆகும்.

OR என்ற மூன்றுவது நேர்கோடுதான் w-அளவு கோலாகும்.

w-அளவு கோலில் அளவுகளைக் குறித்தல்:

முதலில் OA யில் $a = \lambda_1 f_3(w)$ என்று குறிக்கும் சமன்பாட்டின் உதவியால் அளவுக் குறிகளைக் குறித்துக் கொள்க. பின்னர், ஒவ்வொரு அளவுக்குறிப் புள்ளியிலிருந்தும் AR க்கு இணையாக OR ஐ வெட்டுமாறு இணைகோடு வரைக. இவ்வாறு வரையப் படும் இணைகோடுகள் யாவும் OR ஐச் சந்திக்கும் புள்ளிகள் OR இல் w-அளவு கோலின் அளவுக்குறிப் புள்ளிகளாகும். இவ்வாறு கிடைக்கப்பெற்ற படம் தான்

$$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{1}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}$$

என்ற சமன்பாட்டின் நேமவரையமாகும். u, v, w ஆகியவற்றுள் எவையேனும் இரண்டின் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் மூன்றுவதின் மதிப்பை இந்த நேமவரையத்திலிருந்து காணலாம்.

மாதிரி 214

$\dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{h_1} + \dfrac{1}{h_2}$ என்ற சூத்திரத்தில் h_1 இன் மதிப்பு 0 முதல் 500 வரையும், h_2 இன் மதிப்பு 0 முதல் 400 வரையும் மாறுகிறது.

இச்சூத்திரத்திற்கு ஒரு ஆரை நேமவரையம் வரைந்து, $h_1 = 240$, $h_2 = 160$ ஆகயிருக்கும் போது u இன் மதிப்பைக் காண்க.

இங்கு $f_1(u) = h_1$; $f_2(v) = h$; $f_3(w) = u$.

h_1, h_2 அளவு கோல்களைக் குறிக்கும் சமன்பாடுகளை முறையே $x = \lambda_1 f_1(u) = \lambda_1 h_1$; $y = \lambda_2 f_2(v) = \lambda_2 h_2$ எனக் கொள்க. l_1, l_2 என்பன முறையே h_1, h_2 அளவு கோல்களின் நீளங்கள் என்றால்,

$$l_1 = \lambda_1 (500 - 0) = 500\ \lambda_1$$

ஆகவே, $l_1 = 10$ செ.மீ. எனக்கொண்டால், $\lambda_1 = \frac{10}{500} = 0{\cdot}02$

$$l_2 = \lambda_2 (400 - 0) = 400\ \lambda_2$$

ஆகவே, $l_2 = 10$ செ. மீ. எனக் கொண்டால், $\lambda_2 = \frac{10}{400} = 0{\cdot}025$ இப்பொழுது OP = 10 செ.மீ., OQ = 10 செ.மீ. இருக்குமாறு ஏதாவது ஒரு கோணத்தில் (நேர்கோணத்தில் வரைவது நல்லது) h_1, h_2 என்ற அளவு கோல்களை வரைந்து, PQ ஐச் சேர்க்கவும். இப்பொழுது,

$$\frac{OA}{AR} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{0{\cdot}02}{0{\cdot}025} = \frac{4}{5}$$

இருக்குமாறும், AR என்பது OQ க்கு இணையாக யிருக்குமாறும் PQ-இல் R என்ற புள்ளியையும், OP-இல் A என்ற புள்ளியையும் எடுத்துக் கொள்க. OR ஐச் சேர்க்கவும். இதுதான் u-அளவு கோலாகும். OA-இல் $a = \lambda_1 u = 0{\cdot}02\ u$ என்ற சமன்பாட்டின்படி அளவுக் குறிகளைக் குறித்து, அப்புள்ளிகளின் வழியே AR க்கு இணை யாக நேர்கோடுகள் வரைந்தால் அவை OR ஐ வெட்டும் புள்ளிகள் u-அளவு கோலின் அளவுக் குறிகளாகும். (படம் : 25)

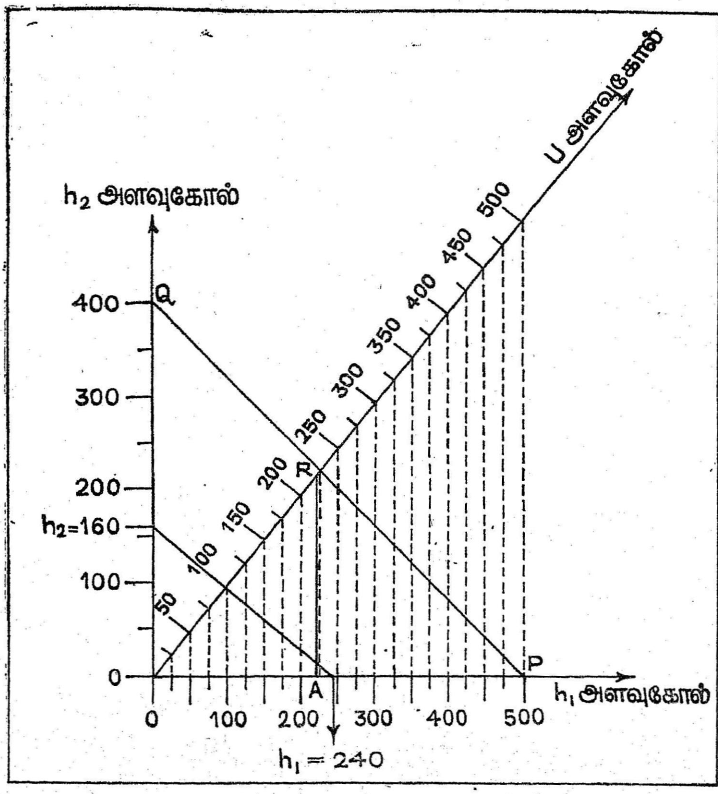
O-இலிருந்து OP-யில் h_1-இன் அளவுக் குறிகளின் தூரங்கள் வருமாறு :

h_1-அளவு கோலைக் குறிக்கும் சமன்பாடு : $x = \lambda_1\ h_1 = 0{\cdot}02 h_1$ ஆகவே, O-இலிருந்து அளவுக்குறி 50-இன் தூரம் $= 0{\cdot}02\ (50 - 0)$ $= 1$ செ.மீ. இதுபோல், அளவுக்குறி 100-இன் தூரம் $= 0{\cdot}02\ (100 - 0)$ $= 2$ செ.மீ.

200-இன் தூரம் $= 0{\cdot}02\ (200 - 0) = 4$ செ.மீ.

இதுபோல், 300, 400, 500 ஆகிய அளவுக் குறிகளின் தூரங்கள் முறையே 6 செ.மீ., 8 செ.மீ., 10 செ.மீ. ஆகும்.

O-இலிருந்து OQ-இல் h_2-இன் அளவுக் குறிகளின் தூரங்கள் வருமாறு :



படம் 25

$\left(\frac{1}{u}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right)$-இன் நேமவரையம்

OP=10 செ.மீ. OQ=10 செ.மீ.

OA=4·4 செ.மீ. AR =5·5 செ.மீ.

$$\frac{OA}{AR}=\frac{4\cdot 4}{5\cdot 5}=\frac{4}{5}$$

h_2-அளவு கோலைக் குறிக்கும் சமன்பாடு : $y=\lambda_2 h_2=0{\cdot}025\ h_2$.

ஆகவே, அளவுக்குறி 50-இன் தூரம் $=0{\cdot}025\ (50-0)=\ 1{\cdot}25$ செ.மீ

100-இன் தூரம் $=0{\cdot}025\ (100-0)=\ 2{\cdot}50$ செ.மீ

200-இன் தூரம் $=0{\cdot}025\ (200-0)=\ 5{\cdot}00$ செ.மீ

300-இன் தூரம் $=0{\cdot}025\ (300-0)=\ 7{\cdot}50$ செ.மீ

400-இன் தூரம் $=0{\cdot}025\ (400-0)=10{\cdot}00$ செ.மீ

இப்பொழுது OA-இல் u-இன் அளவுக் குறிகளைப் பின்வருமாறு குறிக்கவும்.

u-அளவு கோலின் சமன்பாடு: $Z = 0{\cdot}02\ u$

O-இலிருந்து 50-இன் தூரம் $= 0{\cdot}02\ (\ 50-0) = 1$ செ.மீ.

100-இன் தூரம் $= 0{\cdot}02\ (100-0) = 2$ செ.மீ.

இதுபோல், 200, 300, 400, 500, ...ஆகிய அளவுக் குறிகளின் தூரங்கள் முறையே 4 செ.மீ., 6 செ.மீ., 8 செ.மீ., 10 செ.மீ.,......... ஆகும். இந்த அளவுக் குறிகளின் வழியே AR-க்கு இணையாக OR-ஐச் சந்திக்குமாறு நேர்கோடுகள் வரைக. இந்த நேர் கோடுகள் OR-ஐ வெட்டும் புள்ளிகள் u-அளவு கோலின் 50, 100, 200, 300, 400, 500,......என்ற அளவுக் குறிகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகளாகும். இவ்வாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூத்திரத்திற்குரிய நேமவரையத்தைப் பெறுகிறோம்.

இப்போது h_1 அளவு கோலில் 240 அளவுக் குறியையும், h_2 அளவு கோலில் 160 அளவுக் குறியையும் ஒரு நேர்கோட்டினால் சேர்க்கவும். இந்த நேர்கோடு u-அளவு கோலை வெட்டும் புள்ளியின் அளவுக்குறி $u = 96$ என்று காணலாம். ஆகவே, $h_1 = 240$, $h_2 = 160$ ஆகயிருக்கும்போது u-இன் மதிப்பு 96 என்று காண்கிறோம்.

16·4. வட்ட நேம வரையம் (Circular Nomogram)

ஒரு கிடைக்கோடு (Horizontal line) வரைந்து, அதனைத் தொடுமாறு ஏதாவது ஒரு ஆரை (radius)யில் ஒரு வட்டம் வரைந்து கொள்க. அத்தொடுபுள்ளி வழியாகவும், வட்டத்தின் மையத்தின் வழியாகவும் செல்லுமாறு அக்கிடைக்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக ஒரு நேர்கோடு வரைக. இவ்விரு நேர்கோடுகளும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியை O என்றும், வட்டத்தின் ஆரையை R என்றும் கொள்வோம். கிடைக்கோட்டில், O–இலிருந்து P ஒன்ற அளவுக் குறியின் தூரம் $\frac{2R}{P}$ அலகு இருக்குமாறு அளவுக் குறிகளைக் குறிக்கவும். இது போன்று, செங்குத்துக் கோட்டில் O-இலிருந்து P என்ற அளவுக் குறியின் தூரம் $\frac{2R}{1-P}$ என்ற தூரத்திலிருக்குமாறு அளவுக் குறிகளைக் குறிக்கவும். பின்னர், வட்டத்தின் பரிதி (Circumference)யின் மேல் அளவுக் குறிகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிக்க வேண்டும். வட்டத்தின் உச்சிப் புள்ளியை O_1 எனக் கொள்வோம். O_1-ஐயும், கிடைக்கோட்டிலுள்ள ஒரு அளவுக்குறியையும் சேர்க்கும் நேர்கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளியில் அந்த கிடைக்கோட்டின் அளவுக் குறியிட்டை

மாற்று அடையாளத்துடன் குறிக்க வேண்டும். உதாரணமாக, O_1 ஐயும் கிடைக்கோட்டிலுள்ள 2·0 என்ற அளவுக் குறியையும் சேர்க்கும் நேர் கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளியின் அளவுக்குறி −2·0 ஆகும். இதுபோல் O_1-ஐயும் −1·5-ஐயும் சேர்க்கும் நேர்கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளி 1·5-ஐக் குறிக்கும். இவ்வாறு வட்டத்தின் மேல் குறிக்கப்பட்டுள்ள அளவுக் குறிகளிலிருந்து இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மெய் மூலங்களைக் காணலாம். இந்த வட்டத்திற்கு மூலவட்டம் (Circle of Roots) என்று பெயர்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருபடிச் சமன்பாட்டை $x^2+ax+b=0$ என்ற அமைப்பில் மாற்றி எழுதிக் கொள்ளவும். கிடையளவு கோலில் (Horizontal scale) a அளவைக் குறிக்கும் புள்ளியையும் b அளவைக் குறிக்கும் புள்ளியையும் ஒரு நேர் கோட்டினால் சேர்ப்பதாகக் கொள்வோம். இந்த நேர்கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளின் அளவுக் குறியீடுகள் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

16.4·1. வட்ட நேம வரையம் வரையும் முறை

4 அங்குல ஆரையளவுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து, அதன் அடிப்பக்கத்தைத் தொடுமாறு ஒரு கிடைக்கோடும், தொடு புள்ளி வழியாக ஒரு செங்குத்துத்துக் கோடும் வரைக. இரு கோடுகளும் வெட்டும் புள்ளியை O எனக் கொள்க. கிடைக்கோட்டில் O இலிருந்து P என்ற அளவுக் குறியின் தூரம் $\frac{2R}{P}=\frac{8}{P}$ அங்குலம் இருக்குமாறு அளவுக் குறிகளைக் கீழ்க் கண்டவாறு குறிக்கவும்.

O-இலிருந்து 10 இன் தூரம் $=\frac{8}{10}=0{\cdot}8''$; −10 இன் தூரம் $=-0{\cdot}8''$

8 இன் தூரம் $=\frac{8}{8}=1{\cdot}0''$; −8 இன் தூரம் $=-1{\cdot}0''$

6 இன் தூரம் $=\frac{8}{6}=1{\cdot}3''$; −6 இன் தூரம் $=-1{\cdot}3''$

5 இன் தூரம் $=\frac{8}{5}=1{\cdot}6''$; −5 இன் தூரம் $=-1{\cdot}6''$

4 இன் தூரம் $=\frac{8}{4}=2{\cdot}0''$; −4 இன் தூரம் $=-2{\cdot}0''$

3 இன் தூரம் $=\frac{8}{3}=2{\cdot}7''$; −3 இன் தூரம் $=-2{\cdot}7''$

2 இன் தூரம் $=\frac{8}{2}=4{\cdot}0''$; −2 இன் தூரம் $=-4{\cdot}0''$

$$1{\cdot}5 \text{ இன் தூரம்} = \frac{8}{1{\cdot}5} = 5{\cdot}3''; -1{\cdot}5 \text{ இன் தூரம்} = -5{\cdot}3''$$

$$1{\cdot}0 \text{ இன் தூரம்} = \frac{8}{1} = 8{\cdot}0''; -1{\cdot}0 \text{ இன் தூரம்} = -8{\cdot}0''$$

இதுபோல், செங்குத்துக் கோட்டில் O-இலிருந்து P என்ற அளவுக்குறியின் தூரம் $\frac{2R}{1-P} = \frac{8}{1-P}$ அங்குலம் இருக்குமாறு அளவுக் குறிகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிக்கவும்.

O-இலிருந்து 10 இன் தூரம் $= \frac{8}{-9} = -0{\cdot}9''$

9 இன் தூரம் $= \frac{8}{-8} = -1{\cdot}0''$

8 இன் தூரம் $= \frac{8}{-7} = -1{\cdot}1''$

6 இன் தூரம் $= \frac{8}{-5} = -1{\cdot}6''$

5 இன் தூரம் $= \frac{8}{-4} = -2{\cdot}0''$

3 இன் தூரம் $= \frac{8}{-2} = -4{\cdot}0''$

2·5 இன் தூரம் $= \frac{8}{-1{\cdot}5} = -5{\cdot}3''$

2·0 இன் தூரம் $= \frac{8}{-1} = -8{\cdot}0''$

இதுபோல், செங்குத்துக் கோட்டில் O-இலிருந்து

-10 இன் தூரம் $= \frac{8}{11} = 0{\cdot}73''$

-9 இன் தூரம் $= \frac{8}{10} = 0{\cdot}80''$

-7 இன் தூரம் $= \frac{8}{8} = 1{\cdot}00''$

-5 இன் தூரம் $= \frac{8}{6} = 1{\cdot}30''$

-4 இன் தூரம் $= \frac{8}{5} = 1{\cdot}60''$

-3 இன் தூரம் $=\frac{8}{4}=2{\cdot}00''$

-2 இன் தூரம் $=\frac{8}{3}=2{\cdot}67''$

$-1{\cdot}5$ இன் தூரம் $=\frac{8}{2{\cdot}5}=3{\cdot}2''$

-1 இன் தூரம் $=\frac{8}{2}=4{\cdot}0''$

$-0{\cdot}8$ இன் தூரம் $=\frac{8}{1{\cdot}8}=4{\cdot}4''$

$-0{\cdot}6$ இன் தூரம் $=\frac{8}{1{\cdot}6}=5{\cdot}0''$

$-0{\cdot}4$ இன் தூரம் $=\frac{8}{1{\cdot}4}=5{\cdot}7''$

$-0{\cdot}2$ இன் தூரம் $=\frac{8}{1{\cdot}2}=6{\cdot}7''$

$-0{\cdot}1$ இன் தூரம் $=\frac{8}{1{\cdot}1}=7{\cdot}3''$

$-0{\cdot}5$ இன் தூரம் $=\frac{8}{1{\cdot}05}=7{\cdot}6''$

0 இன் தூரம் $=\frac{8}{1}=8{\cdot}0''$

$0{\cdot}05$ இன் தூரம் $=\frac{8}{0{\cdot}95}=8{\cdot}4''$

$0{\cdot}10$ இன் தூரம் $=\frac{8}{0{\cdot}9}=8{\cdot}9''$

$0{\cdot}15$ இன் தூரம் $=\frac{8}{0{\cdot}85}=9{\cdot}4''$

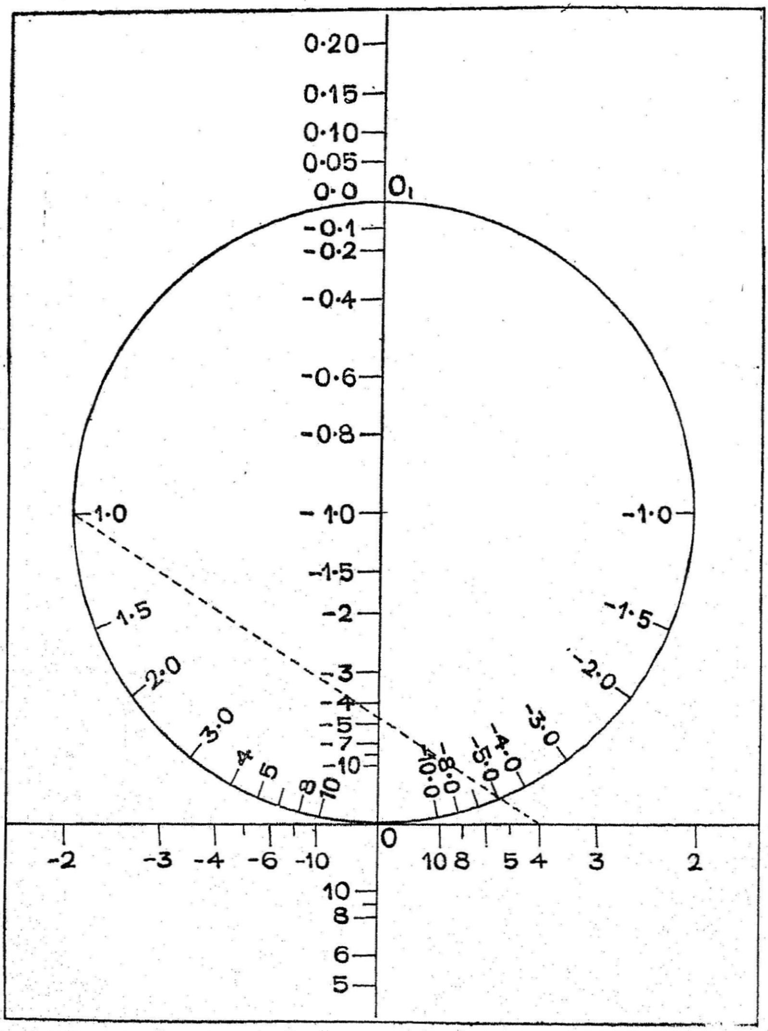
$0{\cdot}20$ இன் தூரம் $=\frac{8}{0{\cdot}8}=10{\cdot}0''$

மேற்கண்ட விவரங்களைக்கொண்டு இரு நேர்கோடுகளிலும் வட்டத்தின் பரிதியிலும் அளவுக் குறிகளைக் குறித்தபின் கிடைக்கும் படம் தான் இருபடிச் சமன்பாட்டிற்குரிய வட்ட நேமவரையமாகும்.

இப்பொழுது $x^2+4x-5=0$ இன் மூலங்களை நேம வரையத்திலிருந்து காண்போம்.

இங்கு $a=4$; $b=-5$.

ஆகவே, கிடையளவு கோலில் 4 என்ற அளவுக் குறியையும், செங் குத்து அளவு கோலில் -5 என்ற அளவுக் குறியையும் சேர்க்கும் கோடு வட்டத்தை $-5{\cdot}0$, $1{\cdot}0$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. ஆகவே, $x^2+4x-5=0$ இன் மூலங்கள் $x=1$, -4 ஆகும்.



படம் 26

வட்ட நேமவரையம்

இப்பொழுது, இதே நேம வரையத்தைக் கொண்டு $2x^2+7x-20=0$ இன் மூலங்களைக் காண்போம்.

சமன்பாட்டை 2 ஆல் வகுத்தால்

$$x^2+3{\cdot}5x-10=0$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

இங்கு $a=3{\cdot}5$, $b=-10$.

ஆகவே, கிடையளவு கோலில் 3·5க் குரிய புள்ளியையும், செங்குத்து அளவு கோலில் −10க் குரிய புள்ளியையும் சேர்க்கும் நேர்க்கோடு வட்டத்தை −5·4, 1·9 என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுவதைக் காணலாம். ஆகவே, $2x^2+7x-20=0$ இன் மூலங்கள் −5·4, 1·9 ஆகும்.

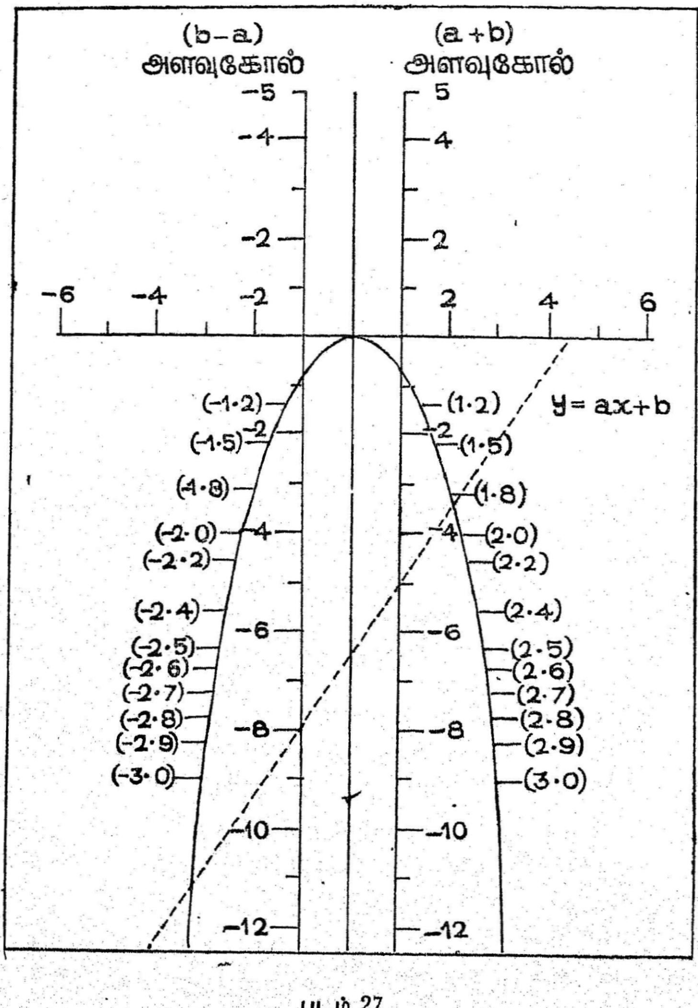
16.5 பரவளைய நேம வரையம் (Parabolic Nomogram)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருபடிச் சமன்பாட்டை $x^2+ax+b=0$ என்ற அமைப்பில் மாற்றி எழுதி, பின் அதை $-x^2=ax+b$ என்று எழுதிக் கொள்ளவேண்டும். இப்பொழுது $y=-x^2$, $y=ax+b$ என்று சமன் படுத்தினுல், $y=-x^2$ என்ற பரவளையமும், $y=ax+b$ என்ற நேர் கோடும் கிடைக்கின்றன. இப் பரவளையத்தையும், நேர் கோட்டையும் ஒரே வரைபடத்தாளில் வரைந்தால், இவைகள் வெட்டுகின்ற புள்ளிகளின் x-அச்சுத் தூரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

முதலில் $y=-x^2$ என்ற பரவளையத்தை வரைந்து, அதன் மேலுள்ள புள்ளிகளில் அவற்றின் x-அச்சுத் தூரங்களை அளவுக் குறிகளாகக் குறிக்க வேண்டும். இந்த அளவுக் குறிகள் யாவும் படம் 27-இல் அடைப்புக்குள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இப்பொழுது, y-அச்சின் இரு பக்கமும் 1 அலகு தூரத்தில் இரண்டு இணை கோடுகள் வரைக. இக் கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $x=1$, $x=-1$ ஆகும். $y=ax+b$ என்ற நேர்கோடு $x=1$ என்ற கோட்டை $(1, a+b)$ என்ற புள்ளியிலும், $x=-1$ என்ற நேர் கோட்டை $(-1, b-a)$ என்ற புள்ளியிலும் வெட்டுகிறது. $x=1$ என்ற நேர் கோட்டை $(a+b)$ அளவு கோலாகவும், $x=-1$ என்ற நேர்கோட்டை $(b-a)$ அளவு கோலாகவும் கருதி அவற்றில் அளவுக் குறிகளைக் குறிக்கவும்.

இவ்விரு அளவு கோல்களும், x-அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளை ஆரம்பப் புள்ளிகளாகவும், x-அச்சுக்கு மேலே நேரெண்ணளவுக் குறிகளையும், x-அச்சுக்குக் கீழே எதிரெண்ணளவுக் குறிகளையும் கொண்டு அமைக்கப்படுகின்றன. $(b-a)$-அளவு கோலிலுள்ள $(-1, b-a)$ என்ற புள்ளியையும், $(a+b)$-அளவு கோலிலுள்ள

(1, a+b) என்ற புள்ளியையும் சேர்க்கும் நேர்கோடுதான் y=ax+b என்ற சமன்பாட்டின் நேர் கோடாகும். ஆகவே, இந்த நேர் கோடு பரவளையத்தை வெட்டும் புள்ளிகளின் அளவுக் குறிகளிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்களைப் பெறலாம். இவ்வாறு கிடைக்கப் பெற்ற படம்தான் இருபடிச் சமன்பாட்டிற்குரிய பரவளைய நேம வரையமாகும்.



படம் 27

பரவளைய நேமவரையம்

மாதிரி 215

$x^2+ax+b=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க ஒரு நேம வரையம் வரைந்து அதைப் பயன்படுத்தி $x^2+3x-5=0$ ஐத் தீர்க்கவும் (சென்னை '66 செப்.)

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$-x^2=3x-5$$

என்று எழுதிக் கொள்ளவும். இப்பொழுது, $y=-x^2$ என்ற பரவளையத்தையும், $y=3x-5$ என்ற நேர்கோட்டையும் ஒரே வரைபடத்தில் வரைந்து, அவை யிரண்டும் வெட்டுகின்ற புள்ளிகளிலிருந்து வேண்டிய மூலங்களைப் பெறலாம். முதலில் $y=-x^2$ என்ற பரவளையத்தை வரையவும். x-இன் சில மதிப்புக்களிலிருந்து அவற்றிற்குரிய y இன் மதிப்புக்களை $y=-x^2$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் கணக்கிட்டு, இம் மதிப்புக்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியல் படுத்திப் பின்னர், அப்பட்டியல் மதிப்புக்களின் துணையால் பரவளையத்தை வரையலாம்.

x:	−3	−2·5	−2	−1·5	−1	−0·5	0	0·5	1
y:	−9	−6·25	−4	−2·25	−1	−0·25	0	−0·25	−1

x:	1·5	2	2·5	3
y:	−2·25	−4	−6·25	−9

பரவளையம் வரைந்தபின், அதன் மேல் அளவுக் குறிகளைக் கீழ்க் கண்டவாறு குறிக்கவும். பரவளையத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியின் அளவுக் குறியானது அப்புள்ளியின் x-அச்சுத் தூரத்தால் குறிப்பிடப் படவேண்டும். பின்னர், $x=-1$, $x=1$ என்ற நேர் கோடுகளை வரையவும். $x=-1$ என்ற நேர்கோடு $(b-a)$ என்ற அளவு கோலாகும். $x=1$ என்ற நேர்கோடு $(a+b)$ என்ற அளவு கோலாகும். இவ்வாறு கிடைக்கும் படம்தான் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் நேம வரையமாகும். (பார்க்க: படம் 28)

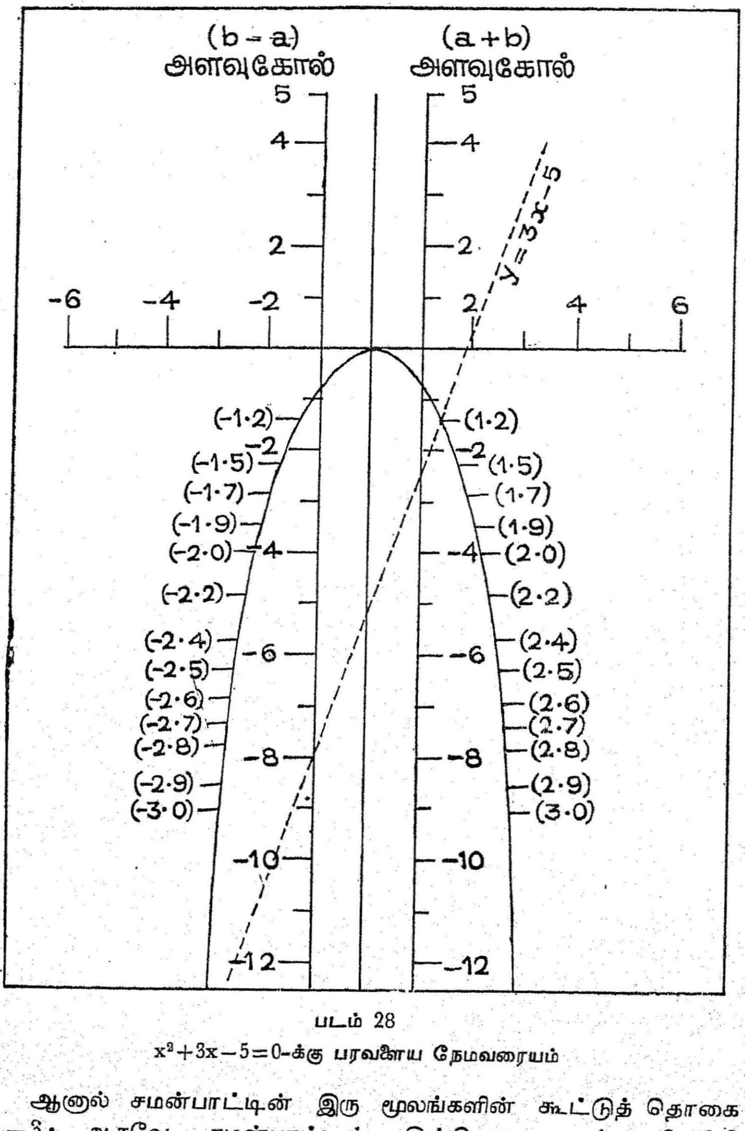
இங்கு $y=3x-5$ என்ற நேர்கோடு நேம வரையத்தின் பரவளையத்தை வெட்டும் புள்ளிகளிலிருந்துதான் மூலங்களைப் பெறவேண்டும்.

$a=3,\ b=-5$;

$\therefore\ a+b=-2;\quad b-a=-8$ ஆகும்.

ஆகவே, $a+b$ அளவு கோலிலுள்ள -2 என்ற புள்ளியையும் $b-a$ அளவு கோலிலுள்ள -8 என்ற புள்ளியையும் சேர்க்கும் நேர்கோடு

தான் $y = 3x - 5$ என்ற நேர் கோடாகும். இது பரவளையத்தை 1·2 என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது. ஆகவே, 1·2 என்பது ஒரு மூலமாகும்.



படம் 28

$x^2 + 3x - 5 = 0$-க்கு பரவளைய நேமவரையம்

ஆனால் சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களின் கூட்டுத் தொகை $= -3$; ஆகவே, சமன்பாட்டின் இன்னொரு மூலம் $= -3 - 1{\cdot}2 = -4{\cdot}2$ ஆகவே, சமன்பாட்டின் மூலங்கள்; $-4{\cdot}2$, $1{\cdot}2$ ஆகும்.

16.6 நேம வரையத்தின் மூலம் முப்படிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்.

$x^3+ax+b=0$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுக.

இச் சமன்பாட்டை $ax+b=-x^3$ என்று எழுதலாம். ஆகவே, $y=-x^3$ என்ற வளைவை $y=ax+b$ என்ற நேர்கோடு வெட்டும் புள்ளிகளிலிருந்து சமன்பாட்டின் மூலங்கள் கிடைக்கின்றன. முதலில் $y=-x^3$ என்ற வளைவை வரைந்து, அதன் மேலுள்ள புள்ளிகளில் அவற்றின் x-அச்சுத் தூரங்களை அளவுக் குறிகளாகக் குறித்துக் கொள்ளவும். பின், $x=-1$, $x=1$ என்ற நேர்கோடுகளை வரைந்து அவற்றை முறையே $(b-a)$, $(a+b)$ என்ற அளவு கோல்களாகக் கொள்ளவும். $(b-a)$ அளவு கோலிலுள்ள $(-1, b-a)$ என்ற புள்ளியையும், $(a+b)$-அளவு கோலிலுள்ள $(1, a+b)$ என்ற புள்ளியையும் சேர்க்கும் நேர்கோடு தான் $y=ax+b$ என்ற நேர் கோடாகும். இந்த நேர்கோடு $y=x^3$ என்ற வளைவை வெட்டும் புள்ளிகளின் அளவுக் குறிகளிலிருந்து சமன்பாட்டின் மூலங்களைப் பெறலாம்.

மாதிரி 216

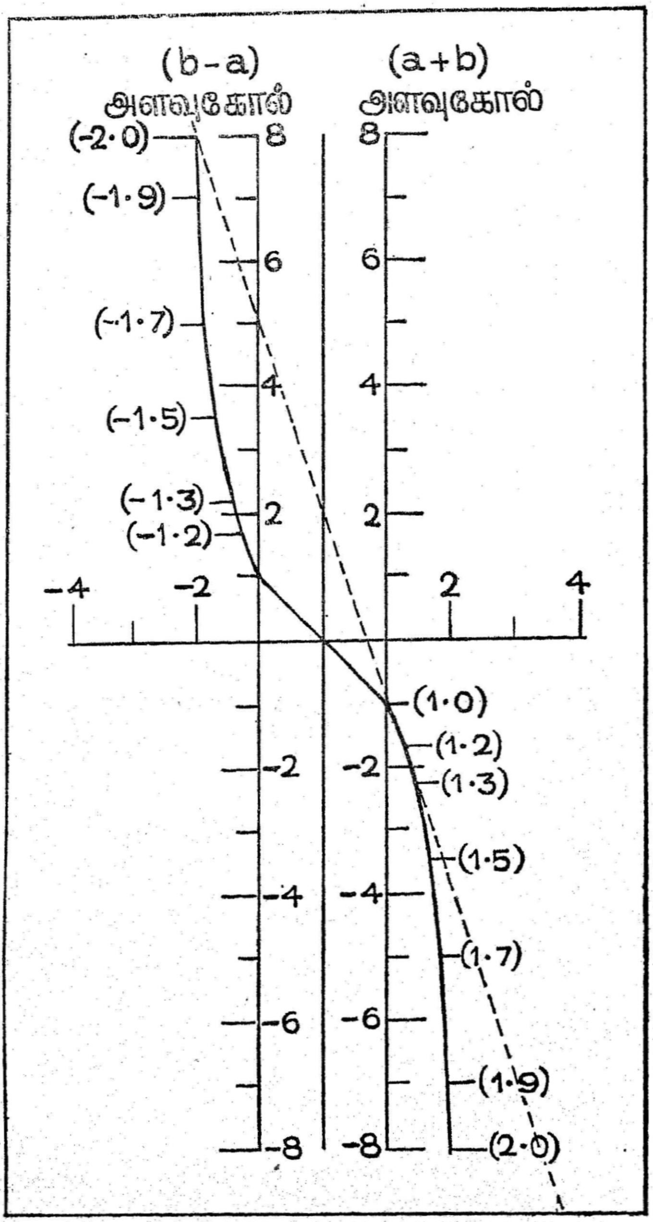
$x^3-3x+2=0$ என்ற சமன்பாட்டினை நேமவரையத்தின் மூலம் தீர்க்கவும். (சென்னை '66 ஏப்.)

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $-x^3=-3x+2$ என்று எழுதவும். இப்பொழுது $y=-x^3$ என்ற வளைவையும், $y=-3x+2$ நேர்கோட்டையும் வரைய வேண்டும். முதலில் $y=-x^3$ என்ற வளைவை வரைவோம். x இன் சில மதிப்புக்களையுப அவற்றிற்குரிய y இன் மதிப்புக்களையும் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியல் படுத்தவும்.

x :	−2	−1·9	−1·7	−1·5	−1·3	−1·2	−1	0
y :	8	6·86	4·9	3·4	2·2	1·7	1	0
x :	2	1·9	1·7	1·5	1·3	1·2	1	
y :	−8	−6·86	−4·9	−3·4	−2·2	−1·7	−1	

மேற்கண்ட பட்டியல் மதிப்புக்களைக் கொண்டு $y=-x^3$ என்ற வளைவை வரைந்து, மேற்கண்ட புள்ளிகளின் பக்கத்தில் அப்புள்ளி களுக்குரிய x-அச்சுத் தூரங்களை அடைப்புகளுக்குள் படம் 29 இல் உள்ளது போல் குறிக்கவும்.

இப்பொழுது, $x=-1$, $x=1$ என்ற நேர்கோடுகளை வரையவும். இந்த நேர்கோடுகளில் அளவுக் குறிகளைக் குறித்துக் கொள்ளவும். $x=-1$ என்ற நேர்கோடுதான் $(b-a)$ என்ற அளவு கோலாகும். $x=1$ என்ற நேர்கோடு $(a+b)$ என்ற அளவு கோலாகும்.


(b-a)
அளவுகோல்
(a+b)
அளவுகோல்
(-2·0)
(-1·9)
(-1·7)
(-1·5)
(-1·3)
(-1·2)
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-4
-2
2
4
(1·0)
(1·2)
(1·3)
(1·5)
(1·7)
(1·9)
(2·0)

படம் 29

படம் 29 தான் $x^3+ax+b=0$ என்ற முப்படிச் சமன்பாட்டின் நேமவரையமாகும். இப்பொழுது $y=-3x+2$ என்ற நேர்கோட்டை வரைந்து, அந்த நேர்கோடு $y=-x^3$ இன் வளைவை வெட்டும் புள்ளிகளின் x-அச்சுத் தூரங்களைக் காணவேண்டும். $y=-3x+2$ என்ற சமன்பாட்டை $y=ax+b$ என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட்டால், $a=-3$, $b=2$.

$$\therefore \quad b-a=5, \qquad a+b=-1.$$

ஆகவே, $(b-a)$-அளவு கோலில் 5 என்ற புள்ளியையும், $(a+b)$-அளவு கோலில் -1 என்ற புள்ளியையும் சேர்க்கும் நேர்கோடு தான் $y=-3x+2$ என்ற நேர்கோடாகும். இக்கோடு $y=-x^3$ இன் வளைவை வெட்டும் புள்ளிகளின் அளவுக் குறிகள் $1, -2$ என்று காணலாம். ஆகவே, சமன்பாட்டின் இரண்டு மூலங்கள் $1, -2$ ஆகும். ஆனால், சமன்பாட்டின் மூன்று மூலங்களின் கூட்டுத் தொகை 0 என்று அறிகிறோம். ஆகவே, மூன்றாவது மூலம் 1 ஆகும். ஆகவே, சமன்பாட்டின் மூன்று மூலங்களும் $1, 1, -2$ ஆகும்.

மாதிரி 217

$x^3+3x^2+x+3=0$ என்ற சமன்பாட்டை நேமவரைய முறைப்படித் தீர்க்கவும்.

முதலில், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டினை x^2 உறுப்பு இல்லாத சமன்பாடாக மாற்றவும். ஆகவே, அதன் மூலங்களிலிருந்து -1 ஐக் குறைக்கவும்.

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\
 & & -1 & -2 & 1 \\ \hline
 & & 2 & -1 & 4 \\
 & & -1 & -1 & \\ \hline
 & & 1 & -2 & \\
 & & -1 & & \\ \hline
 & & 0 & & \\ \hline
 & 1 & & &
\end{array}$$

மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு: x^3-2x+4.

அதாவது, $-x^3=-2x+4$.

ஆகவே, படம் 24 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நேமவரையத்திலிருந்து $y=-2x+4$ என்ற நேர்கோடு, $y=-x^3$ என்ற வளைவை வெட்டும் புள்ளிகளின் அளவுக் குறிகளின் x-அச்சுத் தூரங்களைக் காண வேண்டும்,

$y=-2x+4$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து $a=-2$, $b=4$ என்று அறிகிறோம். ஆகவே, $b-a=6$, $a+b=2$. எனவே, $(b-a)$-அளவு கோலிலுள்ள 6 என்ற புள்ளியையும், $(a+b)$-அளவு கோலிலுள்ள 2 என்ற புள்ளியையும் சேர்க்கும் நேர்கோடுதான் $y=-2x+4$ என்ற நேர்கோடாகும். இந்த நேர்கோடு $y=-x^3$ இன் வளைவை $x=-2$ என்ற அளவுக் குறியில் வெட்டுகிறது. ஆகவே, $x^3-2x+4=0$ இன் ஒரு மூலம் $x=-2$ ஆகும். மற்ற இரு மூலங்களும் கற்பனை யானவை. ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் மெய் மூலம் $=-2+(-1)=-3$ ஆகும்.

16.7 கோண விகிதச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் (Solutions of Trigonometric equations)

$a\cos\theta+b\sin\theta=1$ என்ற கோண விகிதச் சமன்பாட்டைக் கருதுக. $a=x$, $b=y$ எனக் கொண்டால்,

$$x-a=0$$
$$y-b=0$$
$$x\cos\theta+y\sin\theta-1=0$$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. இவை மூன்றும் இசைவான (consistent) சமன்பாடுகளாக யிருந்தால், கீழ்க்காணும் அணி கோவை (determinant) பூச்சியமாகும்.

அதாவது,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix}=0$$

முதல், இரண்டாம் நிரைகளை (rows) முறையே a, b-ஆல் வகுத்துப் பின்னர் மூன்றும் நிரலை (column) -1 ஆல் பெருக்கினால்,

$$-ab\begin{vmatrix} 1/a & 0 & 1 \\ 0 & 1/b & 1 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix}=0$$

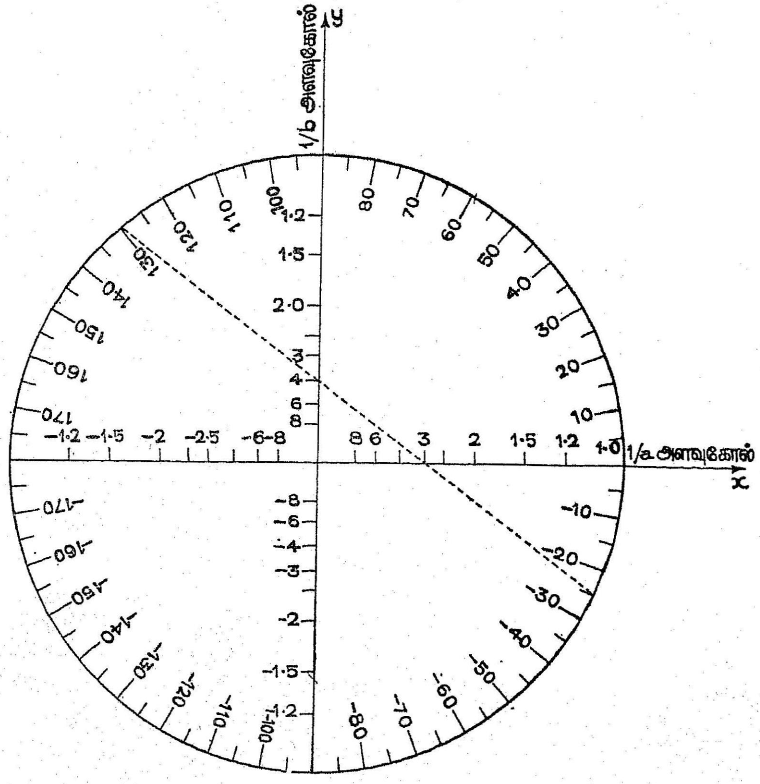
என்று கிடைக்கிறது.

இப்பொழுது, $x_1=1/a$, $y_1=0$;
$x_2=0$, $y_2=1/b$;
$x_3=\cos\theta$, $y_3=\sin\theta$

எனக் கொண்டால்,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என்று கிடைக்கிறது. ஆனுல் இந்த அணி கோவை பூச்சியமானுல் (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர் கோட்டிலமையும். ஆனுல் முதல் புள்ளியாகிய $x_1 = 1/a$, $y_1 = 0$ என்பது x-அச்சின் மேல் உள்ளது. ஆகவே, x-அச்சின் மேல் $1/a$ அளவு கோலே அதன் அளவுக் குறிகள் ஆதி (origin)யிலிருந்து $1/a$ அலகு தூரங்களிலிருக்குமாறு குறிக்கவும். இதுபோல், இரண்டாவது புள்ளியாகிய $x_2 = 0$, $y_2 = 1/b$ என்பது y-அச்சின்மேலமைந்திருப்பதால், y-அச்சின் மேல் $1/b$ அளவு கோலே அதன் அளவுக் குறிகள் ஆதியிலிருந்து $1/b$ அலகு தூரங்களிலிருக்குமாறு குறிக்கவும். மூன்ருவது புள்ளியாகிய $x_3 = \cos\theta$, $y_3 = \sin\theta$ என்பது $x^2 + y^2 = 1$ என்ற வட்டத்தின் மேல் அமைந்துள்ளது. ஆகவே, ஆதியை மையமாகவும், ஏதாவது ஒரு வசதியான நீளம் k-யை ஒரு அலகு ஆரையாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக. இங்கு 1 அலகு$=$k என்று வைத்திருப்பதால், x-அச்சில் $1/a$ அளவு கோலின் அளவுக் குறிகள் ஆதியிலிருந்து $1/a$ அலகு$=k/a$ தூரத்திலிருக்குமாறு குறிக்கப்படுகிறது. இதுபோல், y-அச்சில் $1/b$ அளவு கோலின் அளவுக் குறிகள் ஆதியிலிருந்து $1/b$ அலகு$=k/b$ தூரத்திலிருக்குமாறு குறிக்கவேண்டும். வரையப்பட்ட வட்டத்தின் பரிதி (circumference)யின் மேல் $0°$ முதல் $180°$ வரை இடஞ்சுழியாகவும் (anticlockwise), $0°$ முதல் $-180°$ வரை வலஞ்சுழியாகவும் (clockwise) ஒரே சீராக, θ-என்ற அளவு கோலேக் குறிக்கவும். இவ்வாறு, $1/a$-அளவுகோல், $1/b$-அளவுகோல், θ-அளவு கோல் என்ற மூன்று அளவு கோல்கள் கிடைக்கின்றன. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) என்ற மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டிலமையுமாறு இம் மூன்று அளவு கோல்களும் அமைக்கப்பட்டிருப்பதால், $1/a$, $1/b$ ஆகிய அளவு கோல்களின் ஏதாவது இரு அளவுக் குறிகளேச் சேர்க்கும் நேர்கோடு θ-அளவு கோலே (அதாவது வட்டத்தை) $1/a$, $1/b$ ஆகிய அளவுக் குறிகளுக்குரிய θ-அளவுக் குறியில் வெட்டும். இவ்வாறு கிடைக்கப் பெற்ற படம்தான். $a\cos\theta + b\sin\theta = 1$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையமாகும். (படம் 30). ஆகவே, a, b ஆகியவற்றின் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், x, y-அச்சுக்களில் அவற்றிற்குரிய புள்ளிகளே ஒரு நேர் கோட்டினுல் சேர்த்து, அந்த நேர்கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளிலிருந்து θ இன் மதிப்புக்களேப் பெறலாம்.



படம் 30

கோண விகித நேம வரையம் வரைதல் :

4″ ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து, வட்ட மையத்தின் வழியே ஒரு கிடைக்கோடும், ஒரு செங்குத்துக் கோடும் வரைக. ஆகவே, $k=4''=1$ அலகு. கிடைக் கோட்டில் $1/a$ அளவு கோலின் அளவுக் குறிகளைக் குறிக்கவும் :

மையம் 0-இலிருந்து a அளவுக் குறியின் தூரம் $=\frac{1}{a}$ அலகு $=\frac{4''}{a}$ ·

∴ 0-இலிருந்து 8 இன் தூரம் $=\frac{4}{8}=0{\cdot}5''$

,, 6 இன் தூரம் $=\frac{4}{6}=0{\cdot}67''$

,, 4 ,, $=\frac{4}{4}=1{\cdot}0''$

$$\text{,,}\quad 2\cdot5 \quad \text{,,}\qquad = \frac{4}{2\cdot5} = 1\cdot6''$$

$$\text{,,}\quad 2\cdot0 \quad \text{,,}\qquad = \frac{4}{2} = 2\cdot0''$$

$$\text{,,}\quad 1\cdot5 \quad \text{,,}\qquad = \frac{4}{1\cdot5} = 2\cdot7''$$

$$\text{,,}\quad 1\cdot2 \quad \text{,,}\qquad = \frac{4}{1\cdot2} = 3\cdot3''$$

$$\text{,,}\quad 1\cdot0 \quad \text{,,}\qquad = \frac{4}{1} = 4\cdot0''$$

இதுபோல், செங்குத்துக் கோட்டில் $1/b$ அளவு கோலின் அளவுக் குறிகளைக் குறிக்கவும். வட்டத்தின் பரிதியின் மேல் கிடைக் கோட்டிலிருந்து $0°$ முதல் $180°$ வரை இடஞ்சுழியாகவும், $0°$ முதல் $-180°$ வரை வலஞ்சுழியாகவும் ஒரே சீராகக் குறிக்கவும். இவ்வாறு கிடைக்கப் பெற்ற படம்தான் $a \cos\theta + b \sin\theta = 1$ என்ற சமன் பாட்டுக்குரிய கோணவிகித நேம வரையமாகும் (படம் : 30).

மாதிரி 218

$3 \cos Z + 4 \sin Z = 1$ என்ற சமன் பாட்டின் மெய் மூலத்தைக் காண்க. (சென்னை '60 செப்.)

இங்கு $a = 3,\ b = 4.$

படம் 30-இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நேம வரையத்திலிருந்து இச் சமன்பாட்டின் மூலத்தைப் பெறலாம்.

$1/a$ அளவு கோலில் $a = 3$ என்ற புள்ளியையும், $1/b$ அளவு கோலில் $b = 4$ என்ற புள்ளியையும் ஒரு நேர்க்கோட்டினால் சேர்க்கவும் (படம் 30-ல் புள்ளிக்கோட்டினால் சேர்க்கப் பட்டுள்ளது) இந்த நேர்கோடு வட்டத்தை $131°\ 30'$; $25°$ என்ற அளவுக் குறிகளில் வெட்டுகிறது. ஆகவே, சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $Z = 131°\ 30'$; $Z = 25°$ ஆகும்.

பயிற்சி 30

1. x–இன் மதிப்பு 2·5–இலிருந்து 6·0 வரையும், y–இன் மதிப்பு 25–இலிருந்து 36 வரையும் மாறுகின்ற

$$S = 1\cdot2x + 0\cdot25y + 0\cdot2$$

என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கப் பயன்படும் நேம வரையம் வரைக. அதைப் பயன்படுத்தி $S = 13\cdot2$, $x = 5$ ஆகயிருக்கும்போது y-இன் மதிப்பைக் காண்க. (சென்னை '66 ஏப்.)

2. $Z=0 \cdot 7x+0 \cdot 05y+3 \cdot 2$ என்ற சமன்பாட்டில் x–இன் மதிப்பு 0·1 முதல் 0·5 வரையும், y–இன் மதிப்பு 0·3 முதல் 3 வரையும் மாறுகின்றன. சமன் பாட்டைத் தீர்க்க ஒரு நேம வரையம் வரைக.

3. x–இன் மதிப்பு (0·1, 1·0) என்ற வீச்சையும், y–இன் மதிப்பு (1·0, 2·0) என்ற வீச்சையும் கொண்டுள்ள

$$S=2\sqrt{x}+3y$$

என்ற சமன்பாட்டிற்கு நேம வரையம் வரைந்து $x=0 \cdot 6$, $S=5$–ஆகயிருக்கும் போது y–இன் மதிப்பைக் காண்க. (சென்னை '67 ஏப்.)

4. $A=4\sqrt{x}+5\sqrt[3]{y}$ என்ற சமன்பாட்டில் x–இன் மதிப்பு 1·1 முதல் 2·0 வரையும், y–இன் மதிப்பு 0·1 முதல் 1·0 வரையும் மாறுகின்றன. நேமவரையம் வரைந்து $A=9$, $x=1 \cdot 2$-ஆகயிருக்கும்போது y–இன் மதிப்பைத் தோராயமாகக் காண்க. (சென்னை 70 ஏப்.)

5. $W=2 \cdot 2\ VU^{3/2}$, $1 \leq V \leq 10$, $0 \cdot 5 \leq U \leq 2 \cdot 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க நேமவரையம் வரையும் முறையை விளக்குக. (சென்னை '62 ஏப்., '66 செப்.)

6. $Q=2 \cdot 45\ VD^2$ என்ற சமன்பாட்டில் V-ஆனது 0·10 முதல் 1·0 வரையும், D-ஆனது 0·35 முதல் 1·0 வரையும் மாறுகின்றன. சமன்பாட்டைத் தீர்க்க ஒரு நேமவரையம் வரைக.

7. $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f}$ என்ற சமன்பாட்டில், u=பொருளின் தூரம் (0 முதல் 100 வரை), v=பிம்பத்தின் தூரம் (0 முதல் 80 வரை), f=குவியும் தூரம் (0 முதல் 50 வரை) என்றால், நேமவரையம் வரைந்து $f=20$, $v=50$–க்குரிய u–இன் மதிப்பைக் காண்க. (சென்னை '65 செப்.)

8. $\frac{1}{u}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}$ $(0 \leq h_1 \leq 500,\ 0 \leq h_2 \leq 50)$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க ஒரு நேமவரையம் வரைக.

9. $x^2+ax+b=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க வட்ட நேம வரையம் வரையும் முறையை விளக்குக. அதன் மூலம் $x^2+5x-4=0$ என்ற சமன் பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

10. $x^2+ax+b=0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க ஒரு வட்ட நேமவரையம் வரைக. அதன் மூலம் (i) $x^2+3x-8=0$, (ii) $2x^2+7x-5=0$ என்ற சமன்பாடு களைத் தீர்க்கவும்.

11. $x^2+ax+b=0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க ஒரு பரவளைய நேமவரையம் வரைக. அதன் மூலம் $x^2-4x-5=0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

12. $x^3+2x-8=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களை நேமவரையம் வரைந்து காண்க.

13. $x^3+ax+b=0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க ஒரு நேம வரையம் வரைக. அதன் மூலம் $x^3-3x-4=0$–இன் மூலங்களைக் காண்க.

14. $8x^3+12x^2-2x-3=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களை நேமவரையம் வரைந்து காண்க.

15. $a \cos \theta+b \sin \theta=1$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு நேமவரையம் வரையும் முறையை விளக்குக. அதன் மூலம் $5 \cos \theta+3 \sin \theta=1$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

விடைகள்

பயிற்சி 1

(1) $2y^4+5y^3-3y^2-7y-10=0$ (2) $y^5-12y^4+4y^3+16y^2-32y-512=0$ (3) $2y^4-50y^3+300y^2-2000y+10000=0$. (4) $10y^5-11y^4+8y^3-3y^2+6y-5=0$ (5) $3y^3+43y^2+206y+321=0$ (6) $y^5+7y^4+14y^3+11y^2+40y+53=0$ (7) $y^4-9y^3+20y^2=0$; $x=-2, 2, 2, 2, 3$ (8) $y^4-23y^2-61y-43=0$ (9) $y^4-6y^2+8=0$; $x=3\pm\sqrt{2}, 1, 5$

பயிற்சி 2

(1) 2·2404 (2) 0·327 (3) 0·32 (4) 1·5320888 (5) 1·6716975 (6) 2·0945514 (7) 0·90 (8) 0·259 (9) 0·547 (10) 2·76885 (11) 1·9078 (12) 28·467848 (13) 0·5615 (14) 1·6369 (15) 1·6920 (16) 6·2500000 (17) −0·59368583 (18) 2·15443 (19) 3·1072325 (20) 2·92401773821

பயிற்சி 3

(1) 1·0447 (2) 4·3311 (3) 1·99737 (4) 1·723 (5) 4·5465 (6) 1·4453 (7) 2·404

பயிற்சி 4

(1) 2·09455 (2) 2·1958 (3) 2·047 (4) 1·9964 (5) 0·25865 (6) 4·0644 (7) 4·2644 (8) 2·81471 (9) 2·96867 (10) 0·3131 (11) 1·636913570 (12) −1·7728656 (13) 2·24004099 (14) 4·8058955338 (15) −3·9073785 (16) 3·176814393 (17) 5·13457872528 (18) 9·88601 (19) 2·554195 (20) 2·883238 (21) 0·6071 (22) 2·308 (23) 0·9383 (24) −1·9338 (25) 0·6724 (26) 3·7893 (27) 0·15368 (28) 8·46 (29) 6·089114 (30) 1·2564 (31) 2·1533 (32) (i) 3·1623, (ii) 6·8537 (iii) 2·7203 (33) $x=0{\cdot}2268461$, $y=0{\cdot}3697895$

பயிற்சி 5

(1) $x=1{\cdot}7087$, $y=-1{\cdot}8003$, $z=1{\cdot}0491$

(2) $x=0{\cdot}444$, $y=0{\cdot}563$, $z=0{\cdot}324$, $t=0{\cdot}723$

(3) $x=0{\cdot}22637$, $y=0{\cdot}208901$, $z=1{\cdot}03834$, $t={\cdot}846773$

(4) $x=5$, $y=4$, $z=-7$, $w=1$

(5) $x_1=2{\cdot}031$, $x_2=2{\cdot}683$, $x_3=-1{\cdot}118$, $x_4=3{\cdot}111$

பயிற்சி 6

(1) $3.5616 \pm 2.493\, i,\ -0.0284 \pm 0.3241\, i$
(2) $1.06393,\ -1.31327,\ 0.17571 \pm 1.37214\, i,$
$-0.05104 \pm 0.94212\, i$
(3) $5.2555,\ 0.9676 \pm 0.3272\, i,\ -0.7870 \pm 0.5764\, i,\ 0.3833$
(4) $-1.5818592,\ 0.5664427 \pm 1.3686572\, i,$
$0.9623278 \pm 0.7135689\, i,\ -0.7378408 \pm 0.8124513\, i.$

பயிற்சி 7

(1) 1.53208 (2) 1.24698 (3) 1.6920 (4) 2.24004 (5) 1.77286 (6) 0.8526

பயிற்சி 8

(1) $5+\frac{1}{7+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{3+}\cdots\cdots\cdots$

(2) $2+\frac{1}{10+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\cdots\cdots\cdots$

(3) $2+\frac{1}{1+}\ \frac{1}{12+}\ \frac{1}{6+}\ \frac{1}{4+}\cdots\cdots\cdots$

(4) $3+\frac{1}{9+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{13+}\cdots\cdots\cdots$

பயிற்சி 9

(1) 2, 1, −3 (3) −1.9524 (6) 3.049, −1.387, −1.692

பயிற்சி 10

(1) 1.356 (2) 2.47 (3) 2.969 (4) 1.7963 (5) 3.142 (6) 1.466 (7) 0.594; 2.047 (8) 0.888, −1.09 (9) 1.63, −2.26

பயிற்சி 11

(1) $y=0.0000008579x^{3.095}$ (2) $y=481.6x^{-1.0663}$
(3) $y=113.44e^{-0.1549x}$

பயிற்சி 12

(1) $\frac{-3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$ (2) (i) $c\,(e^x-1)$

(ii) $2\sin\frac{n}{2}\cos\left(nx+\frac{n+\pi}{2}\right)$ (iii) $2x(x+2)\,3^x$

(6) $U_2=12,\ U_3=68$ (8) $a^{2x}+a^{4x}(a^2+1)^2$

பயிற்சி 13

(2) $3[x]^3+10[x]^2+5[x]+1$ **(4)** 1110 **(5)** $9+[x]+13[x]^2-6[x]^3+[x]^4$ **(6)** (i) $[x]^4+6[x]^3+4[x]^2+6$ **(ii)** $11[x]^4+71[x]^3+94[x]^2+19[x]-15$ **(7)** 126 **(9)** $\frac{1}{4}[x]^4+2[x]^3+\frac{9}{2}[x]^2+12[x]+k$.

பயிற்சி 14

(1) 891 **(2)** 10 ; 22 **(3)** 1756 **(4)** $y=-x^3-3x^2-5x+1$ **(5)** 57·457 **(6)** 40·5°C ; 41·5°C **(7)** 187·79°C **(8)** 5281 **(9)** 24·6 **(10)** 3108·0695 **(11)** 27·85 **(12)** 1·7589 **(13)** 0·9306 **(14)** 0·7881 **(15)** 0·5368 **(16)** 27·16 ; 50·44 **(17)** 0·9975 ; 0·9975016 **(18)** 0·208459 ; 0·227977 **(19)** 0·2296657 **(20)** 0·86123211.

பயிற்சி 15

(1) 149 **(2)** 370 **(3)** 27·51 **(4)** 274 **(5)** 7237·87 **(6)** 0·5479 **(7)** 1·99476 **(8)** 160·06 **(9)** 3·215949 **(10)** 0·050015.

பயிற்சி 16

(1) 300 **(2)** 207·31 **(3)** 24·2 **(4)** 465 **(5)** 19·84 **(6)** 169·33 **(7)** 380·5 **(8)** 445·2 **(9)** 2744 **(10)** 3·708, 3·711 **(11)** 78·35, 80·59 **(12)** 0·123 ; 0·0904 **(13)** 4·79 **(14)** 2025 73005 **(15)** 0·99994 **(16)** 1·5.

பயிற்சி 17

(1) $f(a, b)=\frac{-(a+b)}{a^2 b^2}$; $f(a, b, c)=\frac{ab+bc+ca}{a^2 b^2 c^2}$;

$$f(a, b, c, d)=\frac{-(abc+abd+acd+bcd)}{a^2 b^2 c^2 d^2}$$

(3) 6 **(4)** $(x-1)(x-3)(x-6)(x^2+x+1)$ **(5)** x^3+x **(6)** x^4 **(7)** $f(3)=18$; $f(14)=2548$ **(8)** 433·11 **(9)** 93·3 **(10)** 681472 **(11)** 130326 **(12)** $-(x-2)^3+5(x-2)^2-3(x-2)+7$ **(13)** $(x-6)^3+13(x-6)^2+54(x-6)+73$.

பயிற்சி 18

(1) x^3+x^2-x+2 **(2)** $3x^3-17x^2+26x-12$ **(3)** $x^3-9x^2+17x+6$ **(4)** 49·31 **(5)** 13·18 **(6)** 41·5 **(7)** 18 **(8)** 14·23 **(9)** 20·449 **(10)** 8·89 **(11)** 180·07 **(12)** 25 **(13)** 77·405 **(14)** 48.

பயிற்சி 19

(1) 6 **(2)** 2017 **(3)** 76·912 **(4)** 7·6 **(5)** 16·9216 **(6)** 0·70711 **(7)** 2·5282738 **(8)** 0·17639 **(9)** 0·016247 **(10)** 21·219318 **(11)** 16·353 **(12)** 0·035336 **(13)** 0·02838499.

பயிற்சி 20

(1) 16·25 **(2)** 0·704689 **(3)** 45·3 **(4)** 3·52828 **(5)** 6504 **(6)** 1431·5 **(7)** 14·606063 **(8)** 0·9015.

பயிற்சி 21

(1) 37·23 **(2)** 2·751 **(3)** 8·337 **(4)** 53·7 **(5)** 886·42; −1690·8 **(6)** 1·52 **(7)** 1·2134 **(8)** 2·0946 **(9)** 1·371363 **(10)** 3·7893 **(11)** 48·59° **(12)** 0·4769 **(13)** 0·6067 **(14)** 2·425990 **(15)** 0·267949 **(16)** 2·4695.

பயிற்சி 22

(1) 5·254 **(2)** 5·319 **(3)** 10·389, 10·475 **(4)** f (·044, 22·5) =38·4371.

பயிற்சி 23

(1) 5·56 **(2)** 27·5 **(3)** 0·002000; −0·000004 **(4)** 0·098105 **(5)** 1·6682 **(6)** 0·03560 **(7)** −1·45835 **(8)** 0·254 **(9)** 0·1086 **(10)** 98

பயிற்சி 24

(1) *மீப்பெரிது :* x = −2, (54) ; *மீச்சிறிது :* x = 3, (−71)
(2) *மீப்பெரிது :* x = 0, (0) ; *மீச்சிறிது :* x = 1, −1 ; (−0·25), (−0·25)
(3) *மீப்பெரிது :* x = 4, (164) ; *மீச்சிறிது :* x = 8, (132)
(4) *மீப்பெரிது :* x = 1·0728, (0·2541) ; *மீச்சிறிது :* x = 3·4363, (−0·4894)
(5) *மீச்சிறிது :* x = 1·7887, (39·8027)
(6) x = 5·6922
(7) x = 0·496, (0·8852)
(8) *மீப்பெரிது :* x = 1·1764, (2·6471)
(9) *மீச்சிறிது :* x = 5·4049, (373·75)
(10) *மீச்சிறிது :* x = 2·5485, (0·36358)

பயிற்சி 25

(1) 0·6948775 **(2)** 1·82785 **(3)** 1·136 **(4)** 3541·67 **(5)** 3·545416 **(6)** 7·8558 **(7)** 3760·67 **(8)** 0·6932 **(9)** (i) 0·7854 (ii) 0·7854 **(10)** 1·299 **(11)** 293·4 **(12)** 0·848306 **(13)** 3·1417 **(14)** 0·74679 **(15)** 1·5050 **(16)** 0·693153 **(17)** 0·523599 **(18)** 0·7853996 **(19)** 13·8048 **(20)** 0·48646 **(21)** 9·111154 **(22)** 0·04879016 **(23)** 1728114577800 **(24)** 2582129761 **(25)** 0·78539817 **(26)** 0·5495 **(27)** 0·141593 **(28)** 0·675539 **(29)** 0·6931472.

பயிற்சி 26

(1) (i) $\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$ **(ii)** $\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+31n+74)$ **(iii)** $\frac{1}{4}n(n+1)(n-3)(n-4)$ **(2)** $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ **(3)** $\frac{1}{3}n(6n^3+16n^2+9n-4)$ **(4)** $\frac{1}{12}-\frac{1}{2(n+2)(n+3)}$

(5) $\frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}$ **(6)** $\frac{n(n+1)}{6(n+3)(n+4)}$ **(7)** $\cdot\frac{11}{768}$

(8) $-\frac{1}{6}n(2n^2-27n-17)$ **(9)** 3^n-1-n **(10)** $3^{n+1}+\frac{1}{2}(n^2+7n-6)$

(11) $\frac{1}{12}n(n+1)(9n^2+17n+4)$ **(12)** $1-\frac{1}{(n+1)4^n}$ **(13)** $(n+1)\frac{a^{n+1}}{a-1}-\frac{a^{n+2}}{(a-1)^2}-\frac{a}{a-1}+\frac{a^2}{(a-1)^2}$ **(14)** $n^2\,2^{n+1}$ **(15)** 0·6956534 **(16)** 0·0034036 **(17)** 0·0102512 **(18)** 0·0045249175 **(19)** 0·00083129 **(20)** 0·585886 **(21)** 0·1806594 **(22)** 155·97000 **(23)** 136·217607 **(24)** எதிர்மடக்கை 28·138179 **(25)** எதிர்மடக்கை 2567·59914 **(26)** எதிர்மடக்கை 4433·721927 **(27)** 80·142026

பயிற்சி 27

(1) $u_x=\frac{c}{(x-1)!}$ **(2)** $u_x=c_1(2)^x+c_2(-2)^x$ **(3)** $u_x=(c_1+c_2x)(\frac{1}{4})^x$ **(4)** $u_x=c_1\cdot 2^x+c_2\,5^x-6\cdot 4^x$ **(5)** $u_x=c\,2^x-3(x+1)$

(6) $u_x=c\cdot\frac{1}{3^x}+\frac{1}{6}x(x-1)$ **(7)** $u_x=c\,x^{-1}$ **(8)** $u_x=c_1\,2^x+c_2\,3^x+\frac{1}{6}\cdot 5^x$ **(9)** $u_x=c_1\,4^x+c_2(-1)^x-\frac{1}{4}\cdot 3^x$ **(10)** $u_x=c\,e^{x^{(2)}}+\frac{1}{4}\left[x^{(3)}+\frac{x^{(2)}}{2}\right]$

பயிற்சி 28

$$y = 4.52 + 28.04 \cos x - 2.37 \cos 2x + 0.90 \cos 3x + 4.85 \cos 4x + 1.71 \cos 5x + 0.74 \cos 6x - 0.13 \sin x - 12.50 \sin 2x - 3.15 \sin 3x + 3.41 \sin 4x - 0.22 \sin 5x.$$

பயிற்சி 29

(1) 927·6 **(2)** 454 **(3)** 8·13 **(4)** 0·2852 **(5)** 0·5085 **(6)** 2·307 **(7)** 4·57 **(8)** 2·041 **(9)** 8·43 **(10)** 3·91 **(11)** 28·16 **(12)** 0·061 **(13)** 55·6 **(14)** 62·2 **(15)** 14·74 **(16)** 4·8 **(17)** 3·04

BIBLIOGRAPHY

1. "The Calculus of Observations" —*by Robinson*
2. "Principles of Numerical Analysis" —*by A. S. Householder*
3. "The Calculus of Finite Differences with Numerical Analysis" —*by H. C. Saxena*
4. "Numerical Mathematical Analysis" —*by J. R. Scarborough*
5. "Numerical Mathematics" —*by P. Balasubrahmanyam*
6. "Survey of Numerical Analysis" —*by J. Todd*
7. "An Introduction to Numerical Mathematics" —*by Edward L. Stiefel*
8. "எண்சார் கணிதம்" —*by M.M. இராமசுவாமி*
9. "Interpolation" —*by J. F. Steffensen*
10. "Finite Differences for Actuarial Students" —*by Harry Jreeman*
11. "Numerical Analysis" —*by Z. Kopal*
12. "The Slide Rule" —*by Blaine*

கலைச்சொற்கள்

A

Accurate — மிகச் சரியான
Add — கூட்டு
Addition — கூட்டல்
Algebra — இயற்கணிதம்
Algebraic expression — இயற்கணிதக் கோவை
Altitude — கோணவேற்றம், குத்துயரம்
Analysis — பகுப்பாய்வு
Angle — கோணம்
Antilogarithm — எதிர்மடக்கை
Approximate — தோராயமான
Approximate value — தோராயமதிப்பு
Approximation — தோராயம்
Arbitrary — யாதாமொரு
Arc — வில்
Argument — சார்பின்மாறி
Arithmetic — எண் கணிதம்
Arithmetic mean — கூட்டுச் சராசரி
Arithmetic progression — கூட்டுத் தொடர்
Ascending order — ஏறு வரிசை
Assumption — தற்கோள்
Auxiliary equation — துணைச் சமன்பாடு
Auxiliary function — துணைச் சார்பு
Average — சராசரி
Axis — அச்சு

B

Backward differences — பின்முக வேறுபாடுகள்
Binomial theorem — ஈருறுப்புத் தேற்றம்
Bivariate — இருமாறி

C

Calculate — கணக்கிடு
Calculation — கணக்கீடு
Case — வகை

Central difference	—	மைய வேறுபாடு
Characteristic equation	—	சிறப்பியல்பு சமன்பாடு
Characteristic roots	—	சிறப்பு மூலங்கள்
Circle	—	வட்டம்
Complete integral	—	முழுத் தீர்வு
Complex root	—	சிக்கல் மூலம்
Constant	—	மாறிலி
Co-ordinates	—	அச்சுத்தூரங்கள்
Correct	—	திருத்து, திருத்தமான
Corrections	—	திருத்தங்கள்
Cube-root	—	கன மூலம்
Cubic equation	—	முப்படிச் சமன்பாடு
Curve	—	வளைவு, வளைகோடு
Cursor	—	காட்டி

D

Data	—	விவரங்கள்
Decimal	—	தசமம்
Decrease	—	குறைதல்
Definite integral	—	வரையறுத்த தொகையீடு
Definition	—	வரையறை
Degree	—	பாகை, படி
Dependent	—	சார்ந்த
Dependent variable	—	சார்புடைமாறி
Derivative	—	வகைக்கெழு
Descartes rule of signs	—	தெக்காட்டின் குறியீட்டு விதி
Descending order	—	இறங்கு வரிசை
Determinant	—	அணிக்கோவை
Difference	—	வேறுபாடு, வித்தியாசம்
,, advancing	—	முன்னேறு வேறுபாடு
,, backward	—	பின்முக வேறுபாடு
,, central	—	மைய வேறுபாடு
,, divided	—	வகுபட்ட வேறுபாடு
,, forward	—	முன்வேக வேறுபாடு
Difference, leading	—	முதனிலை வேறுபாடு
Difference equation	—	வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு
Differentiable	—	வகையிடத்தக்க
Differential	—	வகையீட்டுக்குரிய, வகையீட்டு
,, coefficient	—	வகையீட்டுக் கெழு
,, equation	—	வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

,, operator — வகையீட்டுச் செயலி
Differentiate — வகையிடு, வகையீடு காண்
Differentiation — வகையீடு, வகையிடல்
,, logarithmic — மடக்கை வகையீடு
Digit — இலக்கம்
Divide — வகு
Double root — இரட்டை மூலம்

E

Eliminate — நீக்கு, விலக்கு
Elimination — நீக்கல், விலக்கல்
Equal — சமம்
Equation — சமன்பாடு
,, auxiliary — துணைச் சமன்பாடு
,, binomial — ஈருறுப்புச் சமன்பாடு
,, cubic — முப்படிச் சமன்பாடு
,, difference — வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு
,, homogeneous — சமபடித்தான சமன்பாடு
,, linear — ஒருபடிச் சமன்பாடு
,, normal — மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாடு
,, quadratic — இருபடிச் சமன்பாடு
,, reciprocal — தலைகீழ்ச் சமன்பாடு
,, Simultaneous — ஒருங்கைச் சமன்பாடுகள்
Error — பிழை
Estimate — தோராய மதிப்பு
Evaluate — மதிப்பிடு
Even number — இரட்டையெண்
Expand — விரி
Expression — கோவை
Extrapolation — புறச்செருகல்

F

Factor — காரணி
Factorial — காரணீயப் பெருக்கம்
Factorise — காரணிப்படுத்து
Finite — முடிவுள்ள
Formula — வாய்பாடு, சூத்திரம்
Fraction — பின்னம்
Frame — சட்டம்

Function — சார்பு
,, algebraic — இயற்கணிதச் சார்பு
,, auxiliary — துணைச் சார்பு
,, decreasing — குறைவுச் சார்பு
,, increasing — கூடும் சார்பு
,, linear — ஒருபடிச் சார்பு
,, periodic — திரும்புச் சார்பு
,, polynomial — பல்லுறுப்புச் சார்பு
,, trigonometrical — திரிகோணக் கணிதச் சார்பு

G

General — பொதுவான
,, solution — பொதுத் தீர்வு
Graph — வரைபடம்
Graphical method — வரைபட முறை
,, representation — வரைபடவகைக் குறிப்பு
Gregory's formula — கிரிகோரியின் வாய்பாடு

H

Hair line — மயிர்க்கோடு
Harmonic analysis — இசைப் பகுப்பாய்வு
Homogeneous — சமபடித்தான
Horizontal — கிடை
,, line — கிடைக் கோடு

I

Increment — ஏற்றம், கூடுந்தொகை
Indefinite integral — வரையறுத தொகையீடு
Independent variable — சாராமாறி
Indicator — காட்டி
Infinite — முடிவில்லாத, கந்தழி
,, series — முடிவிலாத் தொடர், கந்தழித் தொடர்
Infinity — முடிவிலி, கந்தழி
Integer — முழுவெண்
Integral — தொகை
,, definite — வரையறுத்த தொகை
Integrand — தொகைச் சார்பு
Integrate — தொகைகாண், தொகையீடுகாண்
Integrating factor — தொகையீட்டுக் காரணி

Integration	—	தொகையிடல், தொகை காணல்
,, numerical	—	எண்சார் தொகையிடல்
,, by parts	—	பகுதிப்படுத்தித் தொகையிடல்
Intercept	—	வெட்டுத் துண்டு
Interpolation	—	இடைச்செருகல்
,, bivariate	—	இருமாறி இடைச்செருகல்
,, inverse	—	எதிர்மார் இடைச்செருகல்
Interval	—	இடைவெளி
Invariable	—	மாற்றமில்லாத, மாறுத
Inverse	—	நேர்மாறுன
Iterative process	—	தொடர்முறைக் கணிப்பு
Item	—	உறுப்பு

L

Law	—	விதி
Least squares method	—	மீச்சிறு படி முறைகள்
Limit	—	எல்லை
Line	—	நேர்கோடு
Linear	—	நேர்கோட்டுக்குரிய, ஒரு படிக்குரிய
Linear equation	—	ஒருபடிச் சமன்பாடு
Logarithm	—	மடக்கை
Logarithmic paper	—	மடக்கைத் தாள்
Logarithmic graph	—	மடக்கை வரைபடம்
,, double	—	இருசார் மடக்கை வரைபடம்
,, semi	—	ஒருசார் மடக்கை வரைபடம்

M

Mantissa	—	மடக்கைப் பின்னம்
Maximum	—	மீப்பெரிது
Method	—	வழி, செய்முறை
Minimum	—	மீச்சிறிது
Minus	—	கழி, குறை, எதிர்
Multiplication	—	பெருக்கல்
Multiply	—	பெருக்கு

N

Negative	—	எதிர்
,, number	—	எதிரெண்

Nomogram — நேம வரையம்
,, circular — வட்ட நேம வரையம்
,, parabolic — பரவளைய நேம வரையம்
Non-homogeneous — சமபடியில்லாத, ஒருபடியில்லாத
Non-linear — ஏகபரிமாணமல்லாத
Normal equation — மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாடு
Notation — குறியீடு
Number — எண்
,, even — இரட்டையெண்
,, negative — எதிரெண்
,, odd — ஒற்றையெண்
,, positive — நேரெண்
,, real — மெய் எண்
Numerical — எண்சார், எண்ணுக்குரிய
,, differentiation — எண்சார் வகையிடல்
,, integration — எண்சார் தொகையிடல்
,, solution — எண்சார் தீர்வு

O

Odd — ஒற்றை
Operator — செயலி
Opposite — எதிரான
Order — வரிசை, நிலை
Ordinate — நிலைத்தூரம்
Origin — ஆதி

P

Pair — சோடி
Parabola — பரவளைவு
Parallel — இணை
Particular integral — சிறப்புத் தீர்வு
Percentage error — சதவீதப் பிழை
Period — காலம், காலவட்டம்
Periodic function — திரும்புச் சார்பு
Pivot — சுழற்சித் தானம்
Pivotal equation — சுழற்சித் தானச் சமன்பாடு
Point — புள்ளி
Positive — நேர்

Primitive — மூலம்
,, complete — முழுமூலம்
Principle — தத்துவம்
Product — பெருக்கம்
Proportion — விகிதசமம்
Prove — நிறுவு, நிரூபி
Proof — நிரூபணம்

Q

Quadratic equation — இருபடிச் சமன்பாடு
Quadrature — பரப்புகாண் முறை
,, formula — பரப்புகாண் வாய்பாடு
Quotient — ஈவு

R

Radial nomogram — ஆரை நேமவரையம்
Radius — ஆரை
Range — வீச்செல்லை
Ratio — விகிதம்
Rational — விகிதமுறுகின்ற
Real — மெய்யான
Reciprocal — தலைகீழான, தலைகீழ்
Relation — தொடர்பு
Remainder — மீதி
Residues — எச்சம்
Root — மூலம்
,, complex — சிக்கல் மூலம்
,, real — மெய் மூலம்
,, square — வர்க்க மூலம்
Rule — விதி
,, trapezoidal — கோடகம் சார்ந்த விதி, சாய்வக விதி

S

Scale — அளவு கோல்
,, logarithmic — மடக்கையளவு கோல்
Side — பக்கம்
Sign — குறி
Similar — வடிவொத்த

Simple equation — எளிய சமன்பாடு
Simplification — சுருக்கல்
Simplify — சுருக்குக
Simultaneous equations — ஒருங்கை சமன்பாடுகள்
Slide rule — நழுவுச் சட்டம்
Slope — சாய்வு விகிதம், சரிவு
Smooth — மெல்லிய, வழுவழுப்பான
Solution — தீர்வு
Solve — தீர்த்தல், தீர்
Square — வர்க்கம், சதுரம்
Straight line — நேர்கோடு
Summation — கூட்டல்

T

Table — அட்டவணை, பட்டியல்
Tabulate — அட்டவணைப்படுத்து, பட்டியலமை
Term — உறுப்பு
Theorem — தேற்றம்
Trapezoid — சரிவகத்திண்மம்
Trapezoidal — கோடகம் சார்ந்த
Triangle — முக்கோணம்
Trigonometry — திரிகோணக் கணிதம்

U

Unit — அலகு
Unity — ஒன்று

V

Value — மதிப்பு
Variable — மாறி
Variate — மாறி
Variation — மாறுபாடு
Vertex — உச்சி
Vertical — உச்சிக்குரிய

Z

Zero — பூச்சியம்

மடக்கை அட்டவணை

											Mean Differences								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

Mean Differences = சராசரி வேறுபாடு

மடக்கை அட்டவணை

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	3041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9235	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9853	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

Mean Differences = சராசரி வேறுபாடு

எதிர்மடக்கை அட்டவணை

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1540	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1950	1954	1959	1963	1963	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2877	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

Mean Differences = சராசரி வேறுபாடு

எதிர்மடக்கை அட்டவணை

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	366	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

Mean Differences = சராசரி வேறுபாடு